Tartalom

LI. verseny 2021–2022. 2
Feladatok . . . 2
Megyei forduló . . . 2
Országos döntő . . . 8
Megoldások . . . 18
Megyei forduló . . . 18
Országos döntő . . . 34

LII. verseny 2022–2023. 65
Feladatok . . . 65
Megyei forduló . . . 65
Országos döntő . . . 70
Megoldások . . . 79
Megyei forduló . . . 79
Országos döntő . . . 98

LIII. verseny 2023–2024. 128
Feladatok . . . 128
Megyei forduló . . . 128
Országos döntő . . . 133
Megoldások . . . 142
Megyei forduló . . . 142
Országos döntő . . . 164

LI. verseny 2021–2022.

Feladatok

5. osztály **Megyei forduló**

1. a) Írd fel a 2022-t egy négyjegyű, egy háromjegyű és egy kétjegyű szám összegeként úgy, hogy a három összeadandó kilenc számjegye között pontosan háromféle számjegy forduljon elő.

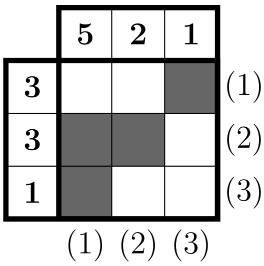
   b) Írd fel a 2022-t egy négyjegyű, egy háromjegyű és egy kétjegyű szám összegeként úgy, hogy a három összeadandó kilenc számjegye mind különböző legyen.

   Elegendő egy-egy megoldást megadni; nem kell az összes lehetőséget megkeresni, sem azt leírni, hogy hogyan találtad ezt a megoldást.

2. A Bergengóc Titkosszolgálat egy újfajta titkosítást fejleszt ki, melyben egy szürke és fehér mezőkből álló táblázatot akarnak kódolni. A kódolás módja a következő: minden sor elejére odaírják a sorban szereplő szürke mezők oszlopszámainak összegét, az oszlopok tetejére pedig a benne szereplő szürke mezők sorszámainak összegét. A bal oldali ábrán egy 3×3-as táblázat titkosítása látható, a zárójelben írt számok a sor- és oszlopszámokat jelölik.

   A titkosszolgálat most egy 5×5-ös táblát kapott kódolva, ez látható a jobb oldali ábrán. Melyik mezők voltak szürkére festve a táblázatban?

   A teljes pontszámhoz elegendő egy jól kitöltött táblázatot megadni, indoklás nem szükséges.



	9	8	3	8	14	
7						(1)
13						(2)
8						(3)
6						(4)
11						(5)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	

3. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre az alábbi négy közül pontosan két állítás igaz?
   - A szám ezresekre kerekítve 0.
   - A szám százasokra kerekítve 100.
   - A szám tízesekre kerekítve 280.
   - A szám százasokra kerekítve 300.

   Válaszodat indokold.

4. Egy asztal körül 12 gyerek ül, mindegyikük sárga vagy kék pólóban van. Az asztal körül ülők közül pontosan 6 gyerekre teljesül, hogy mindkét szomszédja sárga pólóban van. Összesen hány sárga pólós ülhet az asztal körül?

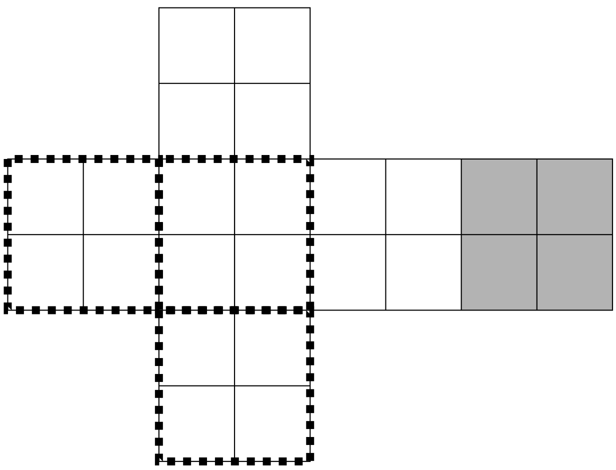
   Mutass példát minél többféle értékre és indokold meg, hogy más érték miért nem lehetséges.

5. Laci nyolc egyforma méretű szabályos dobókockából egy nagyobb kockát épít, majd leteszi az asztalra. Peti ránéz elölről, balról és felülről, majd megállapítja, hogy az így látott tizenkét szám összege 66. Neki is lát, hogy lerajzolja a nagy kocka hálóját, mely az alábbi ábrán látható (a számokat egyelőre még nem írta be). Szaggatott vonallal be is keretezte azt a három lapot, melyeket az előbb megnézett.

   Mekkora lehet az asztalon fekvő (az ábrán szürke hátterű) lapokon szereplő négy szám összegének

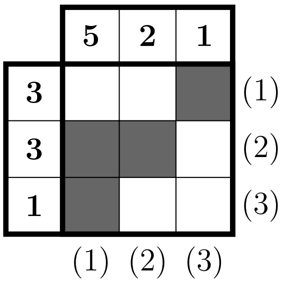
   (a) legkisebb lehetséges értéke? (b) legnagyobb lehetséges értéke?

   A teljes pontszám eléréséhez egyrészt példákat kell adnod a legkisebb és a legnagyobb lehetséges értékre – azt is megadva, hogy melyik szám hol található a nagy kockán –, másrészt azt is indokolnod kell, hogy még kisebb, illetve még nagyobb összeg miért nem érhető el.
   A szabályos dobókockán a szemben lévő lapokon látható számok összege 7.



1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre az alábbi négy közül pontosan 2 állítás igaz?
   - A szám ezresekre kerekítve 0.
   - A szám százasokra kerekítve 100.
   - A szám tízesekre kerekítve 470.
   - A szám százasokra kerekítve 500.

2. A bergengóc titkosszolgálat egy újfajta titkosítást fejleszt ki, melyben egy szürke és fehér mezőkből álló táblázatot akarnak kódolni. A kódolás módja a következő: minden sor elejére odaírják a sorban szereplő szürke mezők oszlopszámainak összegét, az oszlopok tetejére pedig a benne szereplő szürke mezők sorszámainak összegét.
   A bal oldali ábrán egy 3×3*-as táblázat titkosítása látható, a zárójelben írt számok a sor- és oszlopszámokat jelölik.*
   A titkosszolgálat most egy 6×6-ös táblát kapott kódolva, ez látható a jobb oldali ábrán. Melyik mezők voltak szürkére festve a táblázatban? (Indoklás nem szükséges.)

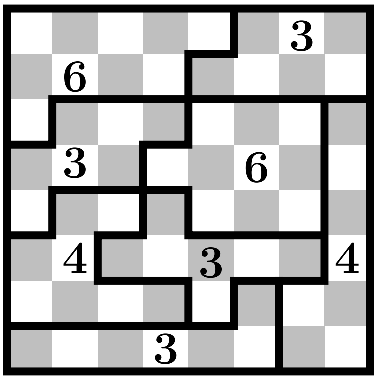


	3	10	13	11	17	10	
17							(1)
5							(2)
15							(3)
9							(4)
7							(5)
18							(6)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	

3. Felírtuk az összes olyan római számot, amelyben az M, D, C, L, X, V, I betűk mindegyike pontosan egyszer szerepel. Mennyi az így felírt számok összege?
   Emlékeztetőül, az egyes betűk értéke: M=1000, D=500, C=100, L=50, X=10, V=5, I=1.

4. Ricsi szétvágta a sakktábláját rácsvonalak mentén, méghozzá úgy, hogy a keletkező összefüggő darabok mindegyikébe pontosan 4 sötét mező esett. Ezután minden darabra ráírta, hogy hány világos mező szerepel benne. Legfeljebb hány különböző számot írhatott így a darabokra?

   A teljes pontszámhoz példát kell mutatnod szétvágásra a lehető legtöbb különböző értékkel, és indokolnod kell azt is, hogy miért ez a legtöbb.



Ricsi egy hagyományos, azaz 8 × 8-as méretű sakktáblát vágott szét.
Egy darabot akkor nevezünk összefüggőnek, ha bármelyik mezőjéről el lehet jutni bármelyik másik mezőjére úgy, hogy menet közben csak élszomszédos mezőkre lépünk.
Az ábrán egy lehetséges szétvágás látható, amelynél 3-féle értéket (3, 4, 6) írt a darabokra Ricsi.

5. Egy asztal körül 12 ember ül, mindegyikük igazmondó vagy hazudós. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak.
   Körben mindannyian a következőt mondják: ,,Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”. Ezután mindenki feláll, majd véletlenszerű sorrendben visszaül az asztalhoz.

   Ha a helycsere után megkérdezzük mindenkitől, hogy ,,Igaz-e most, hogy egy igazmondó és egy hazudós között ülsz?”, akkor legkevesebb hány ,,Igen” választ kaphatunk?

7. osztály **Megyei forduló**

1. Egy asztal körül 12 ember ül, mindegyikük igazmondó vagy hazudós. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak.
Körben mindannyian a következőt mondják: ,,Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”. Ha megkérdezzük mindenkitől, hogy ,,Igaz-e, hogy valamelyik szomszédod igazmondó?”, hány ,,Igen” választ kaphatunk?

2. Egy hosszú, egyenes országút egy szakaszával párhuzamosan halad egy nagyfeszültségű elektromos távvezeték. A vezetéket egyenlő távolságközökkel elhelyezett villanyoszlopok tartják, melyek sorban meg is vannak számozva. Az 1-es számú pózna éppen a 16-as kilométerkőnél helyezkedik el, a 225-ös számú pózna pedig a 100-as kilométerkőnél.

   Érdekes módon van egy olyan villanyoszlop, amely éppen a vele azonos számú kilométerkőnél áll. Hányas számú oszlopról van szó?

3. Egy pozitív egész számot *egyhangú*nak nevezünk, ha a számjegyeinek több, mint fele egyforma. Például a 2022, a 100, a 33 és a 7 mind egyhangúak; de a 2021 és 2020 egyike sem egyhangú.
Hány 2022-nél kisebb egyhangú pozitív egész szám van?

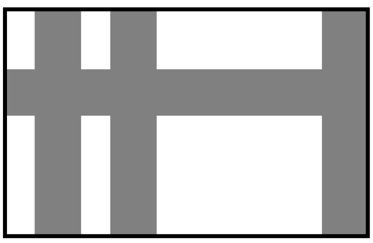
4. Bonts fel

   a) egy szabályos ötszöget

   b) egy négyzetet

   négy darab, páronként nem egybevágó egyenlőszárú háromszögre, és határozd meg a felbontásban szereplő egyenlőszárú háromszögek szögeit.

5. A Bergengóc Abroszgyárban kizárólag olyan asztalterítőket készítenek, amelyek téglalap alakúak, és fehér alapon szürke sávokkal vannak tagolva. Minden szürke sáv párhuzamos a téglalap valamelyik oldalával és pontosan 3 cm széles. A 2022 tavaszi kollekcióban ráadásul csupa olyan modellt dobtak piacra, amelynek területe pontosan fele részben szürke és fele részben fehér.
Az ábrán a kollekció legkisebb, 24 cm × 15 cm-es méretű modelljének méretarányos rajza látható.

   Szerepelhet-e a 2022 tavaszi kollekcióban olyan asztalterítő, amelynek mérete:

   a) 195 cm × 200 cm b) 200 cm × 205 cm?

   A párhuzamos szürke sávok között mindig maradnia kell fehér résznek, de ennek szélessége lehet akármilyen kicsi, akár 1 cm-nél kisebb is.

8. osztály — Megyei forduló

1. Egy hosszú, egyenes országút egy szakaszával párhuzamosan halad egy nagyfeszültségű elektromos távvezeték. A vezetéket egyenlő távolságközökkel elhelyezett villanyoszlopok tartják, melyek sorban meg is vannak számozva. Az 1-es számú pózna éppen a 16-as kilométerkőnél helyezkedik el, a 225-ös számú pózna pedig a 100-as kilométerkőnél.

   Érdekes módon van egy olyan villanyoszlop, amely éppen a vele azonos számú kilométerkőnél áll. Hányas számú oszlopról van szó?

2. Hány olyan háromjegyű szám van, amely nem tartalmaz 9-es számjegyet, és a számjegyeinek összege páros?

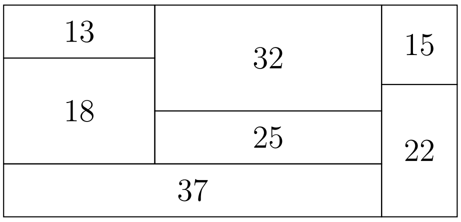
3. Bonts fel

   a) egy szabályos ötszöget

   b) egy négyzetet

   négy darab, páronként nem egybevágó egyenlőszárú háromszögre, és határozd meg a felbontásban szereplő egyenlőszárú háromszögek szögeit.

4. Egy nagy téglalapot felosztottunk kisebb téglalapokra, és a felosztásról egy **nem méretarányos** ábrát is készítettünk:



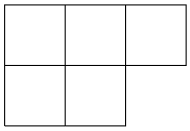
   Minden kis téglalapra ráírtuk a **kerület**ét. Lehet-e a nagy téglalap kerülete több, mint 60 egység?

5. a) Adj meg négy különböző pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy akárhogyan osztom két csoportra ezt a négy számot, az egyik csoportban szereplő számok összege osztható a másik csoportban szereplő számok összegével.

   b) Meg lehet-e adni 2022 különböző pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy akárhogyan osztom két csoportra ezt a 2022 számot, az egyik csoportban szereplő számok összege osztható a másik csoportban szereplő számok összegével?

   A csoportok lehetnek különböző elemszámúak.

1. Töltsük ki az alábbi alakzat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5$ számokkal úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban felülről lefele növekedjenek a számok.



Adjuk meg az összes lehetséges megoldást.
Nem kell bizonyítani, hogy a megtaláltakon kívül nincs megoldás. Teljes pontszám csak akkor kapható, ha sikerült az összes megoldást megtalálni.

2. Öt különböző magasságú gyerek áll egy sorban. Az alábbiakat tudjuk róluk:
   - Mindenki tud legalább két másik ember szemébe nézni.
   - Andris a legmagasabb, de nem látja Bélát.
   - Cili Dénes mellett áll, és rajta kívül még pontosan egy ember szemébe tud nézni.
   - Endre áll a bal szélen, és alacsonyabb, mint Cili.

   Milyen sorrendben állnak a sorban és mi a magasságbeli sorrendjük?

   Két gyerek pontosan akkor tud egymás szemébe nézni, ha kettőjük közt nincs olyan gyerek, aki magasabb lenne bármelyiküknél.

3. Kati néni tojásgazdálkodásba kezd. Első nap megveszi első tyúkját, ám ekkor nincs egy tojása sem. Egy tyúk minden éjszaka két tojást tojik. A termelés növeléséhez újabb tyúkokat szerezhet be napközben a piacon, tyúkonként öt tojásért cserébe. Máshonnan nem szerez be se tojást, se tyúkot; és a tyúkokat sem válthatja vissza tojásra. Kati néni szeretne a tizedik napon a lehető legtöbb tojással rendelkezni. Legfeljebb hány tojása lehet a tizedik napon?

   El kell magyaráznod a módszert is, amellyel szerinted a legtöbb tojást tudja Kati néni elérni. Nem kell indokolnod, hogy több tojást máshogy nem tud szerezni. Csak akkor kaphatsz teljes pontszámot, ha a lehetséges legtöbb tojáshoz vezető módszert találtad meg, de részpontszámot akkor is kaphatsz, ha nem találod meg a legjobb megoldást.

4. (a) Adjunk meg egy olyan számot, amelyiknek a 8-cal való írásbeli osztása során mindegyik maradék előfordul.

   (b) Adjuk meg a legkisebb ilyen számot.

   Az 1635 osztása során például háromféle maradék fordul elő: a 0, az 1 és a 3 (a 3 kétszer is):

$$\begin{array}{l} \underline{1635} : 8 = 204 \\ \mathbf{1}6 \\ \ \ \mathbf{0}3 \\ \ \ \ \ \mathbf{3}5 \\ \ \ \ \ \ \ \mathbf{3} \end{array}$$

5. Egy pingpongbajnokságon 13 játékos vett részt, és mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszott. A játékosok között voltak bal- és jobbkezesek is. Összesen ugyanannyi meccset nyert jobbkezes játékos, mint balkezes.
Legfeljebb hányszor fordulhatott elő, hogy egy balkezes játékos legyőzött egy jobbkezest?

5. osztály, 2. nap — **Országos döntő**

1. Helga és Ildi pénzérmékben tartja megtakarított pénzét. Helgának 34 tízforintosa és valamennyi ötvenforintos érméje van. Ildinek 64 tízforintos és néhány ötvenforintos érméje van. Érdekes módon összesen pontosan ugyanannyi darab pénzérméjük van. Helga lemérte, mennyi érméi össztömege és 492 grammot kapott. Mennyi Ildi érméinek össztömege, ha tudjuk, hogy az ötvenforintos érme pontosan két grammal nehezebb, mint a tízforintos érme?

2. Kolos egyforma kockákból épített egy testet. Ezután elkészítette a test ,,nyársábráját": felírta, hogy elölről, illetve balról nézve az egyes helyeken hány kockát ,,nyársalna fel", ha az adott helyen átszúrná a rajzot a rajzsíkra merőlegesen.

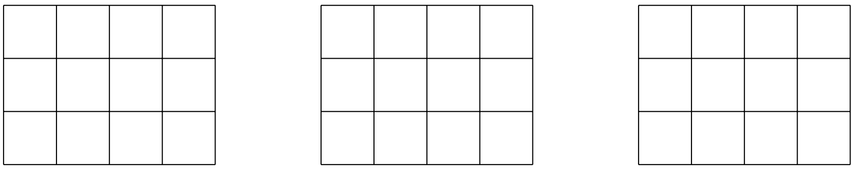
	1		
1	2	2	1
3	2	2	1

Elölről nézve

1		
2	3	1
2	4	2

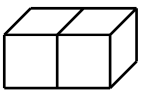
Jobbról nézve

Színezzük ki a megadott mintában a kockák helyét.



Alsó szint Középső szint Felső szint

Az építmény nincs összeragasztva, azaz minden olyan kocka alatt, amely nem a legalsó szinten van, kell legyen egy másik kocka. Alább egy egyszerűbb építmény nyársábrája látható.



1	1

Elölről nézve

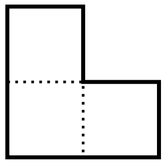
2

Jobbról nézve

3. Sanyi a Harry Potter-napokon szeretné megnézni mind a nyolc filmet a kedvenc mozijában. A moziban három napon adják a filmeket, mindhárom napon 1-2-3-4-5-6-7-8 sorrendben, és Sanyi is ilyen sorrendben szeretné látni őket, mindegyiket pontosan egyszer. A filmek megnézését több napra is oszthatja, de lehetnek olyan napok, amikor egy részt se néz meg. Hányféleképpen teheti ezt meg?

4. L-triominókból szeretnénk egy négyzetet építeni úgy, hogy semelyik két triominó ne álljon össze egy 2×3 -as téglalappá. Legalább hány triominot kell ehhez felhasználnunk?

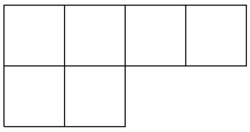
   Az ábrán egy L-triominó látható. A triominókat el lehet forgatni, de oldalaiknak a négyzet oldalaival párhuzamosaknak kell lenniük. Az építés során sem hézag, sem átfedés nem keletkezhet.



6. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Töltsük ki az alábbi alakzat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számokkal úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban felülről lefele növekedjenek a számok.



Adjuk meg az összes lehetséges megoldást.
Nem kell bizonyítani, hogy a megtaláltakon kívül nincs megoldás. Teljes pontszám csak akkor kapható, ha sikerült az összes megoldást megtalálni.

2. Kati néni tojásgazdálkodásba kezd. Első nap megveszi első tyúkját, ám ekkor nincs egy tojása sem. Egy tyúk minden éjszaka két tojást tojik. A termelés növeléséhez újabb tyúkokat szerezhet be napközben a piacon, tyúkonként öt tojásért cserébe. Máshonnan nem szerez be se tojást, se tyúkot; és a tyúkokat sem válthatja vissza tojásra. Kati néni szeretne a tizedik napon a lehető legtöbb tojással rendelkezni. Legfeljebb hány tojása lehet a tizedik napon?

El kell magyaráznod a módszert is, amellyel szerinted a legtöbb tojást tudja Kati néni elérni. Nem kell indokolnod, hogy több tojást máshogy nem tud szerezni. Csak akkor kaphatsz teljes pontszámot, ha a lehetséges legtöbb tojáshoz vezető módszert találtad meg, de részpontszámot akkor is kaphatsz, ha nem találod meg a legjobb megoldást.

3. a) Adjunk meg egy olyan számot, amelyiknek a 8-cal való írásbeli osztása során mindegyik maradék előfordul.

   b) Adjuk meg a legkisebb ilyen számot.

Az 1635 osztása során például háromféle maradék fordul elő: a 0, az 1 és a 3 (a 3 kétszer is):

$$\begin{array}{l} \underline{1635} : 8 = 204 \\ \mathbf{16} \\ \;\;\mathbf{0}3 \\ \;\;\;\;\mathbf{3}5 \\ \;\;\;\;\;\;\mathbf{3} \end{array}$$

4. Lili rajzolt egy lapra négy pontot, majd egymás után lemérte a pontpárok távolságát. Az első öt lemért távolság 10, 20, 30, 40 és 50 cm volt.
Mekkora a hatodik távolság lehetséges legnagyobb értéke?

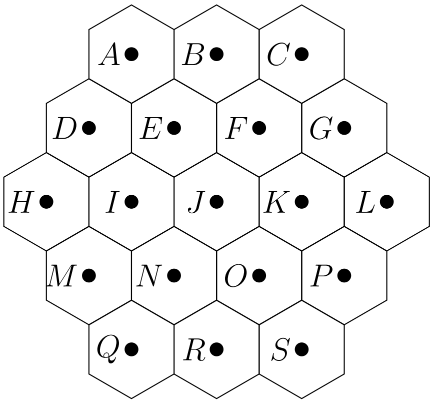
5. a) Anna leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek összegét, valamint különbségét. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?

   b) Béla leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek szorzatát, valamint hányadosát. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?

6. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Egy társasjáték táblája az alábbi ábrán látható módon, 19 darab szabályos hatszögből áll. Mindegyik hatszögnek megjelöltük a középpontját.
Adjunk meg minél több, különböző méretű szabályos háromszöget, amelynek mindhárom csúcsa a megjelölt 19 pont valamelyike.



A háromszögeket a csúcsok megnevezésével sorold fel.

Azonos méretű háromszögekből csak egyet-egyet adj meg.

Nem kell bizonyítanod, hogy nincs más, az általad megtaláltaktól különböző méretű szabályos háromszög.

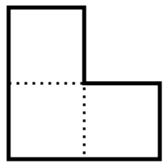
2. Sanyi a Harry Potter-napokon szeretné megnézni mind a nyolc filmet a kedvenc mozijában. A moziban három napon adják a filmeket, mindhárom napon 1-2-3-4-5-6-7-8 sorrendben, és Sanyi is ilyen sorrendben szeretné látni őket, mindegyiket pontosan egyszer. A filmek megnézését több napra is oszthatja, de lehetnek olyan napok, amikor egy részt se néz meg. Hányféleképpen teheti ezt meg?

3. a) Van-e olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám háromszorosát kapjuk?

   b) Van-e olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám négyszeresét kapjuk?

4. a) Össze lehet-e építeni 12 db L-triominóból egy téglalapot úgy, hogy semelyik két triominó ne álljon össze egy 2×3 -as téglalappá?

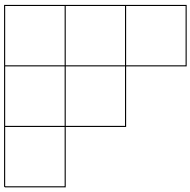
   b) Össze lehet-e építeni 18 db L-triominóból egy téglalapot úgy, hogy semelyik két triominó ne álljon össze egy 2×3-as téglalappá?



Az ábrán egy L-triominó látható. A triominókat el lehet forgatni, de oldalaiknak a téglalap oldalaival párhuzamosaknak kell lenniük. Az építés során sem hézag, sem átfedés nem keletkezhet.

7. osztály, 1. nap **Országos döntő**

1. Hányféleképpen lehet az alábbi alakzat mezőit az $1, 2, \ldots, 6$ számokkal kitölteni úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban felülről lefele növekedjenek a számok?



2. Piroska leírt a füzetébe néhány prímszámot. Észrevette, hogy mindegyik számjegyet pontosan egyszer használta, kivéve a 0-t, melyet egyszer sem. Legfeljebb hány prímszámot írhatott le Piroska?

3. Lili rajzolt egy lapra négy pontot, majd egymás után lemérte a pontpárok távolságát. Az első öt lemért távolság 10, 20, 30, 40 és 50 cm volt.
Mekkora a hatodik távolság lehetséges legnagyobb értéke?

4. a) Anna leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek összegét, valamint különbségét. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?
   b) Béla leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek szorzatát, valamint hányadosát. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?

5. Ali és Bori egy 4×4-es táblázat néhány mezőjét szeretné kifesteni pirosra úgy, hogy minden sorban és oszlopban legalább egy piros mező legyen. Ali szerint a lehetséges színezések száma páratlan, Bori szerint páros. Melyiküknek van igaza?
A táblázatot nem lehet elforgatni vagy tükrözni.

7. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Három testvér (Anna, Béla és Cili) kapott egy-egy egyforma tábla csokoládét. Miután megkapták, mindenki evett a csokijából: Anna 3 sort, Béla 1 sort, majd 3 oszlopot, Cili pedig 4 oszlopot evett meg. Ekkor észrevették, hogy mindegyikük csokijából ugyanannyi kocka fogyott.
   Hány kockából állt a teljes tábla csokoládé?

2. a) Van-e olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám háromszorosát kapjuk?

   b) Van-e olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám négyszeresét kapjuk?

3. Sára rajzolt két egyenlő szárú, de nem szabályos háromszöget úgy, hogy az első háromszög alapjának hossza megegyezik a második háromszög szárainak hosszával, valamint a második háromszög alapjának hossza megegyezik az első háromszög szárainak hosszával. Miután megrajzolta a két háromszöget, észrevette, hogy az első háromszög egyik szöge megegyezik a második háromszög egyik szögével. Mekkorák lehetnek a két háromszög szögei?

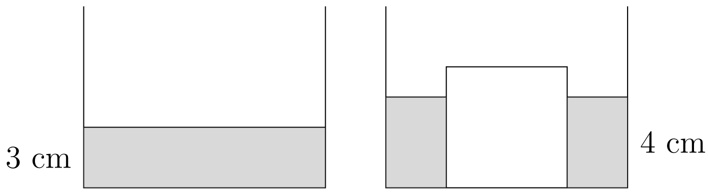
4. Gáspár beírta egy 7×7-es táblázatba az $1, 2, 3, \ldots, 49$ számokat úgy, hogy a szomszédos számok oldalszomszédos mezőkön legyenek. Ezután kiszínezte azokat mezőket, amelyekben 7-tel osztva 1 vagy 2 maradékot adó szám áll. Lehetséges-e, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan két mezőt színezett ki?

8. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Piroska leírt a füzetébe néhány prímszámot. Észrevette, hogy mindegyik számjegyet pontosan egyszer használta, kivéve a 0-t, melyet egyszer sem. Legfeljebb hány prímszámot írhatott le Piroska?

2. Egy pingpongbajnokságon 5 balkezes és 8 jobbkezes játékos vett részt, és mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszott. Ugyanannyi meccset nyert jobbkezes játékos, mint balkezes. Hányszor fordult elő, hogy egy balkezes megvert egy jobbkezest?

3. Van egy kisebb és egy nagyobb kockánk. A kisebb kockát teletöltöttük vízzel. Ezután az összes vizet áttöltöttük a nagyobb kockába (amely valamelyik lapján támaszkodva áll az asztalon), így a nagyobb kockában 3 cm magasan áll a víz. Ezután a kisebb kockát is beleraktuk a nagyobb kockába úgy, hogy annak az egyik lapja a nagyobb kocka aljához tapadjon, de a víz ne folyjon bele a kisebb kockába. Ennek hatására a nagyobb kockában 1 cm-rel megemelkedett a vízszint.
   Határozzuk meg a kockák élhosszúságait.



4. Ali és Bori egy 4×4-es táblázat néhány mezőjét szeretné kifesteni pirosra úgy, hogy minden sorban és oszlopban legalább egy piros mező legyen. Ali szerint a lehetséges színezések száma páratlan, Bori szerint páros. Melyiküknek van igaza?

   A táblázatot nem lehet elforgatni vagy tükrözni.

5. Az $ABCD$ konvex négyszögnek megrajzoltuk mind a négy belső szögfelelezőjét.
   Az A-nál levő szög belső szögfelezője a P pontban metszi a B-nél levő szög belső szögfelezőjét.
   A B-nél levő szög belső szögfelezője a Q pontban metszi a C-nél levő szög belső szögfelezőjét.
   A C-nél levő szög belső szögfelezője az R pontban metszi a D-nél levő szög belső szögfelezőjét.
   A D-nél levő szög belső szögfelezője az S pontban metszi az A-nál levő szög belső szögfelezőjét.
   Bizonyítsuk be, hogy ha az így keletkezett $PQRS$ négyszög rombusz, akkor négyzet is.

8. osztály, 2. nap **Országos döntő**

1. Melyik a nagyobb,

$$A = (1+2)^2 + (3+4)^2 + (5+6)^2 + \ldots + (2019+2020)^2 + (2021+2022)^2,$$

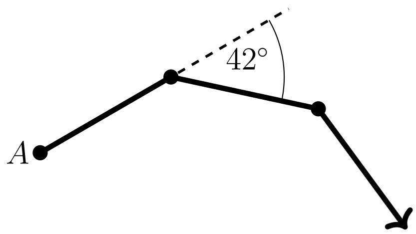
vagy

$$B = (2+3)^2 + (4+5)^2 + (6+7)^2 + \ldots + (2020+2021)^2 + (2022+1)^2?$$

2. Sára rajzolt két egyenlő szárú, de nem szabályos háromszöget úgy, hogy az első háromszög alapjának hossza megegyezik a második háromszög szárainak hosszával, valamint a második háromszög alapjának hossza megegyezik az első háromszög szárainak hosszával. Miután megrajzolta a két háromszöget, észrevette, hogy az első háromszög egyik szöge megegyezik a második háromszög egyik szögével. Mekkorák lehetnek a két háromszög szögei?

3. Egy csiga elindul az A pontból valamilyen irányba. Állandó nagyságú sebességgel, szakaszonként egyenesen halad, irányt csak minden egész órakor vált, ilyenkor 42 fokkal jobbra fordul.
Mennyi idő múlva ér először vissza az A pontba?

Az ábra a csiga mozgásának első 3 órájáról készült.



4. Egy 7×7-es táblázatba beírtuk az $1, 2, 3, \ldots, 49$ számokat úgy, hogy a szomszédos számok mindig oldalszomszédos mezőkön legyenek. Lehetséges-e, hogy ha 7-tel maradékosan osztjuk a beírt számokat, akkor minden sorban és minden oszlopban szerepel mind a hétféle maradék?

Megoldások

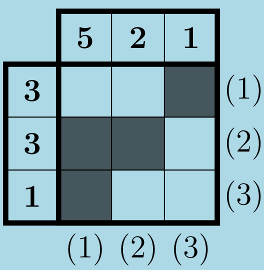
1. a) Írd fel a 2022-t egy négyjegyű, egy háromjegyű és egy kétjegyű szám összegeként úgy, hogy a három összeadandó kilenc számjegye között pontosan háromféle számjegy forduljon elő.
b) Írd fel a 2022-t egy négyjegyű, egy háromjegyű és egy kétjegyű szám összegeként úgy, hogy a három összeadandó kilenc számjegye mind különböző legyen.
Elegendő egy-egy megoldást megadni; nem kell az összes lehetőséget megkeresni, sem azt leírni, hogy hogyan találtad ezt a megoldást.

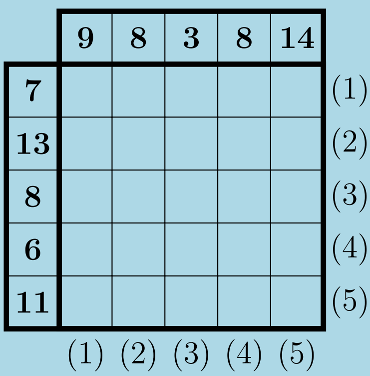
a) $1900 + 111 + 11 = 2022$ (az előforduló számjegyek a nulla, az egy és a kilenc)

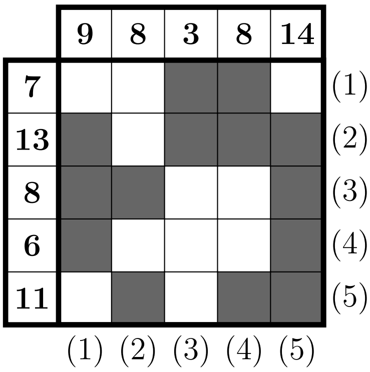
b) $1278 + 694 + 50 = 2022$ (a kimaradó számjegy a hármas)

Megjegyzés. Mindkét részfeladatra sokféle helyes konstrukció adható. A b) résznél ugyanakkor minden megoldásban a 3-as számjegynek kell kimaradnia (ez abból következik, hogy egy szám 9-es maradéka megegyezik a számjegyeinek összegének 9-es maradékával, a részletek meggondolását a kedves Olvasóra bízzuk).

2. A Bergengóc Titkosszolgálat egy újfajta titkosítást fejleszt ki, melyben egy szürke és fehér mezőkből álló táblázatot akarnak kódolni. A kódolás módja a következő: minden sor elejére odaírják a sorban szereplő szürke mezők oszlopszámainak összegét, az oszlopok tetejére pedig a benne szereplő szürke mezők sorszámainak összegét. A bal oldali ábrán egy 3×3-as táblázat titkosítása látható, a zárójelben írt számok a sor- és oszlopszámokat jelölik.
A titkosszolgálat most egy 5×5-ös táblát kapott kódolva, ez látható a jobb oldali ábrán.
Melyik mezők voltak szürkére festve a táblázatban?
A teljes pontszámhoz elegendő egy jól kitöltött táblázatot megadni, indoklás nem szükséges.







3. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre az alábbi négy közül pontosan két állítás igaz?

- A szám ezresekre kerekítve 0.
- A szám tízesekre kerekítve 280.
- A szám százasokra kerekítve 100.
- A szám százasokra kerekítve 300.

Első megoldás. Először nézzük meg, hogy a négy állítás külön-külön melyik számtartományban igaz.

- A szám ezresekre kerekítve 0: $1 \leq x < 500$
- A szám százasokra kerekítve 100: $50 \leq x < 150$
- A szám tízesekre kerekítve 280: $275 \leq x < 285$
- A szám százasokra kerekítve 300: $250 \leq x < 350$

Az első állítás nem lehet hamis, mert akkor az összes többi is hamis lenne.

Ha a harmadik állítás igaz, akkor a negyedik is, mert $250 < 275 < 285 < 350$.

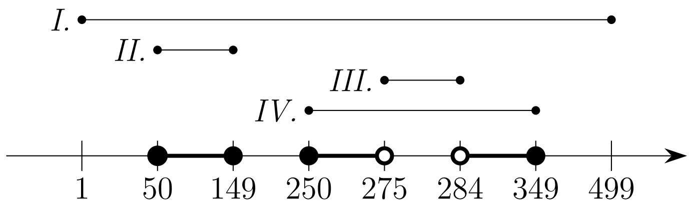
Tehát csak úgy lehet a négy állítás közül pontosan kettő igaz, ha a két igaz állítás az első és a második, vagy az első és a negyedik.

Ha az első két állítás az igaz, akkor $50 \leq x < 150$ és ebből következik, hogy az utolsó két állítás hamis, mert azok csak nagyobb számokra igazak. Ez pontosan 100 szám.

Ha az első és a negyedik állítás az igaz, akkor a második biztosan hamis, mert az kisebb számokra igaz. Arra viszont nekünk kell ügyelni, hogy a harmadik állítás is hamis legyen. 250 és 350 közé megint csak száz szám esik, de ezek közül nem jók azok, amelyek 275 és 285 közé esnek, ezért 10-zel kevesebb, összesen 90 jó számot találtunk ebben az esetben ($250 \leq x < 275$ vagy $285 \leq y < 350$).

A két esetben kapott számok között nincs átfedés, így összesen $100 + 90 = 190$ olyan pozitív egész létezik, amelyre a felsorolt négy állítás közül pontosan kettő igaz.

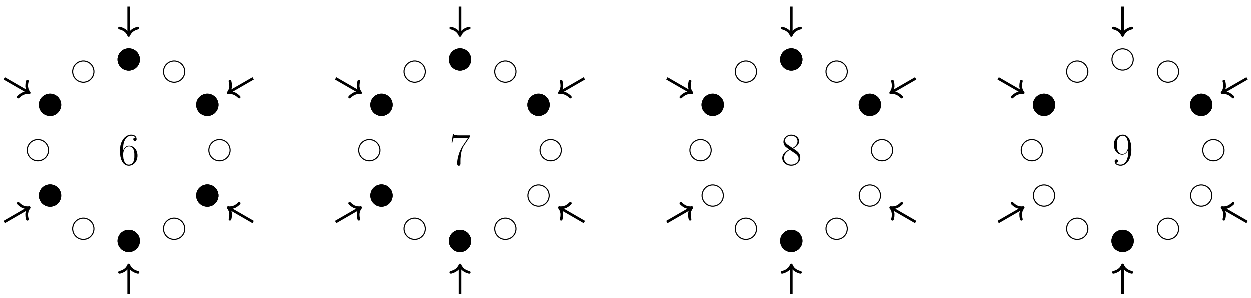
Második megoldás. Ábrázoljuk számegyenesen, hogy az egyes állítások mely pozitív egészek esetén igazak.



Látható, hogy pontosan két állítás akkor teljesül az x számra, ha $50 \leq x \leq 149$ vagy $250 \leq x < 275$ vagy $284 < x \leq 349$. Az első esetnek 100 darab, a másodiknak 25 darab, a harmadiknak 65 darab pozitív egész felel meg. Tehát összesen 190 olyan pozitív egész van, amelyre pontosan két állítás igaz.

4. Egy asztal körül 12 gyerek ül, mindegyikük sárga vagy kék pólóban van. Az asztal körül ülők közül pontosan 6 gyerekre teljesül, hogy mindkét szomszédja sárga pólóban van. Összesen hány sárga pólós ülhet az asztal körül?
Mutass példát minél többféle értékre és indokold meg, hogy más érték miért nem lehetséges.

A sárga pólósok lehetséges száma 6, 7, 8 vagy 9, íme egy-egy példa:

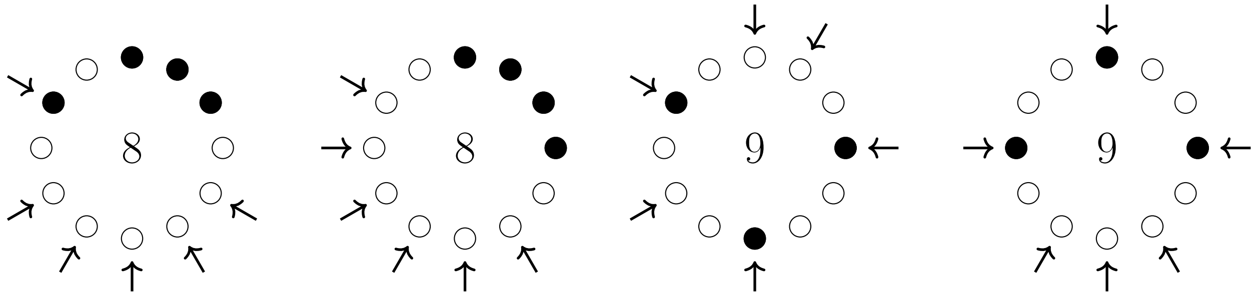


(Teli karika jelenti a kék pólós, az üres karika a sárga pólós gyerekeket. A nyilak azokra mutatnak, akiknek mindkét szomszédjuk sárga.)

Más érték nem lehetséges, mivel sem 6-nál kevesebb, sem 9-nél több nem lehet a sárga pólós gyerekek száma. Ez például a következő módon látható be:

- Ha azokat a gyerekeket nézzük, akiknek mindkét szomszédja sárga pólós, akkor az ő baloldali szomszédaik különböző sárga pólós gyerekek. Tehát legalább 6 sárga pólós gyerek van.
  Alternatív indoklás: Ahhoz, hogy 6 gyereknek mindkét szomszédja sárga legyen, kell $6 \cdot 2 = 12$ sárga szomszéd; de minden sárga pólós legfeljebb két gyereknek lehet a sárga szomszédja, ezért kell legalább 6 sárga pólós gyerek.
- Ha mindenki sárga pólós lenne, akkor 12 gyereknek lenne mindkét szomszédja sárga pólós.
  Amikor egy sárga pólót kékre cserélünk, akkor a két sárga szomszéddal rendelkező gyerekek száma legfeljebb kettővel csökken. Tehát legalább 3 kék pólós gyerek kell, így a sárga pólósok legnagyobb lehetséges száma 9.

Megjegyzés. 8, illetve 9 sárga pólós gyerek esetén más jó elrendezések is léteznek, például:

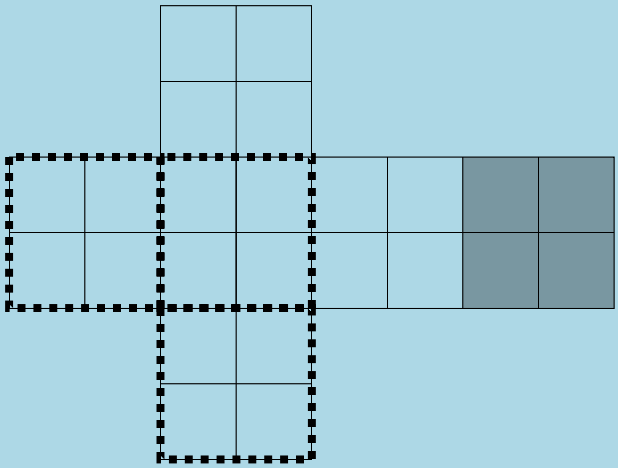


Az pedig bizonyítható, hogy 6, illetve 7 sárga póló esetén csak a fent bemutatott elrendezések – és elforgatottjaik – működnek.

5. Laci nyolc egyforma méretű szabályos dobókockából egy nagyobb kockát épít, majd leteszi az asztalra. Peti ránéz elölről, balról és felülről, majd megállapítja, hogy az így látott tizenkét szám összege 66. Neki is lát, hogy lerajzolja a nagy kocka hálóját, mely az alábbi ábrán látható (a számokat egyelőre még nem írta be). Szaggatott vonallal be is keretezte azt a három lapot, melyeket az előbb megnézett.
Mekkora lehet az asztalon fekvő (az ábrán szürke hátterű) lapokon szereplő négy szám összegének

a) legkisebb lehetséges értéke? b) legnagyobb lehetséges értéke?

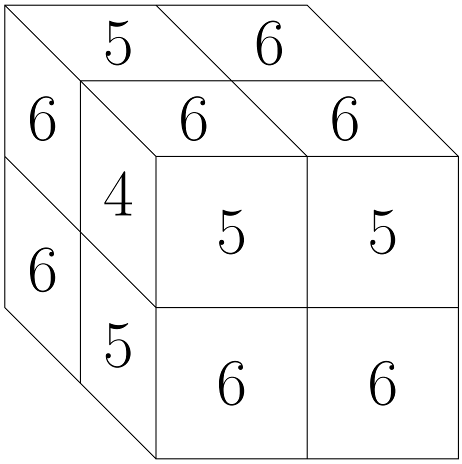
A teljes pontszám eléréséhez egyrészt példákat kell adnod a legkisebb és a legnagyobb lehetséges értékre – azt is megadva, hogy melyik szám hol található a nagy kockán –, másrészt azt is indokolnod kell, hogy még kisebb, illetve még nagyobb összeg miért nem érhető el.
A szabályos dobókockán a szemben lévő lapokon látható számok összege 7.

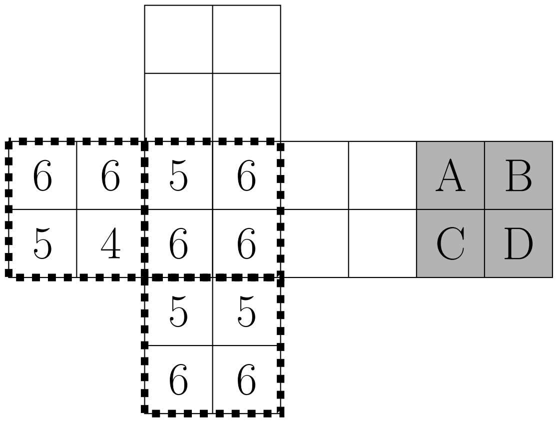


A tizenkét látott dobókockalapon összesen 66 a számok összege. Ez csak úgy lehetséges, ha minden kis dobókockán a lehető legnagyobb számokat látjuk.

- Ha egy dobókockának egy lapja látszik, akkor ez a 6 (3 lap a 12-ből).
- Ha két lapja látszik, akkor az egyik 5 és a másik 6 ($3 + 3$ lap a 12-ből).
- Végül ha három lapja, akkor ezeken egy 4, egy 5 és egy 6 látható ($1 + 1 + 1$ lap a 12-ből).

Ez így összesen $3 \cdot 6 + 3 \cdot (5+6) + 1 \cdot (4+5+6) = 66$, vagyis tényleg csak így jöhet ki a 66, minden más esetben kevesebbet kapnánk.

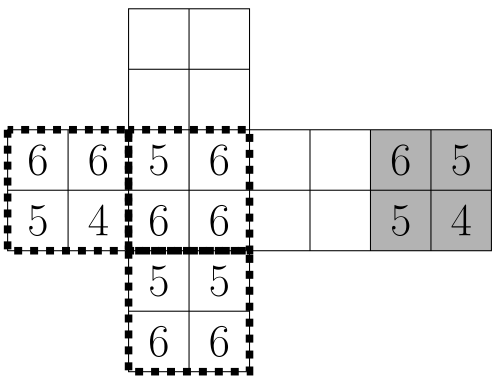




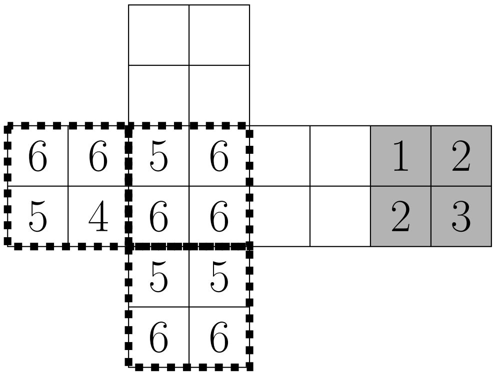
A szürke lapok a felső nagy lappal vannak szemben, ezek éppen az alsó (az asztalappal érintkező) dobókockalapok.

- Az alsó rétegben van egy dobókocka, amelyből semmi nem látszik, ennek bármelyik lapja érintkezhet az asztallal – tehát az ábrán A-val jelölt szürke dobókockalapon szerepelhet bármi.
- Van két alsó dobókocka, amelyekből csak egy hatos látszik. A hatossal szemközt egyes van, amely nem érhet az asztalhoz, ezért a szürke oldalukon – az ábrán B és C jelű dobókockalapokon – 2, 3, 4 vagy 5 állhat.
- Végül van egy alsó dobókocka, amelyből az 5 és 6 számok látszanak, ezért a velük szemben lévő 2 és 1 nem érhet az asztallaphoz. Marad – az ábrán D jelű – szürke lapnak a 3 vagy a 4.

Az eddigiek alapján a szürke lapon szereplő számok összegének maximuma $6+5+5+4 = 20$. Ez tényleg meg is valósítható, például úgy, ha az ábrán látható módon szerepelnek a számok a szürke lapokon:



A szürke lapon szereplő számok összegének minimuma $1+2+2+3=8$. Ez is megvalósítható, például így:



6. osztály — Megyei forduló

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre az alábbi négy közül pontosan 2 állítás igaz?
   - A szám ezresekre kerekítve 0.
   - A szám százasokra kerekítve 100.
   - A szám tízesekre kerekítve 470.
   - A szám százasokra kerekítve 500.

Első megoldás. Írjuk fel, hogy melyik állítás milyen számtartományban teljesül és egyben jelöljük betűkkel az állításokat.

A: $1 \leq x < 500$, B: $50 \leq x < 150$, C: $465 \leq x < 475$ és D: $450 \leq x < 550$.

Ha egy számra A hamis, akkor B és C is hamis, tehát a megfelelő számokra A igaz (különben több, mint két hamis állítás lenne).

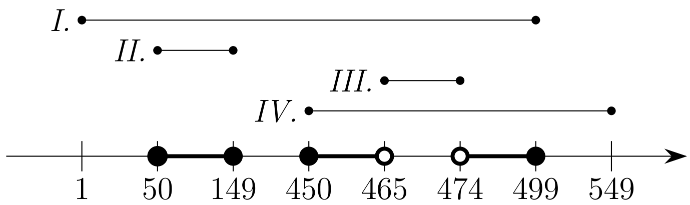
Ha egy számra C igaz, akkor D is igaz. Ezért csak olyan szám felel meg a feltételeknek, amelyre C hamis (különben több, mint két állítás lenne igaz, hiszen A már biztosan igaz).

Két lehetőség maradt:

- A és B igaz, C és D hamis. Ezek éppen az $50 \leq x < 150$ számok, 100 van belőlük.
- A és D igaz, B és C hamis. A és D egyszerre a $450 \leq x < 500$ számokra teljesül, de ezek közül el kell hagynunk azokat, amelyekre C igaz. Tehát az ilyen számokra $450 \leq x < 465$ vagy $475 \leq x < 500$. Ez összesen $15 + 25 = 40$ szám.

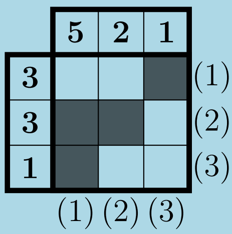
A két esetben kapott számok között nincs átfedés, így összesen $100 + 40 = 140$ szám teljesíti a feladat feltételeit.

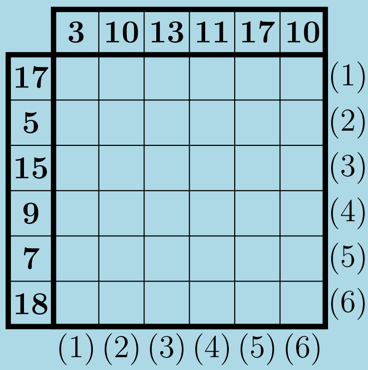
Második megoldás. Ábrázoljuk számegyenesen, hogy az egyes állítások mely pozitív egészek esetén igazak.

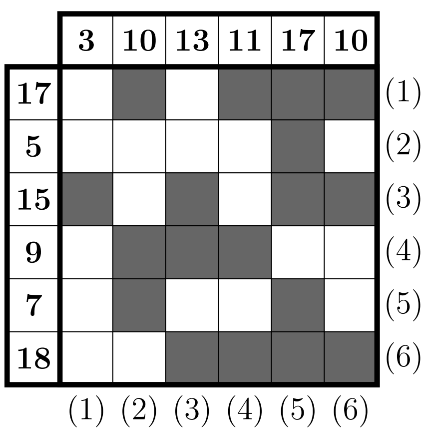


Látható, hogy pontosan két állítás akkor teljesül az x számra, ha $50 \leq x \leq 149$ vagy $450 \leq x < 465$ vagy $474 < x \leq 499$. Az első esetnek 100 darab, a másodiknak 15 darab, a harmadiknak 25 darab pozitív egész felel meg. Tehát összesen 140 olyan pozitív egész van, amelyre pontosan két állítás igaz.

2. A bergengóc titkosszolgálat egy újfajta titkosítást fejleszt ki, melyben egy szürke és fehér mezőkből álló táblázatot akarnak kódolni. A kódolás módja a következő: minden sor elejére odaírják a sorban szereplő szürke mezők oszlopszámainak összegét, az oszlopok tetejére pedig a benne szereplő szürke mezők sorszámainak összegét.
A bal oldali ábrán egy 3×3-as táblázat titkosítása látható, a zárójelben írt számok a sor- és oszlopszámokat jelölik.
A titkosszolgálat most egy 6×6-ös táblát kapott kódolva, ez látható a jobb oldali ábrán. Melyik mezők voltak szürkére festve a táblázatban? (Indoklás nem szükséges.)







3. Felírtuk az összes olyan római számot, amelyben az M, D, C, L, X, V, I betűk mindegyike pontosan egyszer szerepel. Mennyi az így felírt számok összege?
Emlékeztetőül, az egyes betűk értéke: M=1000, D=500, C=100, L=50, X=10, V=5, I=1.

Táblázatba foglaljuk a lehetséges eseteket.

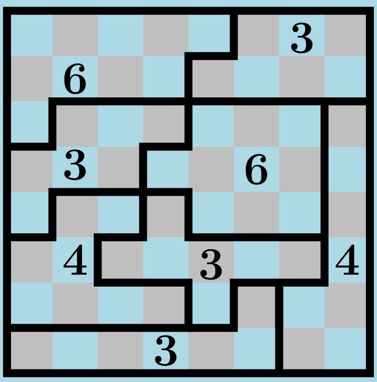
ezresek	százasok	tízesek	egyesek	érték
M	DC	LX	VI	$1000 + 600 + 60 + 6 = 1666$
M	DC	LX	IV	$1000 + 600 + 60 + 4 = 1664$
M	DC	XL	VI	$1000 + 600 + 40 + 6 = 1646$
M	DC	XL	IV	$1000 + 600 + 40 + 4 = 1644$
M	CD	LX	VI	$1000 + 400 + 60 + 6 = 1466$
M	CD	LX	IV	$1000 + 400 + 60 + 4 = 1464$
M	CD	XL	VI	$1000 + 400 + 40 + 6 = 1446$
M	CD	XL	IV	$1000 + 400 + 40 + 4 = 1444$

Más lehetőség nincs. Az M nem állhat a százasoknál, mert akkor C meg kellene, hogy előzze, de úgy D-nek nem marad hely. Hasonlóan C nem állhat a tízeseknél, mert akkor X megelőzi, de úgy L-nek nem marad jó pozíció. Hasonlóan X sem állhat az egyeseket leíró csoportban.

A nyolc szám összege 12440.

Megjegyzés. Az összegzés egyszerűsíthető, ha észrevesszük, hogy van nyolc darab ezresünk és a százasok négy ezres csoportba oszthatók, majd a tízesek négy százas csoportba oszthatók végül az egyesek négy tízes csoportba oszthatók. Tehát az összeg $8000 + 4000 + 400 + 40 = 12440$.

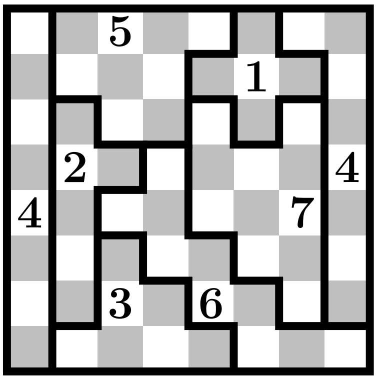
4. Ricsi szétvágta a sakktábláját rácsvonalak mentén, méghozzá úgy, hogy a keletkező összefüggő darabok mindegyikébe pontosan 4 sötét mező esett. Ezután minden darabra ráírta, hogy hány világos mező szerepel benne. Legfeljebb hány különböző számot írhatott így a darabokra?
A teljes pontszámhoz példát kell mutatnod szétvágásra a lehető legtöbb különböző értékkel, és indokolnod kell azt is, hogy miért ez a legtöbb.



Ricsi egy hagyományos, azaz 8×8-as méretű sakktáblát vágott szét.
Egy darabot akkor nevezünk összefüggőnek, ha bármelyik mezőjéről el lehet jutni bármelyik másik mezőjére úgy, hogy menet közben csak élszomszédos mezőkre lépünk.
Az ábrán egy lehetséges szétvágás látható, amelynél 3-féle értéket (3, 4, 6) írt a darabokra Ricsi.

Legfeljebb hét különböző számot írhatott Ricsi a darabokra. Ez azért igaz, mert legalább egy fehér mező minden darabhoz tartozik (fekete mezők sosem élszomszédosak), és nyolc különböző érték esetén legalább $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$ fehér mezőre lenne szükség, de csak 32 van.

Megadunk egy példát, ahol hét különböző szám van felírva a darabokra.



5. Egy asztal körül 12 ember ül, mindegyikük igazmondó vagy hazudós. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak.
Körben mindannyian a következőt mondják: ,,Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”. Ezután mindenki feláll, majd véletlenszerű sorrendben visszaül az asztalhoz.
Ha a helycsere után megkérdezzük mindenkitől, hogy ,,Igaz-e most, hogy egy igazmondó és egy hazudós között ülsz?”, akkor legkevesebb hány ,,Igen” választ kaphatunk?

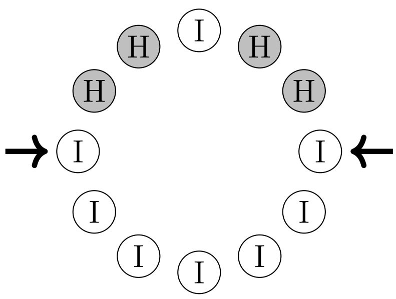
Jelölje I az igazmondókat és H a hazudósokat. Egy igazmondó akkor mondhatta, hogy ,,Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”, ha ez tényleg így van. Egy hazudós pedig akkor, ha mindkét szomszédja igazmondó, vagy mindkettő hazudós.

Ha mindenki hazudós, akkor helycsere után 12 ,,Igen” választ fogunk kapni.

Ha nem mindenki hazudós, akkor van legalább egy igazmondó, akinek legalább egyik szomszédja hazudós. $IH\ldots$ Ekkor a szomszédos hazudós következő szomszédja csak igazmondó lehet, és ennek a igazmondónak a következő szomszédja megint csak igazmondó: $IHII\ldots$ Most megint hazudós következik, és a kör csak egyféle módon fejezhető be: $IHIIHIIHIIHI$. Azaz ebben az esetben 8 igazmondó és 4 hazudós van.

Ekkor helycsere után is biztosan lesz egy legalább két, egymás mellett ülő igazmondóból álló szakasz. Ennek a szakasznak a két szélén ülő egy-egy igazmondó biztosan egy igazmondó és egy hazudós között fog ülni, tehát ,,Igen” választ fog adni a kérdésre. Így biztosan lesz legalább két ,,Igen”.

Elérhető, hogy csak két ,,Igen” legyen, például az alábbi elrendezéssel a helycsere után:



Ebben az elrendezésben a két nyíllal megjelölt igazmondó igennel válaszol a kérdésre, mindenki más pedig nemmel.

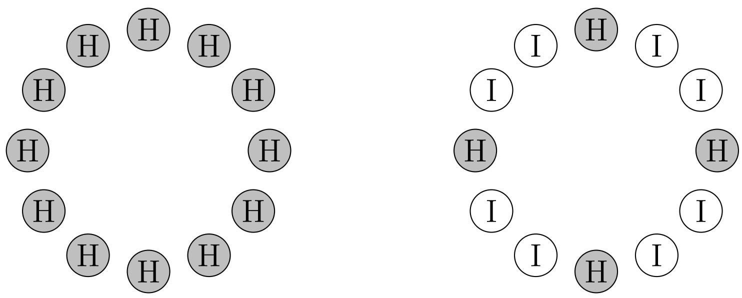
1. Egy asztal körül 12 ember ül, mindegyikük igazmondó vagy hazudós. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak.
Körben mindannyian a következőt mondják: ,,Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”. Ha megkérdezzük mindenkitől, hogy ,,Igaz-e, hogy valamelyik szomszédod igazmondó?”, hány ,,Igen” választ kaphatunk?

Jelölje I az igazmondókat és H a hazudósokat. Egy igazmondó akkor mondhatta, hogy ,,Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”, ha ez tényleg így van. Egy hazudós pedig akkor, ha mindkét szomszédja igazmondó, vagy mindkettő hazudós. Ezek alapján csupán két lehetőség van az ülésrendre.

- Lehetséges, hogy mindenki hazudós.
- Ha nem mindenki hazudós, akkor van legalább egy igazmondó. Ennek az igazmondónak pontosan az egyik szomszédja hazudós (hiszen igazat mond). $IH\ldots$

  Ekkor a szomszédos hazudós következő szomszédja csak igazmondó lehet, és ennek a igazmondónak a következő szomszédja megint csak igazmondó: $IHII\ldots$

  Most megint hazudós következik, és a kör csak egyféle módon fejezhető be.



Most mindenkitől azt kérdezzük, ,,Igaz-e, hogy valamelyik szomszédod igazmondó?”, amire az első elrendezésben minden hazudós igennel válaszol. Ez 12 igen.

A második elrendezésben a igazmondók igennel, a hazudósak nemmel válaszolnak, ez 8 igen.

Tehát az igenek lehetséges száma 8 vagy 12.

2. Egy hosszú, egyenes országút egy szakaszával párhuzamosan halad egy nagyfeszültségű elektromos távvezeték. A vezetéket egyenlő távolságközökkel elhelyezett villanyoszlopok tartják, melyek sorban meg is vannak számozva. Az 1-es számú pózna éppen a 16-as kilométerkőnél helyezkedik el, a 225-ös számú pózna pedig a 100-as kilométerkőnél.
Érdekes módon van egy olyan villanyoszlop, amely éppen a vele azonos számú kilométerkőnél áll. Hányas számú oszlopról van szó?

A két kilométerkő közötti $100 - 16 = 84$ km távolságot $225 - 1 = 224$ egyenlő szakaszra tagolják a póznák, ezért egy szakasz hossza kilométerben mérve $\dfrac{84}{224} = \dfrac{3}{8}$.

Legyen a feladatban említett különleges pózna sorszáma k. Kétféleképpen is felírhatjuk ennek a póznának az 1-es póznától mért távolságát, amiből a következő egyenletet kapjuk:

$$(k-1)\cdot\frac{3}{8}=k-16$$

Az egyenlet bal oldala a póznák közti egyenlő távolságokkal fejezi ki a távolságot, a jobb oldal pedig kilométerben, a kilométerkövek alapján.

Az egyenletet megoldva:

$$(k-1)\cdot\frac{3}{8}=k-16 \quad\Rightarrow\quad 3k-3=8k-128 \quad\Rightarrow\quad 125=5k \quad\Rightarrow\quad 25=k$$

Tehát a 25-ös számú oszlopról van szó.

3. Egy pozitív egész számot *egyhangú*nak nevezünk, ha a számjegyeinek több, mint fele egyforma. Például a 2022, a 100, a 33 és a 7 mind egyhangúak; de a 2021 és 2020 egyike sem egyhangú.
Hány 2022-nél kisebb egyhangú pozitív egész szám van?

Felsoroljuk a lehetséges eseteket.

- Minden egyjegyű $\overline{a}$ szám jó. Ez $\boxed{9}$ eset.
- A kétjegyű számok közül azok jók, amelyeknek a két jegye azonos ($\overline{aa}$). Ez is $\boxed{9}$ eset.
- A háromjegyű számok közül az $\overline{aaa}$, $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ és $\overline{baa}$ alakúak felenek meg. Ez rendre $\boxed{9}$, $\boxed{81}$, $\boxed{81}$ és $\boxed{81}$ eset. (Az első jegy nem lehet nulla, továbbá a és b különböznek.)
- A négyjegyű számok közül az $\overline{aaaa}$, $\overline{aaab}$, $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$ és $\overline{baaa}$ alakúak felenek meg, de ezek közül csak azok, amelyek kisebbek 2022-nél.
  - Csupa egyenlő jegy csak az 1 lehet. Ez $\boxed{1}$ eset.
  - Az $\overline{aaab}$, $\overline{aaba}$ és $\overline{abaa}$ esetekben a csak 1 lehet, b pedig kilenc féle. Ez rendre $\boxed{9}$, $\boxed{9}$ és $\boxed{9}$ lehetőség.
  - Végül a $\overline{baaa}$ esetben vagy $b=1$ és akkor a-ra $\boxed{9}$ lehetőség marad, vagy $b=2$ és akkor a csak nulla lehet, ez $\boxed{1}$ eset.

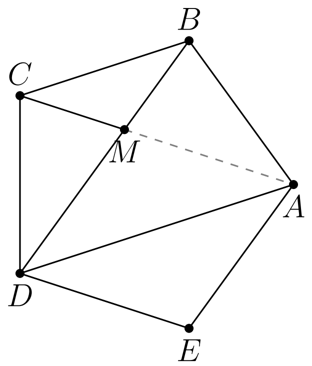
Összesen $9+9+9+81+81+81+1+9+9+9+9+1=\boxed{308}$ egyhangú, 2022-nél kisebb szám van.

4. Bonts fel

a) egy szabályos ötszöget b) egy négyzetet

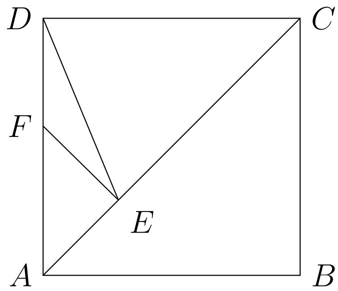
négy darab, páronként nem egybevágó egyenlőszárú háromszögre, és határozd meg a felbontásban szereplő egyenlőszárú háromszögek szögeit.

a) Az $ABCDE$ szabályos ötszög AC és BD átlójának metszéspontja legyen M. Az ábrán látható DAE, ADB, DMC és BCM háromszögek páronként nem egybevágóak, és mindegyik egyenlőszárú.



ADE és BCM szögei 36°, 36° és 108°, ADB és CMD szögei 72°, 72° és 36°.

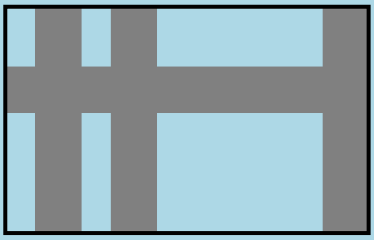
b) Az ábrán látható felbontás így kapható: a négyzet egyik átlójára (AC) rámérjük a négyzet oldalát ($CD = CE$), majd az átlón kapott (E) pontban merőlegest állítunk az átlóra (EF).



Kiszámoljuk a kapott háromszögek szögeit és ezzel igazoljuk a felbontás helyességét is.

- ABC egyenlő szárú és derékszögő, ezért belső szögei 45°, 90° és 45°.
  Így $EAF\sphericalangle$ is 45°, $AEF\sphericalangle = 90°$ (így vettük fel), következésképpen $AFE\sphericalangle = 45°$. Tehát AEF is egyenlőszárú és derékszögű. Mivel az átfogója rövidebb, nem lehet egybevágó ABC háromszöggel.
- $CD = CE$, ezért mivel $DCE\sphericalangle = 45°$, így $CDE\sphericalangle = DEC\sphericalangle = 135°/2 = 67{,}5°$.
- Végül a DEF háromszög szögei kivonásokkal kaphatók meg: $FDE\sphericalangle = 90° - EDC\sphericalangle = 22{,}5°$, $DFE\sphericalangle = 180° - 45° = 135°$ és $DEF\sphericalangle = 180° - (135° + 22{,}5°) = 22{,}5°$.
  Tehát DEF is valóban egyenlő szárú.

5. A Bergengóc Abroszgyárban kizárólag olyan asztalterítőket készítenek, amelyek téglalap alakúak, és fehér alapon szürke sávokkal vannak tagolva. Minden szürke sáv párhuzamos a téglalap valamelyik oldalával és pontosan 3 cm széles. A 2022 tavaszi kollekcióban ráadásul csupa olyan modellt dobtak piacra, amelynek területe pontosan fele részben szürke és fele részben fehér.
Az ábrán a kollekció legkisebb, 24 cm × 15 cm-es méretű modelljének méretarányos rajza látható.



Szerepelhet-e a 2022 tavaszi kollekcióban olyan asztalterítő, amelynek mérete:

a) 195 cm × 200 cm b) 200 cm × 205 cm?

A párhuzamos szürke sávok között mindig maradnia kell fehér résznek, de ennek szélessége lehet akármilyen kicsi, akár 1 cm-nél kisebb is.

a) Ilyen asztalterítő szerepelhet a kollekcióban: megfelel, ha 13 vízszintes és 25 függőleges sávot használunk. Ez esetben a sávoknak van elég hely, hiszen $13 \cdot 3 < 195$ és $25 \cdot 3 < 200$. A szürke rész területe pedig

$$\underbrace{13 \cdot 3 \cdot 200}_{\text{vízszintes sávok}} + \underbrace{25 \cdot 3 \cdot 195}_{\text{függőleges sávok}} - \underbrace{13 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{kétszeresen fedett rész}} = 7800 + 14625 - 2925 = 19500 \text{ cm}^2,$$

amely valóban a teljes terület fele.

b) Egy vízszintes és egy függőleges sáv is olyan egész oldalhosszúságú téglalapot fed le az eredeti téglalapból, amelynél az egyik oldal hossza centiméterben mérve hárommal osztható. Egy-egy vízszintes és függőleges sáv közös része pedig mindig egy 3 cm × 3 cm-es négyzet. Ezért a sávok által lefedett terület négyzetcentiméterben mérve mindig 3-mal osztható. A 200 cm × 205 cm méretű terítő területének fele 20500 cm^2, ez nem osztható hárommal, ezért ilyen darab nem szerepelhet a kollekcióban.

Megjegyzés. Az (a) változatban a 13 vízszintes és 25 függőleges sáv az egyetlen lehetséges megoldás. Tegyük fel ugyanis, hogy x darab vízszintes és y darab függőleges sávot használunk. Ekkor a fehér terület átrendezhető egy $(195 - 3x)$ cm × $(200 - 3y)$ cm-es téglalappá. Tehát

$$(195 - 3x)(200 - 3y) = 19500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 13,$$

ahol a bal oldalon mindkét tényező pozitív egész. Hárommal osztva az első tényező 0, míg a második 2 maradékot ad. Mindkettő legfeljebb 200, és legalább 98. A lehetőségeket megvizsgálva csak a $156 \cdot 125$ szorzat a megfelelő, amiből $x = 13$ és $y = 25$.

1. Egy hosszú, egyenes országút egy szakaszával párhuzamosan halad egy nagyfeszültségű elektromos távvezeték. A vezetéket egyenlő távolságközökkel elhelyezett villanyoszlopok tartják, melyek sorban meg is vannak számozva. Az 1-es számú pózna éppen a 16-as kilométerkőnél helyezkedik el, a 225-ös számú pózna pedig a 100-as kilométerkőnél.
Érdekes módon van egy olyan villanyoszlop, amely éppen a vele azonos számú kilométerkőnél áll. Hányas számú oszlopról van szó?

A két kilométerkő közötti $100 - 16 = 84$ km távolságot $225 - 1 = 224$ egyenlő szakaszra tagolják a póznák, ezért egy szakasz hossza kilométerben mérve $\frac{84}{224} = \frac{3}{8}$.

Legyen a feladatban említett különleges pózna sorszáma k. Kétféleképpen is felírhatjuk ennek a póznának az 1-es póznától mért távolságát, amiből a következő egyenletet kapjuk:

$$(k-1) \cdot \frac{3}{8} = k - 16$$

Az egyenlet bal oldala a póznák közti egyenlő távolságokkal fejezi ki a távolságot, a jobb oldal pedig kilométerben, a kilométerkövek alapján.

Az egyenletet megoldva:

$$(k-1) \cdot \frac{3}{8} = k - 16 \quad \Rightarrow \quad 3k - 3 = 8k - 128 \quad \Rightarrow \quad 125 = 5k \quad \Rightarrow \quad 25 = k$$

Tehát a 25-ös számú oszlopról van szó.

2. Hány olyan háromjegyű szám van, amely nem tartalmaz 9-es számjegyet, és a számjegyeinek összege páros?

Első megoldás. A számjegyek paritása szerint csoportosítva a megfelelő számokat négy esetet különböztethetünk meg.

- *páros - páros - páros*: A százasok helyén nem állhat nulla, ezért ez összesen $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ szám.
- *páros - páratlan - páratlan*: Mivel 9-es számjegy nem megengedett, csak négy páratlan jegyből választhatunk. Az esetek száma $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
- *páratlan - páros - páratlan*: $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ szám.
- *páratlan - páratlan - páros*: $4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$ szám.

Az eseteket összeszámolva azt kapjuk, hogy $100 + 64 + 80 + 80 = 324$ háromjegyű szám felel meg a feladat feltételeinek.

Második megoldás. Először megszámoljuk a 9-es számjegyet nem tartalmazó háromjegyű számokat. Ilyenből $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ van, hiszen az első helyen nem állhat 0 és 9, a másik két helyen nem állhat 9.

A kilencest nem tartalmazó számokat párokba rendezhetjük úgy, hogy az $\overline{abc}$ szám párja a $\overline{(9-a)bc}$ (például 546 párja 446). Mivel $9 - a$ nem lehet egyenlő a-val, a párok elemei különböznek, továbbá minden szám pontosan egy párban szerepel. Az is igaz, hogy $1 \leq a \leq 8$ miatt $1 \leq 9-a \leq 8$.

a és $9-a$ paritása ellentétes, ezért minden párban pontosan az egyik tagra igaz, hogy számjegyei összege páros.

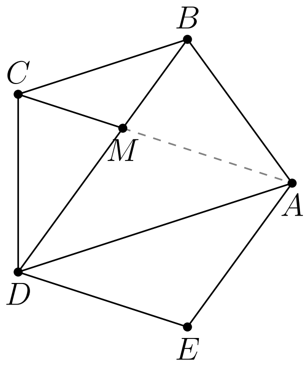
Tehát a fent említett 648 háromjegyű számnak éppen a fele megfelelő, ez 324 szám.

3. Bonts fel

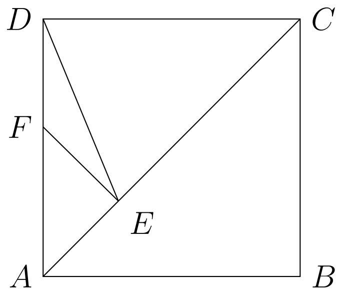
a) egy szabályos ötszöget b) egy négyzetet

négy darab, páronként nem egybevágó egyenlőszárú háromszögre, és határozd meg a felbontásban szereplő egyenlőszárú háromszögek szögeit.

a) Az $ABCDE$ szabályos ötszög AC és BD átlójának metszéspontja legyen M. Az ábrán látható DAE, ADB, DMC és BCM háromszögek páronként nem egybevágóak, és mindegyik egyenlőszárú.
ADE és BCM szögei 36°, 36° és 108°.
ADB és CMD szögei 72°, 72° és 36°.



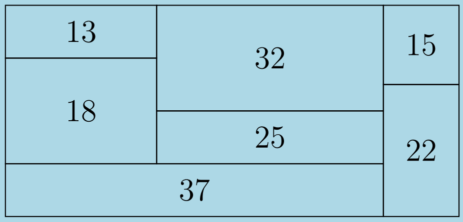
b) Az ábrán látható felbontás így kapható: a négyzet egyik átlójára (AC) rámérjük a négyzet oldalát ($CD = CE$), majd az átlón kapott (E) pontban merőlegest állítunk az átlóra (EF).



Kiszámoljuk a kapott háromszögek szögeit és ezzel igazoljuk a felbontás helyességét is.

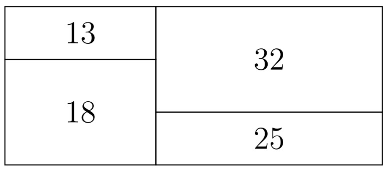
- ABC egyenlő szárú és derékszögő, ezért belső szögei 45°, 90° és 45°.
  Így $EAF\sphericalangle$ is 45°, $AEF\sphericalangle = 90°$ (így vettük fel), következésképpen $AFE\sphericalangle = 45°$. Tehát AEF is egyenlőszárú és derékszögű. Mivel az átfogója rövidebb, nem lehet egybevágó ABC háromszöggel.
- $CD = CE$, ezért mivel $DCE\sphericalangle = 45°$, így $CDE\sphericalangle = DEC\sphericalangle = 135°/2 = 67{,}5°$.
- Végül a DEF háromszög szögei kivonásokkal kaphatók meg: $FDE\sphericalangle = 90° - EDC\sphericalangle = 22{,}5°$, $DFE\sphericalangle = 180° - 45° = 135°$ és $DEF\sphericalangle = 180° - (135° + 22{,}5°) = 22{,}5°$.
  Tehát DEF is valóban egyenlő szárú.

4. Egy nagy téglalapot felosztottunk kisebb téglalapokra, és a felosztásról egy **nem méretarányos** ábrát is készítettünk:



Minden kis téglalapra ráírtuk a **kerület**ét. Lehet-e a nagy téglalap kerülete több, mint 60 egység?

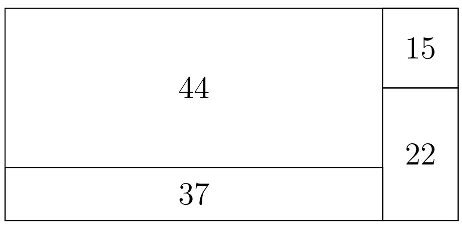
Először vizsgáljuk meg a bal felső sarokban elhelyezkedő, négy részre vágott téglalap kerületét.



Mind a négy kis téglalap egy vízszintes és egy függőleges oldalával, azaz a kerülete felével vesz részt a négy részre vágott téglalap kerületében. (Másképpen: A négy kis téglalap oldalai együttesen lefedik a nagy téglalap kerületét, továbbá a „belső” oldalak még egyszer kiadják a teljes kerületet.)

Ezért $13 + 18 + 32 + 25 = 88$ a négy részre vágott téglalap kerületének duplája. A négy részre vágott téglalap kerülete tehát 44 egység.

A kapott értékkel és a bal felső sarokban lévő négy téglalap összevonásával most a következő egyszerűbb felosztást kaptuk:



Most ismét használjuk az előző észrevételünket, mely szerint a kis téglalapok kerületének összege éppen a nagy téglalap kerületének duplája. Azt kaptuk tehát, hogy a kérdéses kerület egyértelműen meghatározható,
értéke $(44 + 37 + 15 + 22)/2 = 59$ egység. Vagyis a téglalap kerülete nem lehet nagyobb 60 egységnél.

5. a) Adj meg négy különböző pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy akárhogyan osztom két csoportra ezt a négy számot, az egyik csoportban szereplő számok összege osztható a másik csoportban szereplő számok összegével.
b) Meg lehet-e adni 2022 különböző pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy akárhogyan osztom két csoportra ezt a 2022 számot, az egyik csoportban szereplő számok összege osztható a másik csoportban szereplő számok összegével?
A csoportok lehetnek különböző elemszámúak.

a) Az $(1; 2; 3; 54)$ számnégyes megfelelő.

Az 54-et nem tartalmazó csoportban szereplő számok összege legalább 1 és legfeljebb 6, és ez mindig osztója a másik csoport összegének: $1 \mid 59$, $2 \mid 58$, $3 \mid 57$, $4 \mid 56$, $5 \mid 55$, $6 \mid 54$.

b) Megadható 2022 darab megfelelő szám. Vegyük például az $1; 2; 3; \ldots; 2021$ számokat, ezek összege legyen S. Megmutatjuk, hogy az $S! - S$ számot (amely nyilván különbözik tőlük) ezekhez hozzávéve a feltételnek megfelelő számokat kapunk.

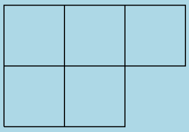
A 2022 darab szám összege $S!$. Vegyünk egy tetszőleges csoportosítást, és jelöljük az $S! - S$ számot nem tartalmazó csoportban a számok összegét N-nel, ekkor a másik csoport összege $S! - N$.

Mivel N az $1; 2; 3; \ldots; 2021$ számok közül néhánynak az összege, így nem nagyobb S-nél. Ekkor viszont osztója $S!$-nak, így az $S! - N$ számnak is. Tehát az egyik csoport számainak összege osztója a másik csoport számai összegének.

Megjegyzés. Az (a) feladatrészhez az $(1; 2; 3; 54)$ az egyetlen jó számnégyes, amelynek mindegyik tagja 100-nál kisebb. Az $(1; 2; 3; 60k + 54)$ négyes minden $k \in \mathbb{N}$ esetén megfelelő. Néhány további jó számnégyes például: $(1; 2; 4; 413)$, $(1; 4; 5; 170)$, $(2; 3; 4; 1251)$.

Általában, ha $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ különböző pozitív egészek ($n \geq 3$), melyek összege S, és T pedig a belőlük képezhető valamennyi (akár egytagú) összegnek közös többszöröse, akkor az $a_n = T - S$ választással megfelelő n-est kapunk.

1. Töltsük ki az alábbi alakzat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5$ számokkal úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban felülről lefele növekedjenek a számok.



Adjuk meg az összes lehetséges megoldást.
Nem kell bizonyítani, hogy a megtaláltakon kívül nincs megoldás. Teljes pontszám csak akkor kapható, ha sikerült az összes megoldást megtalálni.

Az 1 csak a bal felső sarokba kerülhet, az 5 pedig valamelyik sor végére. Öt megoldás van:

1	2	3
4	5	

1	2	4
3	5	

1	3	4
2	5	

1	2	5
3	4	

1	3	5
2	4	

2. Öt különböző magasságú gyerek áll egy sorban. Az alábbiakat tudjuk róluk:
   - Mindenki tud legalább két másik ember szemébe nézni.
   - Andris a legmagasabb, de nem látja Bélát.
   - Cili Dénes mellett áll, és rajta kívül még pontosan egy ember szemébe tud nézni.
   - Endre áll a bal szélen, és alacsonyabb, mint Cili.

   Milyen sorrendben állnak a sorban és mi a magasságbeli sorrendjük?

   Két gyerek pontosan akkor tud egymás szemébe nézni, ha kettőjük közt nincs olyan gyerek, aki magasabb lenne bármelyiküknél.

Andris nem állhat balról a második helyen, mert akkor Endre csak őt látná. Mivel Andris és Béla között kell lennie valakinek (Andris nem látja Bélát), továbbá Cili és Dénes között nem állhat senki, csak az lehet, hogy Béla balról a második és Andris a jobb szélen áll.

Béla alacsonyabb, mint Endre, különben Endre csak Bélát látná.

Cili nem állhat középen, mert akkor a két szomszédján (Béla és Dénes) kívül még Endrét is látná.

Tehát az egyetlen lehetséges sorrend: Endre, Béla, Dénes, Cili, Andris.

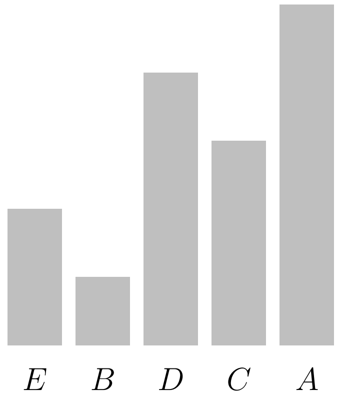
Most megállapítjuk a magassági sorrendet. Az egyszerűség kedvéért az öt gyerek magasságát az 1,2,3,4,5 számoknak feleltetjük meg, mivel csak a magasság szerinti sorrendjük érdekel minket.

Cili pontosan két embert lát, ezért Dénes is magasabb nála. Ellenkező esetben ugyanis Dénes és Béla nem tudná eltakarni előle Endrét. (Azt már tudjuk, hogy Béla alacsonyabb Endrénél.)

Mivel Cili így legfeljebb 3 magasságú, és nála alacsonyabb a feltétel szerint Endre, akinél pedig alacsonyabb Béla, így csak az a lehetőség maradt, hogy Endre 2, Béla 1, Cili pedig 3 magasságú.

Azt tudjuk, hogy Andris a legmagasabb, tehát Dénes 4 magasságú.

Az alábbi ábra szemlélteti a magassági sorrendet:



Tehát a növekvő magassági sorrend: $B < E < C < D < A$. Ellenőrizhető, hogy a kapott sorrendek minden feltételnek eleget tesznek.

3. Kati néni tojásgazdálkodásba kezd. Első nap megveszi első tyúkját, ám ekkor nincs egy tojása sem. Egy tyúk minden éjszaka két tojást tojik. A termelés növeléséhez újabb tyúkokat szerezhet be napközben a piacon, tyúkonként öt tojásért cserébe. Máshonnan nem szerez be se tojást, se tyúkot; és a tyúkokat sem válthatja vissza tojásra. Kati néni szeretne a tizedik napon a lehető legtöbb tojással rendelkezni. Legfeljebb hány tojása lehet a tizedik napon?

El kell magyaráznod a módszert is, amellyel szerinted a legtöbb tojást tudja Kati néni elérni. Nem kell indokolnod, hogy több tojást máshogy nem tud szerezni. Csak akkor kaphatsz teljes pontszámot, ha a lehetséges legtöbb tojáshoz vezető módszert találtad meg, de részpontszámot akkor is kaphatsz, ha nem találod meg a legjobb megoldást.

Ha veszünk egy tyúkot öt tojásért, az a tyúk a harmadik reggelre ,,hozza vissza” az árát, addigra már egy tojás nyereséggel. Tehát a nyolcadik és kilencedik napon már nem érdemes tyúkot venni.

Ha még több, mint két nap van hátra, és van elég tojásunk ahhoz, hogy vegyünk belőle tyúkot, akkor érdemes venni, és ha több, mint egy tyúkra elég a meglévő tojáskészlet, akkor érdemes a lehető legtöbb tyúkot venni.

Ezzel a stratégiával elérhető, hogy a tizedik napra 34 tojásunk legyen.

nap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tojás	0	2	4	6	5	6	9	14	24	34
meglévő tyúk	1	1	1	1	2	3	4	5	5	5
vásárolt tyúk				+1	+1	+1	+1			

4. a) Adjunk meg egy olyan számot, amelyiknek a 8-cal való írásbeli osztása során mindegyik maradék előfordul.
b) Adjuk meg a legkisebb ilyen számot. *Az 1635 osztása során például háromféle maradék fordul elő: a 0, az 1 és a 3 (a 3 kétszer is):*

$$\begin{array}{l} \underline{1635} : 8 = 204 \\ \mathbf{1}6 \\ \ \ \mathbf{0}3 \\ \ \ \ \ \mathbf{3}5 \\ \ \ \ \ \ \ \mathbf{3} \end{array}$$

a) Lehetséges példák: 12345768, 12341432.

b) Nyolc különböző maradékot kell kapnunk, tehát a keresett szám legalább nyolcjegyű.

Induljunk egy 1-es számjeggyel, majd a soron következő jegyet mindig úgy válasszuk meg, hogy az a lehető legkisebb olyan számjegy legyen, amellyel egy korábban még nem szereplő maradékot kapjunk. Ezzel a módszerrel eljutunk a legkisebb lehetséges megoldáshoz, mert az eljárás ,,nem akad el”, mindig lehet jó következő jegyet választani. (A maradékokat keretezéssel jelezzük.)

$$\begin{array}{ccccccccl} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 & : \ 8 = 1250376 \\ \boxed{1} & 0 & & & & & & & \\ & \boxed{2} & 0 & & & & & & \\ & & \boxed{4} & 0 & & & & & \\ & & & \boxed{0} & 3 & & & & \\ & & & & \boxed{3} & 0 & & & \\ & & & & & \boxed{6} & 1 & & \\ & & & & & & \boxed{5} & 5 & \\ & & & & & & & \boxed{7} & \end{array}$$

Tehát a legkisebb megoldás: 10003015.

5. Egy pingpongbajnokságon 13 játékos vett részt, és mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszott. A játékosok között voltak bal- és jobbkezesek is. Összesen ugyanannyi meccset nyert jobbkezes játékos, mint balkezes.
Legfeljebb hányszor fordulhatott elő, hogy egy balkezes játékos legyőzött egy jobbkezest?

A 13 játékos mindegyike 12 ellenféllel játszott, ez $13 \cdot 12 = 156$ mérkőzést jelentene, ám így mindet kétszer számoltuk, tehát valójában ennek fele, vagyis 78 mérkőzés zajlott le. A feladat szövege szerint ebből 39-et nyert balkezes és ugyanannyit jobbkezes játékos.

Ahhoz, hogy minél többször tudjon balkezes győzni jobbkezes ellen, az kell, hogy a 39 balkezes győzelem közül minél kevesebb történjen balkezes-balkezes elleni mérkőzésen. Márpedig az összes ilyen mérkőzésen balkezes nyer, tehát a balkezesek számának kell a lehető legkevesebbnek lennie.

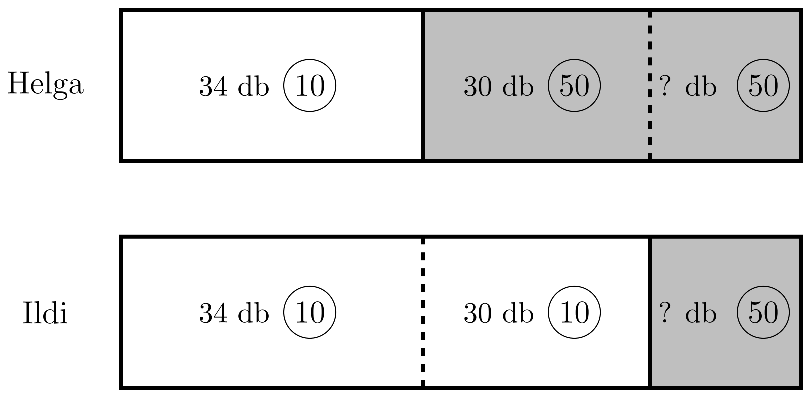
Ha csak 3 balkezes lenne, akkor lenne 10 jobbkezes, akik az elején leírtakhoz hasonló logikát követve egymás között $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ mérkőzést játszottak. Ez túl sok jobbkezes győzelmet jelentene. Tehát legalább 4 balkezes játékos van, ekkor ők egymás közt 6 mérkőzést játszottak, a maradék 33 balkezes győzelem pedig jobbkezes játékos ellen született.

Tehát legfeljebb 33-szor fordulhatott elő.

5. osztály, 2. nap **Országos döntő**

1. Helga és Ildi pénzérmékben tartja megtakarított pénzét. Helgának 34 tízforintosa és valamennyi ötvenforintos érméje van. Ildinek 64 tízforintos és néhány ötvenforintos érméje van. Érdekes módon összesen pontosan ugyanannyi darab pénzérméjük van. Helga lemérte, mennyi érméi össztömege és 492 grammot kapott. Mennyi Ildi érméinek össztömege, ha tudjuk, hogy az ötvenforintos érme pontosan két grammal nehezebb, mint a tízforintos érme?

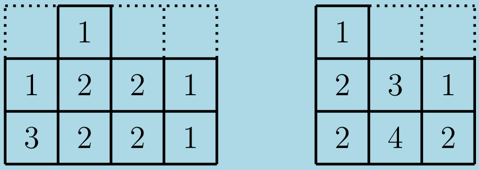
Mivel Ildinek 30-cal több tízforintosa van, csak úgy lehet azonos számú érméjük, ha Helgának 30-cal több ötvenforintosa van.



Ha mindkét lány félretesz fejenként 34 tízforintost, és annyi ötvenforintost, amennyije Ildinek van, akkor Helgánál marad 30 ötvenforintos, Ildinél pedig 30 tízforintos. Tudjuk, hogy az ötvenforintos 2 grammal nehezebb a tízforintosnál, vagyis Helga érméinek tömege $30 \cdot 2 = 60$ grammal több.

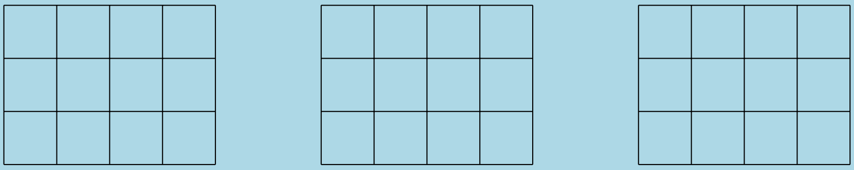
Tehát Ildi érméinek össztömege $492 - 60 = 432$ gramm.

2. Kolos egyforma kockákból épített egy testet. Ezután elkészítette a test ,,nyársábráját”: felírta, hogy elölről, illetve balról nézve az egyes helyeken hány kockát ,,nyársalna fel”, ha az adott helyen átszúrná a rajzot a rajzsíkra merőlegesen.



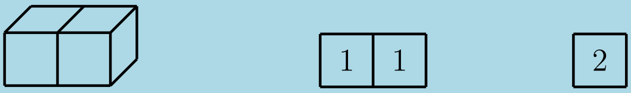
Elölről nézve Jobbról nézve

Színezzük ki a megadott mintában a kockák helyét.



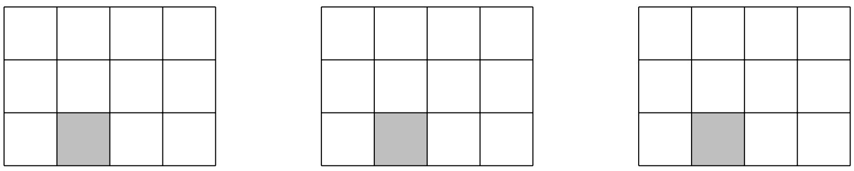
Alsó szint Középső szint Felső szint

Az építmény nincs összeragasztva, azaz minden olyan kocka alatt, amely nem a legalsó szinten van, kell legyen egy másik kocka. Alább egy egyszerűbb építmény nyársábrája látható.



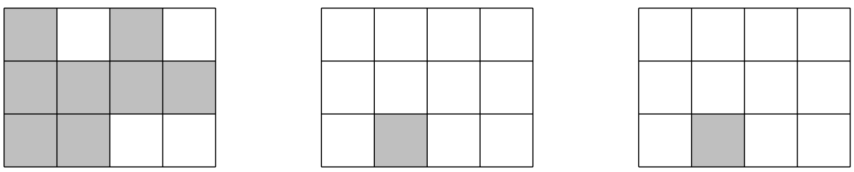
Elölről nézve Jobbról nézve

A felső szinten egyetlen kocka van, a két egyes kijelöli a pontos helyét.A középső és az alsó szinten is kell lennie kockának ezen a pozíción.



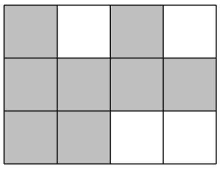
Alsó szint Középső szint Felső szint

Az alsó szinten kitölthetjük a tele sorokat és oszlopokat.Utána már csak egy kocka hiányzik, aminek helye egyértelmű.

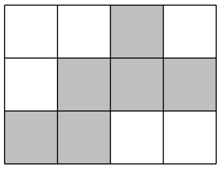


Alsó szint Középső szint Felső szint

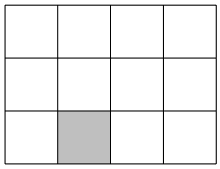
Végül a középső szint kitöltése is egyértelművé vált, ha figyelembe vesszük, hogy minden kocka alatt is kell kockának lennie az alsó szinten. Tehát a teljes színezés így néz ki:



Alsó szint



Középső szint



Felső szint

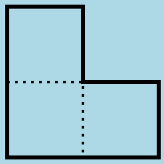
3. Sanyi a Harry Potter-napokon szeretné megnézni mind a nyolc filmet a kedvenc mozijában. A moziban három napon adják a filmeket, mindhárom napon 1-2-3-4-5-6-7-8 sorrendben, és Sanyi is ilyen sorrendben szeretné látni őket, mindegyiket pontosan egyszer. A filmek megnézését több napra is oszthatja, de lehetnek olyan napok, amikor egy részt se néz meg. Hányféleképpen teheti ezt meg?

Aszerint csoportosítjuk az eseteket, hogy Sanyi néz-e filmet a második napon.

- Ha a második napon Sanyi nem megy moziba, akkor a nyolc filmet az első és a harmadik nap között osztja szét, beleértve azt is, hogy mindet megnézi egyetlen nap alatt. Ez $\boxed{\text{9 eset}}$, mert az első napon $0, 1, 2 \ldots, 8$ részt láthat.
- Ha a második napon megy moziba Sanyi, akkor elég azt megszámolni, hogy melyik résszel kezd és melyikkel fejezi be ezen a napon, mert innen egyértelmű, hogy az első és a harmadik napon mit kell megnéznie.
  - Ha csak egy részt lát a második napon, az nyolcféle lehet, ez $\boxed{\text{8 eset}}$.
  - Ha legalább két részt, akkor az $\{1, 2, \ldots, 8\}$ halmazból kell 2 számot választania (második napi első és utolsó résznek), ez $\boxed{\frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ eset}}$.

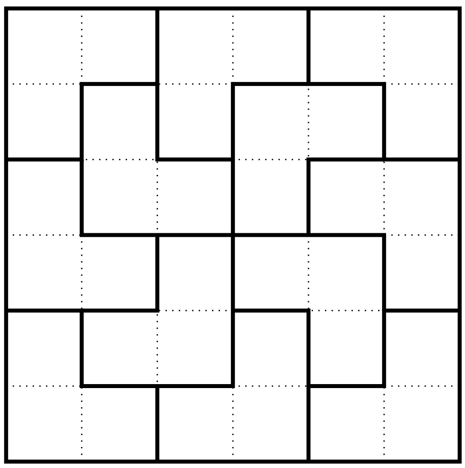
Összesen tehát $\boxed{9 + 8 + 28 = 45}$ lehetősége van Sanyinak terve végrehajtására.

4. L-triominókból szeretnénk egy négyzetet építeni úgy, hogy semelyik két triominó ne álljon össze egy 2×3 -as téglalappá. Legalább hány triominot kell ehhez felhasználnunk?
Az ábrán egy L-triominó látható. A triominókat el lehet forgatni, de oldalaiknak a négyzet oldalaival párhuzamosaknak kell lenniük. Az építés során sem hézag, sem átfedés nem keletkezhet.

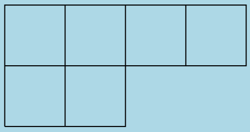


Mivel egy triominó három kis négyzetből áll, a legkisebb lehetséges szóba jövő triominószám a 3. A három triominóból álló 3×3-as négyzetet nem lehet megépíteni, mert a négyzet négy sarkát csak négy különböző triominó fedhetné le. Ezután a következő szóba jövő triominószám a 12.

12 db L-triominóból összeállítható egy négyzet, például az alábbi módon:



1. Töltsük ki az alábbi alakzat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számokkal úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban felülről lefele növekedjenek a számok.



Adjuk meg az összes lehetséges megoldást.
Nem kell bizonyítani, hogy a megtaláltakon kívül nincs megoldás. Teljes pontszám csak akkor kapható, ha sikerült az összes megoldást megtalálni.

Az 1 csak a bal felső sarokba kerülhet, a 6 pedig valamelyik sor végére. Kilenc megoldás van:

1	2	3	4
5	6		

1	2	3	5
4	6		

1	2	4	5
3	6		

1	3	4	5
2	6		

1	2	3	6
4	5		

1	2	4	6
3	5		

1	3	4	6
2	5		

1	2	5	6
3	4		

1	3	5	6
2	4		

2. Kati néni tojásgazdálkodásba kezd. Első nap megveszi első tyúkját, ám ekkor nincs egy tojása sem. Egy tyúk minden éjszaka két tojást tojik. A termelés növeléséhez újabb tyúkokat szerezhet be napközben a piacon, tyúkonként öt tojásért cserébe. Máshonnan nem szerez be se tojást, se tyúkot; és a tyúkokat sem válthatja vissza tojásra. Kati néni szeretne a tizedik napon a lehető legtöbb tojással rendelkezni. Legfeljebb hány tojása lehet a tizedik napon?
El kell magyaráznod a módszert is, amellyel szerinted a legtöbb tojást tudja Kati néni elérni. Nem kell indokolnod, hogy több tojást máshogy nem tud szerezni. Csak akkor kaphatsz teljes pontszámot, ha a lehetséges legtöbb tojáshoz vezető módszert találtad meg, de részpontszámot akkor is kaphatsz, ha nem találod meg a legjobb megoldást.

Ha veszünk egy tyúkot öt tojásért, az a tyúk a harmadik reggelre „hozza vissza” az árát, addigra már egy tojás nyereséggel. Tehát a nyolcadik és kilencedik napon már nem érdemes tyúkot venni.

Ha még több, mint két nap van hátra, és van elég tojásunk ahhoz, hogy vegyünk belőle tyúkot, akkor érdemes venni, és ha több, mint egy tyúkra elég a meglévő tojáskészlet, akkor érdemes a lehető legtöbb tyúkot venni.

Ezzel a stratégiával elérhető, hogy a tizedik napra 34 tojásunk legyen.

nap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tojás	0	2	4	6	5	6	9	14	24	34
meglévő tyúk	1	1	1	1	2	3	4	5	5	5
vásárolt tyúk				+1	+1	+1	+1			

3. a) Adjunk meg egy olyan számot, amelyiknek a 8-cal való írásbeli osztása során mindegyik maradék előfordul.
b) Adjuk meg a legkisebb ilyen számot. *Az 1635 osztása során például háromféle maradék fordul elő: a 0, az 1 és a 3 (a 3 kétszer is):*

$$\underline{1635} : 8 = 204$$
16
03
35
3

a) Lehetséges példák: 12345768, 12341432.

b) Nyolc különböző maradékot kell kapnunk, tehát a keresett szám legalább nyolcjegyű.

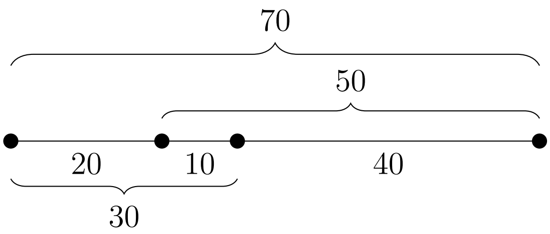
Induljunk egy 1-es számjeggyel, majd a soron következő jegyet mindig úgy válasszuk meg, hogy az a lehető legkisebb olyan számjegy legyen, amellyel egy korábban még nem szereplő maradékot kapjunk. Ezzel a módszerrel eljutunk a legkisebb lehetséges megoldáshoz, mert az eljárás ,,nem akad el”, mindig lehet jó következő jegyet választani. (A maradékokat keretezéssel jelezzük.)

1	0	0	0	3	0	1	5	:	8 = 1250376
$\boxed{1}$	0								
	$\boxed{2}$	0							
		$\boxed{4}$	0						
			$\boxed{0}$	3					
				$\boxed{3}$	0				
					$\boxed{6}$	1			
						$\boxed{5}$	5		
							$\boxed{7}$		

Tehát a legkisebb megoldás: 10003015.

4. Lili rajzolt egy lapra négy pontot, majd egymás után lemérte a pontpárok távolságát. Az első öt lemért távolság 10, 20, 30, 40 és 50 cm volt.
Mekkora a hatodik távolság lehetséges legnagyobb értéke?

Mutatunk egy példát arra, hogy a hatodik távolság lehet 70 cm, majd bebizonyítjuk, hogy ennél több nem lehet. A példában a négy pont egy egyenesre esik.



Legyen a négy pont A, B, C és D, az ismeretlen távolság pedig AB. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $AB \leq AC + CB$, illetve $AB \leq AD + DB$. Ebből $2AB \leq AC + CB + AD + DB \leq 140$, hiszen AC, CB, AD, DB mind lemért távolságok, amelyek közül a négy legnagyobb összege $50 + 40 + 30 + 20 = 140$. Ezért $AB \leq 70$.

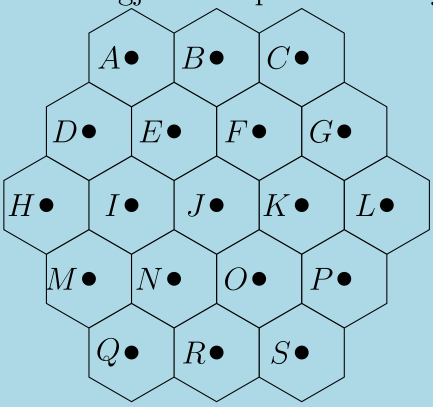
5. a) Anna leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek összegét, valamint különbségét. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van? b) Béla leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek szorzatát, valamint hányadosát. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?

a) A négy szám közül az összeg a legnagyobb, ezért ennek négyjegyűnek, így legalább 1000-nek kell lennie. Mivel a kisebb összeadandó legfeljebb 99, a másik 900-nál nagyobb, tehát biztosan háromjegyű. Így a különbség egyrészt legfeljebb kétjegyű lehet, másrészt egy 900-nál nagyobb számból kell elvenni egy 100-nál kisebbet, ami 800-nál nagyobb. Ez ellentmondás, tehát nem lehetséges, hogy a négy felírt szám között szerepeljen egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is.

b) Lehetséges. Ha az első két szám a 150 és az 50, akkor a szorzatuk 7500, a hányadosuk pedig 3. Mind a négy leírt szám pozitív egész, és valóban szerepel közöttük egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is.

6. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Egy társasjáték táblája az alábbi ábrán látható módon, 19 darab szabályos hatszögből áll. Mindegyik hatszögnek megjelöltük a középpontját.
Adjunk meg minél több, különböző méretű szabályos háromszöget, amelynek mindhárom csúcsa a megjelölt 19 pont valamelyike.



A háromszögeket a csúcsok megnevezésével sorold fel.

Azonos méretű háromszögekből csak egyet-egyet adj meg.

Nem kell bizonyítanod, hogy nincs más, az általad megtaláltaktól különböző méretű szabályos háromszög.

Az A csúcsot rögzítjük, és úgy soroljuk fel a lehetséges méreteket, hogy A-tól egyre messzebb lévő pontokat keresünk második csúcsnak.

Hat különböző méretű szabályos háromszög: ABE, AFI, ACJ, AGN, ALQ és BMP.

2. Sanyi a Harry Potter-napokon szeretné megnézni mind a nyolc filmet a kedvenc mozijában. A moziban három napon adják a filmeket, mindhárom napon 1-2-3-4-5-6-7-8 sorrendben, és Sanyi is ilyen sorrendben szeretné látni őket, mindegyiket pontosan egyszer. A filmek megnézését több napra is oszthatja, de lehetnek olyan napok, amikor egy részt se néz meg. Hányféleképpen teheti ezt meg?

Aszerint csoportosítjuk az eseteket, hogy Sanyi néz-e filmet a második napon.

- Ha a második napon Sanyi nem megy moziba, akkor a nyolc filmet az első és a harmadik nap között osztja szét, beleértve azt is, hogy mindet megnézi egyetlen nap alatt. Ez $\boxed{9\text{ eset}}$, mert az első napon $0, 1, 2 \ldots, 8$ részt láthat.
- Ha a második napon megy moziba Sanyi, akkor elég azt megszámolni, hogy melyik résszel kezd és melyikkel fejezi be ezen a napon, mert innen egyértelmű, hogy az első és a harmadik napon mit kell megnéznie.
  - Ha csak egy részt lát a második napon, az nyolcféle lehet, ez $\boxed{8\text{ eset}}$.
  - Ha legalább két részt, akkor az $\{1, 2, \ldots, 8\}$ halmazból kell 2 számot választania (második napi első és utolsó résznek), ez $\boxed{\frac{8\cdot 7}{2} = 28\text{ eset}}$.

Összesen tehát $\boxed{9 + 8 + 28 = 45}$ lehetősége van Sanyinak terve végrehajtására.

3. a) Van-e olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám háromszorosát kapjuk?
b) Van-e olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám négyszeresét kapjuk?

a) Nincs ilyen háromjegyű szám.

Mivel a fordított sorrendben írt jegyek 3-mal osztható számot alkotnak, ezért a jegyek összege 3-mal osztható. De mivel ez az eredeti sorrendben is így van, ezért a keresett számnak 9-cel is oszthatónak kell lennie, mert a megfordított szám egy hárommal osztható szám háromszorosa.

Az első jegy 1, 2 vagy 3, különben a szám háromszorosa már négyjegyű lenne.Egyik eset sem ad megoldást.

- Ha az első jegy 1, akkor az utolsó csak 7 lehet, mert annak a háromszorosa végződik 1-re. Ekkor a 9-cel való oszthatóság miatt a középső jegy csak 1 lehet, de $3 \cdot 117 = 351 \neq 711$.
- Ha az első jegy 2, akkor az utolsó jegy csak 4 lehet, így a középső jegy 3, de $3 \cdot 234 = 702 \neq 432$.
- Ha az első jegy 3, akkor az utolsó 1 lenne, de a háromszoros nem lehet kisebb az eredeti számnál, ezért itt sem kapunk megoldást.

b) Igen, van ilyen.

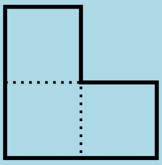
Az első jegy 3-nál kisebb, különben az eredeti szám négyszerese már ötjegyű lenne. Fordított sorredben írva a jegyeket néggyel osztható számot kell kapni, ezért csak páros jegy állhat az első helyen, vagyis a keresett szám 2-vel kezdődik.

Mivel az utolsó jegy négyszeresének utolsó jegye 2, ezért az utolsó jegy 3 vagy 8 lehet. Ezek közül csak a 8 jó, mert egy 2-vel kezdődő négyjegyű szám négyszerese legalább nyolcezer.

Ha a második jegy legalább 3 lenne, akkor az eredeti szám négyszerese 9000-nél több lenne, ez nem lehetséges. Viszont a fordított sorrendben írt jegyek néggyel osztható számot adnak, ez csak akkor teljesül, ha a második jegy az 1.

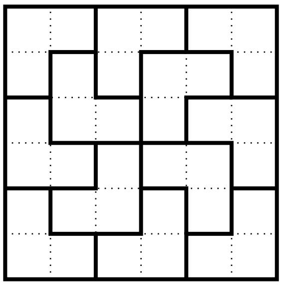
Innen már végignézhető, hogy csak akkor kapunk megoldást, ha az eredeti szám harmadik jegye a 7, ekkor $2178 \cdot 4 = 8712$.

4. a) Össze lehet-e építeni 12 db L-triominóból egy téglalapot úgy, hogy semelyik két triominó ne álljon össze egy 2×3 -as téglalappá?
b) Össze lehet-e építeni 18 db L-triominóból egy téglalapot úgy, hogy semelyik két triominó ne álljon össze egy 2×3-as téglalappá?



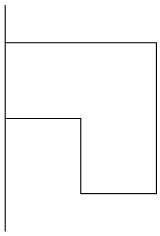
Az ábrán egy L-triominó látható. A triominókat el lehet forgatni, de oldalaiknak a téglalap oldalaival párhuzamosaknak kell lenniük. Az építés során sem hézag, sem átfedés nem keletkezhet.

a) Igen. $12 \cdot 3 = 36$ négyzetből áll a keresett téglalap. Példa 6×6-osra:



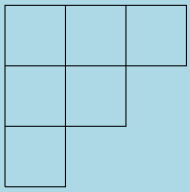
b) Nem lehetséges. $18 \cdot 3 = 54$ négyzetből áll a keresett téglalap. Mivel ez nem osztható 4-gyel, ezért az egyik oldal mindenképpen páratlan lesz.

Vegyünk egy páratlan hosszú oldalt a szélén. Ennek a lefedésében biztosan lesz egy triominó, amely így áll:



Ez alá csak úgy lehet triominót tenni, hogy keletkezzen egy 2×3-as téglalap.

1. Hányféleképpen lehet az alábbi alakzat mezőit az $1, 2, \ldots, 6$ számokkal kitölteni úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban felülről lefele növekedjenek a számok?



A bal felső mezőbe csak az 1 kerülhet, hiszen a szabály miatt minden más szám nagyobb az itt szereplőnél.

Az 1 beírása után a 2 csak olyan helyre kerülhet, ahol nincs tőle balra és felfelé üres mező, tehát az első sor középső, vagy az első oszlop középső mezőjébe.

Ha az első sor középső mezőjébe írtuk a 2-est, akkor a 3-as vagy az első sor utolsó mezőjébe, vagy a középső sor első mezőjébe kerül.

Az első esetben a 4-es csak a középső sor első mezőjébe kerülhet, az 5-ös és 6-os pedig kétféleképp helyezhető el a fennmaradó mezőkben.

A második esetben a 4, 5, 6 számok tetszőlegesen írhatók a fennmaradó három mezőbe, ez 6 lehetőség.

Szimmetria miatt ugyanúgy $2 + 6 = 8$ lehetőség van akkor is, ha az első oszlop középső mezőjébe írjuk a 2-est. Összesen tehát $8 + 8 = 16$-féleképp lehet kitölteni a mezőket.

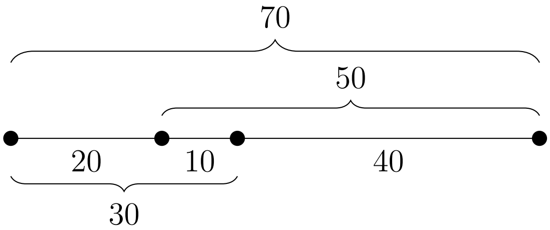
2. Piroska leírt a füzetébe néhány prímszámot. Észrevette, hogy mindegyik számjegyet pontosan egyszer használta, kivéve a 0-t, melyet egyszer sem. Legfeljebb hány prímszámot írhatott le Piroska?

Piroska leírhatott hat prímszámot, pl. 2, 3, 5, 41, 67, 89.

Mivel prímszám nem végződhet 4-re, 6-ra vagy 8-ra, ezért csak az 1, 2, 3, 5, 7, 9 számkártyák állhatnak az egyes helyiértéken, így Piroska legfeljebb hat prímszámot írhatott fel.

3. Lili rajzolt egy lapra négy pontot, majd egymás után lemérte a pontpárok távolságát. Az első öt lemért távolság 10, 20, 30, 40 és 50 cm volt.
Mekkora a hatodik távolság lehetséges legnagyobb értéke?

Mutatunk egy példát arra, hogy a hatodik távolság lehet 70 cm, majd bebizonyítjuk, hogy ennél több nem lehet. A példában a négy pont egy egyenesre esik.



Legyen a négy pont A, B, C és D, az ismeretlen távolság pedig AB. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $AB \leq AC + CB$, illetve $AB \leq AD + DB$. Ebből $2AB \leq AC + CB + AD + DB \leq 140$, hiszen AC, CB, AD, DB mind lemért távolságok, amelyek közül a négy legnagyobb összege $50 + 40 + 30 + 20 = 140$. Ezért $AB \leq 70$.

4. a) Anna leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek összegét, valamint különbségét. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?
b) Béla leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek szorzatát, valamint hányadosát. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?

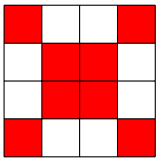
a) A négy szám közül az összeg a legnagyobb, ezért ennek négyjegyűnek, így legalább 1000-nek kell lennie. Mivel a kisebb összeadandó legfeljebb 99, a másik 900-nál nagyobb, tehát biztosan háromjegyű. Így a különbség egyrészt legfeljebb kétjegyű lehet, másrészt egy 900-nál nagyobb számból kell elvenni egy 100-nál kisebbet, ami 800-nál nagyobb. Ez ellentmondás, tehát nem lehetséges, hogy a négy felírt szám között szerepeljen egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is.

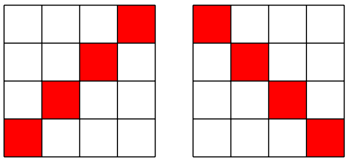
b) Lehetséges. Ha az első két szám a 150 és az 50, akkor a szorzatuk 7500, a hányadosuk pedig 3. Mind a négy leírt szám pozitív egész, és valóban szerepel közöttük egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is.

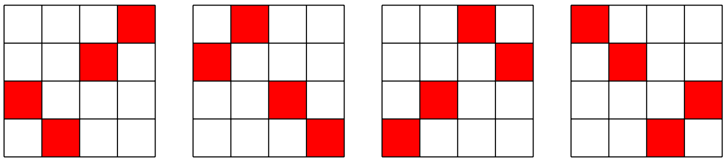
5. Ali és Bori egy 4×4-es táblázat néhány mezőjét szeretné kifesteni pirosra úgy, hogy minden sorban és oszlopban legalább egy piros mező legyen. Ali szerint a lehetséges színezések száma páratlan, Bori szerint páros. Melyiküknek van igaza?
A táblázatot nem lehet elforgatni vagy tükrözni.

Első megoldás. Csoportosítsuk a jó színezéseket aszerint, hogy ismételt 90 fokos elforgatásokkal hány különböző jó színezés kapható belőlük. Ha egy színezésnél a táblázat minden sorában és minden oszlopában legalább egy mező piros, akkor ugyanez igaz a 90 fokos elforgatottra is. Ezért csak az határozza meg, melyik színezés melyik csoportba kerül, hogy a színezés milyen forgásszimmetriával rendelkezik. Három eset lehetséges:

(a) a színezés megegyezik 90 fokos elforgatottjával, (b) a színezés különbözik a 90 fokos elforgatottjától, de azonos a 180 fokos elforgatottjával, (c) a színezés négy elforgatottja (0, 90, 180 és 270 fokkal) mind különböző. Olyan eset nem fordul elő, hogy a négy elforgatott közül pontosan három azonos és egy különböző.

(a) 

(b) 

(c) 

A (b) és (c) csoportban nyilván páros sok színezés van összesen, ezért az a kérdés, hogy hány színezés esik az (a) csoportba. Ha egy színezés 90 fokkal elforgatva önmagába megy át, akkor az alábbi ábrán azonos betűvel jelölt mezők színe azonos kell, hogy legyen.

A	C	D	A
D	B	B	C
C	B	B	D
A	D	C	A

Ha C vagy D piros, akkor A és B bármilyen lehet. Ez $3 \cdot 4 = 12$ eset. Ha sem C, sem D nem piros, akkor A és B is piros kell, hogy legyen, különben nem teljesülne a feltétel. Ez 1 eset. Tehát az (a) csoportba 13 színezés esik, ami páratlan sok, ezért Alinak van igaza.

Második megoldás. Csoportosítsuk a jó színezéseket aszerint, hogy a sorok cserebeérjével összesen hány különböző jó színezést kapható belőlük. Egy jó színezés sorait tetszőleges másik sorrendben véve is jó színezést kapunk. Ezért csak az határozza meg, hogy melyik színezés melyik csoportba kerül, hogy a sorok $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetséges sorrendje közül melyek egyeznek meg. Ha egy színezésben mind a négy sor különböző, akkor cserékkel 24 különböző színezés kapható belőle. Ha két sor megegyezik, de a további kettő ezektől és egymástól is különbözik, akkor cserékkel 12 különböző színezés kapható. Ha két sor úgy egyezik meg, hogy a tőlük különböző másik két sor is megegyezik, akkor 6 különböző színezés adódik. Ha pedig három sor egyezik meg, és a negyedik különbözik, akkor 4-féle színezést kaphatunk. Az itt felsorolt színezésekből mind páros számú van, hiszen 24-es, 12-es, 6-os és 4-es csoportokba rendeztük őket. Marad még az az eset, hogy minden sor egyforma. Ekkor mivel minden oszlopban is kell lennie piros mezőnek, az összes mező piros, ami egyetlen lehetőség. Összesen tehát páratlan számú jó színezés van, tehát Alinak van igaza.

Harmadik megoldás. Tekintsük azokat a színezéseket, ahol minden sorban van piros mező. Soronként 15 lehetőség van, így az ilyen színezések száma 15^4. Ebből vonjuk le azokat, ahol van üres oszlop. Négy helyen lehet az üres oszlop, a fennmaradó mezők 7^4-féleképp tölthetők ki úgy, hogy továbbra is minden sorban legyen piros mező. Ez $4 \cdot 7^4$ lehetőség, amit levonunk. Így azonban többször is levontuk azokat, ahol több üres oszlop is van. Két üres oszlop 6-féle helyen lehet, a fennmaradó mezők 3^4-féleképp tölthetők ki. Adjuk ezeket ismét hozzá. Így azonban háromszor levontuk és háromszor (minden oszlop-párnál) visszaadtuk azokat, amelyekben három üres oszlop is van. A három üres oszlop 4 helyen lehet, a fennmaradó mezőket pedig muszáj pirosra színezni. Tehát ezt a 4 esetet újra le kell vonni. Négy üres oszlop nem lehet, így a színezések száma:

$$15^4 - 4 \cdot 7^4 + 6 \cdot 3^4 - 4 \cdot 1^4 = 41503,$$

ami páratlan.

7. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Három testvér (Anna, Béla és Cili) kapott egy-egy egyforma tábla csokoládét. Miután megkapták, mindenki evett a csokijából: Anna 3 sort, Béla 1 sort, majd 3 oszlopot, Cili pedig 4 oszlopot evett meg. Ekkor észrevették, hogy mindegyikük csokijából ugyanannyi kocka fogyott.
Hány kockából állt a teljes tábla csokoládé?

Ha az egy sorban található kockák számát s-sel, az egy oszlopban találhatókét c-vel jelöljük, akkor a *megevett* kockák egyenlősége alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$3s = s + 3c - 3 = 4c$$

A második egyenlőségből

$$s - 3 = c$$

Így

$$4c = 4s - 12 = 3s$$

Amiből $s = 12$ és $c = 9$. Tehát a csoki $9 \cdot 12 = 108$ kockából állt.

Megjegyzés. A *megmaradt* kockák egyenlősége alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$s(c-3) = (s-3)(c-1) = (s-4)c$$

A zárójeleket felbontva

$$sc - 3s = sc - s - 3c + 3 = sc - 4c$$

Ha mindenhonnan levonunk sc-t, majd megszorozzuk az egyenletrendszert -1-gyel, az előző megoldás kezdeti egyenlerendszeréhez jutunk.

2. a) Van-e olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám háromszorosát kapjuk? b) Van-e olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám négyszeresét kapjuk?

a) Nincs ilyen háromjegyű szám.

Mivel a fordított sorrendben írt jegyek 3-mal osztható számot alkotnak, ezért a jegyek összege 3-mal osztható. De mivel ez az eredeti sorrendben is így van, ezért a keresett számnak 9-cel is oszthatónak kell lennie, mert a megfordított szám egy hárommal osztható szám háromszorosa.

Az első jegy 1, 2 vagy 3, különben a szám háromszorosa már négyjegyű lenne.Egyik eset sem ad megoldást.

- Ha az első jegy 1, akkor az utolsó csak 7 lehet, mert annak a háromszorosa végződik 1-re. Ekkor a 9-cel való oszthatóság miatt a középső jegy csak 1 lehet, de $3 \cdot 117 = 351 \neq 711$.
- Ha az első jegy 2, akkor az utolsó jegy csak 4 lehet, így a középső jegy 3, de $3 \cdot 234 = 702 \neq 432$.
- Ha az első jegy 3, akkor az utolsó 1 lenne, de a háromszoros nem lehet kisebb az eredeti számnál, ezért itt sem kapunk megoldást.

b) Igen, van ilyen.

Az első jegy 3-nál kisebb, különben az eredeti szám négyszerese már ötjegyű lenne. Fordított sorredben írva a jegyeket néggyel osztható számot kell kapni, ezért csak páros jegy állhat az első helyen, vagyis a keresett szám 2-vel kezdődik.

Mivel az utolsó jegy négyszeresének utolsó jegye 2, ezért az utolsó jegy 3 vagy 8 lehet. Ezek közül csak a 8 jó, mert egy 2-vel kezdődő négyjegyű szám négyszerese legalább nyolcezer.

Ha a második jegy legalább 3 lenne, akkor az eredeti szám négyszerese 9000-nél több lenne, ez nem lehetséges. Viszont a fordított sorrendben írt jegyek néggyel osztható számot adnak, ez csak akkor teljesül, ha a második jegy az 1.

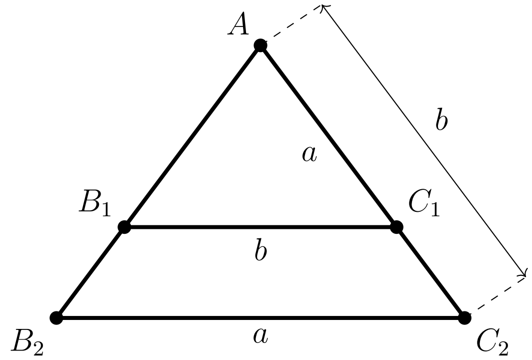
Innen már végignézhető, hogy csak akkor kapunk megoldást, ha az eredeti szám harmadik jegye a 7, ekkor $2178 \cdot 4 = 8712$.

3. Sára rajzolt két egyenlő szárú, de nem szabályos háromszöget úgy, hogy az első háromszög alapjának hossza megegyezik a második háromszög szárainak hosszával, valamint a második háromszög alapjának hossza megegyezik az első háromszög szárainak hosszával. Miután megrajzolta a két háromszöget, észrevette, hogy az első háromszög egyik szöge megegyezik a második háromszög egyik szögével. Mekkorák lehetnek a két háromszög szögei?

Legyenek az egyik háromszög oldalai a, a, b, míg a másiké a, b, b. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $a < b$ (a feladat szövege nem tesz különbséget a két háromszög között; és tudjuk, hogy nem szabályosak a háromszögek, tehát $a \neq b$).

Vizsgáljuk meg, hogyan helyezkedhet el a két háromszög egyenlő szöge.

A két háromszög szárszöge nem egyezhet meg, mivel ha egymásra helyeznénk a háromszögeket úgy, hogy a szárszögük egybeessen, akkor az alábbi ábrát kapnánk:

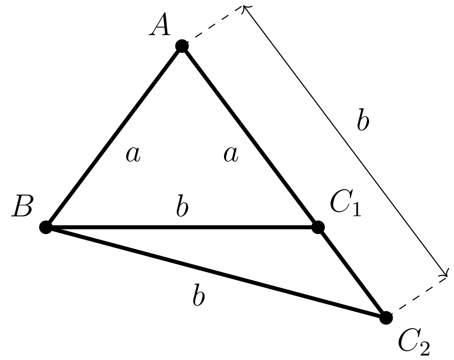


Ha a két háromszögben a szárszögek megegyeznek, akkor az alapon fekvő szögek is. Ezért B_1C_1 és B_2C_2 párhuzamos kell, hogy legyen. Így mivel $a = AB_1 < AB_2 = b$, nyilvánvaló, hogy $B_1C_1 < B_2C_2$.

Ezzel együtt azonban $B_1C_1 = a$ és $B_2C_2 = b$, azaz $b < a$, ellentmondva a feltevésünknek.

Ha a két háromszög alapon fekvő szögei lennének egyenlők, akkor a szárszögeknek is egyenlőknek kellene lenniük. Tehát csak az lehetséges, hogy az egyik háromszög alapon fekvő szöge egyezik meg a másik háromszög szárszögével.

<u>1. eset:</u> Az a, a, b oldalú háromszög szárszöge egyenlő az a, b, b oldalú háromszög alapon fekvő szögeivel. Helyezzük most is egymásra a háromszögeket úgy, hogy az azonos méretű szögek egybeessenek. Ekkor az alábbi szerkezetű ábrát kapjuk:



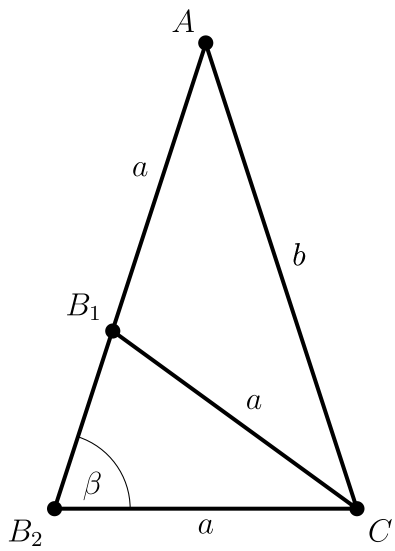
Itt $AB = AC_1 = a$, illetve $BC_1 = AC_2 = BC_2 = b$.

Ekkor C_1BC_2-nek olyan egyenlőszárú háromszögnek kellene lennie, amelynek C_1-nél van az alapon fekvő szöge.

De ez lehetetlen, mivel C_1-nél tompaszögnek kell lennie ebben a háromszögben (hiszen az ABC_1 egyenlő szárú háromszög C-nél levő szöge hegyesszög, mivel alapon fekvő szög).

2. eset: Az a, a, b oldalú háromszög alapon fekvő szöge egyenlő az a, b, b oldalú háromszög szárszögével. Helyezzük ezúttal is egymásra a háromszögeket úgy, hogy az azonos méretű szögek egybeessenek.

Ekkor az alábbi szerkezetű ábrát kapjuk:



Jelölje az a, b, b oldalú AB_2C háromszög alapon fekvő szögeinek nagyságát β,
azaz legyen $AB_2C\sphericalangle = B_2CA\sphericalangle = \beta$. Ekkor $B_2AC\sphericalangle = 180° - 2\beta$.
Mivel $B_1C = B_2C = a$, ezért B_1B_2C háromszög is egyenlő szárú, amiből

$$CB_1B_2\sphericalangle = \beta \quad \text{és} \quad B_2CB_1\sphericalangle = 180° - 2\beta.$$

Innen a AB_1C háromszög (ez éppen az a, a, b oldalú egyenlő szárú háromszög) szögeit mind fel tudjuk írni β segítségével:

- Alapon felvő szögei: $B_1CA\sphericalangle = CAB_2\sphericalangle = 180° - 2\beta$
- Szárszöge: $AB_1C\sphericalangle = 180° - CB_1B_2\sphericalangle = 180° - \beta$.

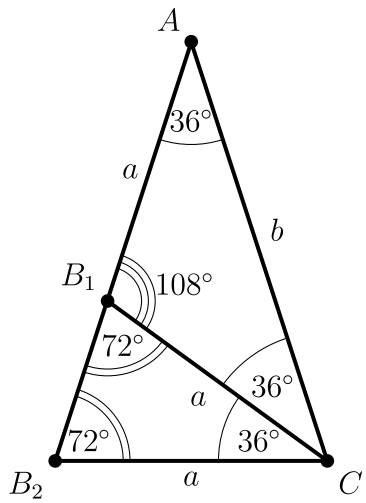
Ezek összege 180° kell, hogy legyen, azaz:

$$\begin{aligned} 180° &= 180° - 2\beta + 180° - 2\beta + 180° - \beta \qquad / + 5\beta - 180° \\ 5\beta &= 360° \\ \beta &= 72° \end{aligned}$$

Így persze $B_1CA\sphericalangle = CAB_2\sphericalangle = 180° - 2\beta = 36°$
és $AB_1C\sphericalangle = 180° - 108°$.
Tehát azt kaptuk, hogy az egyetlen lehetséges megoldás:

- Az a, a, b oldalú háromszög szögei: $36°, 36°, 108°$.
- Az a, b, b oldalú háromszög szögei: $36°, 72°, 72°$.

Ezekkel a szögekkel valóban létezik az összes feltételnek eleget tevő háromszög-pár: a 2. eset viszgálatakor megadott AB_1C és AB_2C háromszögek éppen ilyenek.



(De gondolhatunk arra is, hogy egy szabályos ötszögben két átló és egy oldal az első, míg két oldal és egy átló a második típusú egyenlő szárú háromszöget határozza meg.)

4. Gáspár beírta egy 7×7-es táblázatba az $1, 2, 3, \ldots, 49$ számokat úgy, hogy a szomszédos számok oldalszomszédos mezőkön legyenek. Ezután kiszínezte azokat mezőket, amelyekben 7-tel osztva 1 vagy 2 maradékot adó szám áll. Lehetséges-e, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan két mezőt színezett ki?

Első megoldás. Vegyük észre, hogy a 7-tel osztva 1 és 7-tel osztva 2 maradékot adó számok páronként egymás mellett helyezkednek el: 1–2, 8–9, ..., 43–44. Ezek a táblán 7 darab 1×2-es dominóként helyezkednek el. Vagyis a kérdés átfogalmazható arra, hogy le lehet-e tenni 7 darab dominót úgy, hogy minden sorban és oszlopban 2 mező legyen elfoglalva.

Tegyük fel, hogy lehelyezhetők a dominók a feltételek szerint. Vegyünk egy tetszőleges dominót, amely két oszlopból vagy két sorból foglal el egy-egy mezőt. A két oszlop vagy két sor közös határvonalánál osszuk ketté a táblát. Mindkét részen a meglévő egy-egy mezőn kívül még páratlan számú mezőt kell foglalni. Ez csak úgy lehetséges, ha még legalább egy dominó átnyúlik a határvonalon. Több azonban nem is nyúlhat át, hiszen akkor a határmenti sorokban vagy oszlopokban már legalább 3 mező lenne lefedve. Tehát minden dominónak van egy párja, amellyel közös határvonalon fekszenek. Ez azonban lehetetlen, hiszen összesen páratlan számú dominónk van.

Második megoldás. Számozzuk be a sorokat és az oszlopokat is 1-től 7-ig, majd rendeljük hozzá minden mezőhöz a sorszám és az oszlopszám összegét. Nevezzük ezt az összeget az adott mező *súly*ának. Mivel a szomszédos számokat oldalszomszédos mezőkre írtuk, bármely mező súlya pontosan eggyel tér el (felfelé vagy lefelé) az eggyel kisebb számot tartalmazó mező súlyától. Így az $(1; 2), (8; 9), \ldots, (43; 44)$ párok mindegyikére igaz, hogy a megfelelő két mező súlyának összege páratlan. Mivel 7 ilyen pár van, az összes színezett mező súlyának összege is páratlan. Ha viszont minden sorban és minden oszlopban pontosan két mezőt színeztünk volna ki, akkor a színezett mezők súlyának összege

$$2 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 112$$

lenne, ami páros. Ez ellentmondás, tehát nem lehetséges a feltételeknek megfelelő színezés.

8. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Piroska leírt a füzetébe néhány prímszámot. Észrevette, hogy mindegyik számjegyet pontosan egyszer használta, kivéve a 0-t, melyet egyszer sem. Legfeljebb hány prímszámot írhatott le Piroska?

Piroska leírhatott hat prímszámot, pl. 2, 3, 5, 41, 67, 89.

Mivel prímszám nem végződhet 4-re, 6-ra vagy 8-ra, ezért csak az 1, 2, 3, 5, 7, 9 számkártyák állhatnak az egyes helyiértéken, így Piroska legfeljebb hat prímszámot írhatott fel.

2. Egy pingpongbajnokságon 5 balkezes és 8 jobbkezes játékos vett részt, és mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszott. Ugyanannyi meccset nyert jobbkezes játékos, mint balkezes. Hányszor fordult elő, hogy egy balkezes megvert egy jobbkezest?

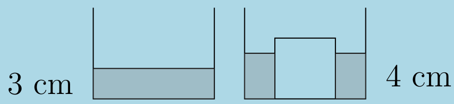
Osszuk a mérkőzéseket három csoportba. Az első csoportba kerüljenek azok, ahol balkezes játszott balkezessel. Ilyenből $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ volt. A második csoportba tegyük azokat, ahol egy balkezes és egy jobbkezes játszott, ez $5 \cdot 8 = 40$ mérkőzés. Végül maradtak a jobbkezesek közötti mérkőzések, $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ ilyen volt.

Összesen a $10 + 40 + 28 = 78$ mérkőzés felét, 39-et nyerte balkezes.

Mivel az első csoportban minden meccset balkezes nyert (ez 10 meccs), a harmadik csoportban pedig nincsenek balkezes győzelmek, ezért a második csoportban 29 balkezes győzelem született.

Ezek pont azok a mérkőzések, ahol egy balkezes legyőzött egy jobbkezest. Tehát 29 ilyen mérkőzés volt.

3. Van egy kisebb és egy nagyobb kockánk. A kisebb kockát teletöltöttük vízzel. Ezután az összes vizet áttöltöttük a nagyobb kockába (amely valamelyik lapján támaszkodva áll az asztalon), így a nagyobb kockában 3 cm magasan áll a víz. Ezután a kisebb kockát is beleraktuk a nagyobb kockába úgy, hogy annak az egyik lapja a nagyobb kocka aljához tapadjon, de a víz ne folyjon bele a kisebb kockába. Ennek hatására a nagyobb kockában 1 cm-rel megemelkedett a vízszint.
Határozzuk meg a kockák élhosszúságait.



Első megoldás. Jelölje a kockák cm-ben mért élhosszát a és b ($a > b$). A víz térfogata egyenlő a kisebbik kocka térfogatával, ez b^3.

Az áttöltés után ez a térfogat $3a^2$ alakban áll elő, mert egy a^2 alapterületű, 3 cm magas téglatestet alkot a víz.

Miután a kisebb kockát beletettük a nagyobba, ugyanez a térfogat $4(a^2 - b^2) = 4a^2 - 4b^2$ alakban jelenik meg.

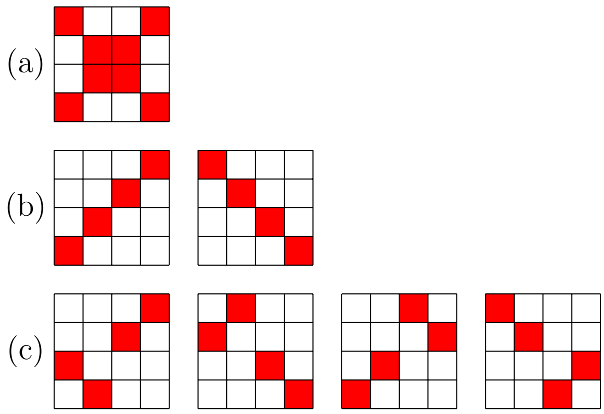
A töltögetés során a víz térfogata nem változik, tehát $b^3 = 3a^2 = 4a^2 - 4b^2$.

Az egyenletrendszert megoldva először $2b = a$, innen $12b^2 = b^3$, vagyis $b = 12$ adódik. Tehát a kockák élhossza $a = 24$ cm és $b = 12$ cm.

Második megoldás. A kisebb kockát a vízbe merítve a vízszint magassága az eredeti szint egyharmadával nőtt (3 cm-ről 4 cm-re). Ez azt jelenti, hogy a kisebb kocka víz alá merülő részének térfogata harmada a víz teljes térfogatának. Ez utóbbi viszont megegyezik a kisebb kocka térfogatával. Tehát a víz alatti rész térfogata harmada a teljes kockáénak. Mivel a víz alatti rész 4 cm magas, így a kisebb kocka élhossza ennek háromszorosa, azaz 12 cm. A nagy kockában négy kisebb kockányi víz állna 12 cm magasan, ezért az alapterülete négyszer akkora kell legyen, mint a kisebb kockáé, tehát az élhossza kétszer akkora, azaz 24 cm.

4. Ali és Bori egy 4×4-es táblázat néhány mezőjét szeretné kifesteni pirosra úgy, hogy minden sorban és oszlopban legalább egy piros mező legyen. Ali szerint a lehetséges színezések száma páratlan, Bori szerint páros. Melyiküknek van igaza?
A táblázatot nem lehet elforgatni vagy tükrözni.

Első megoldás. Csoportosítsuk a jó színezéseket aszerint, hogy ismételt 90 fokos elforgatásokkal hány különböző jó színezés kapható belőlük. Ha egy színezésnél a táblázat minden sorában és minden oszlopában legalább egy mező piros, akkor ugyanez igaz a 90 fokos elforgatottra is. Ezért csak az határozza meg, melyik színezés melyik csoportba kerül, hogy a színezés milyen forgásszimmetriával rendelkezik. Három eset lehetséges: (a) a színezés megegyezik 90 fokos elforgatottjával, (b) a színezés különbözik a 90 fokos elforgatottjától, de azonos a 180 fokos elforgatottjával, (c) a színezés négy elforgatottja (0, 90, 180 és 270 fokkal) mind különböző. Olyan eset nem fordul elő, hogy a négy elforgatott közül pontosan három azonos és egy különböző.



A (b) és (c) csoportban nyilván páros sok színezés van összesen, ezért az a kérdés, hogy hány színezés esik az (a) csoportba. Ha egy színezés 90 fokkal elforgatva önmagába megy át, akkor az alábbi ábrán azonos betűvel jelölt mezők színe azonos kell, hogy legyen.

A	C	D	A
D	B	B	C
C	B	B	D
A	D	C	A

Ha C vagy D piros, akkor A és B bármilyen lehet. Ez $3 \cdot 4 = 12$ eset. Ha sem C, sem D nem piros, akkor A és B is piros kell, hogy legyen, különben nem teljesülne a feltétel. Ez 1 eset. Tehát az (a) csoportba 13 színezés esik, ami páratlan sok, ezért Alinak van igaza.

Második megoldás. Csoportosítsuk a jó színezéseket aszerint, hogy a sorok csereberéjével összesen hány különböző jó színezést kapható belőlük. Egy jó színezés sorait tetszőleges másik sorrendben véve is jó színezést kapunk. Ezért csak az határozza meg, hogy melyik színezés melyik csoportba kerül, hogy a sorok $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetséges sorrendje közül melyek egyeznek meg. Ha egy színezésben mind a négy sor különböző, akkor cserékkel 24 különböző színezés kapható belőle. Ha két sor megegyezik, de a további kettő ezektől és egymástól is különbözik, akkor cserékkel 12 különböző színezés kapható. Ha két sor úgy egyezik meg, hogy a tőlük különböző másik két sor is megegyezik, akkor 6 különböző színezés adódik. Ha pedig három sor egyezik meg, és a negyedik különbözik, akkor 4-féle színezést kaphatunk. Az itt felsorolt színezésekből mind páros számú van, hiszen 24-es, 12-es, 6-os és 4-es csoportokba rendeztük őket. Marad még az az eset, hogy minden sor egyforma. Ekkor mivel minden oszlopban is kell lennie piros mezőnek, az összes mező piros, ami egyetlen lehetőség. Összesen tehát páratlan számú jó színezés van, tehát Alinak van igaza.

Harmadik megoldás. Tekintsük azokat a színezéseket, ahol minden sorban van piros mező. Soronként 15 lehetőség van, így az ilyen színezések száma 15^4. Ebből vonjuk le azokat, ahol van üres oszlop. Négy helyen lehet az üres oszlop, a fennmaradó mezők 7^4-féleképp tölthetők ki úgy, hogy továbbra is minden sorban legyen piros mező. Ez $4 \cdot 7^4$ lehetőség, amit levonunk. Így azonban többször is levontuk azokat, ahol több üres oszlop is van. Két üres oszlop 6-féle helyen lehet, a fennmaradó mezők 3^4-féleképp tölthetők ki. Adjuk ezeket ismét hozzá. Így azonban háromszor levontuk és háromszor (minden oszlop-párnál) visszaadtuk azokat, amelyekben három üres oszlop is van. A három üres oszlop 4 helyen lehet, a fennmaradó mezőket pedig muszáj pirosra színezni. Tehát ezt a 4 esetet újra le kell vonni. Négy üres oszlop nem lehet, így a színezések száma:

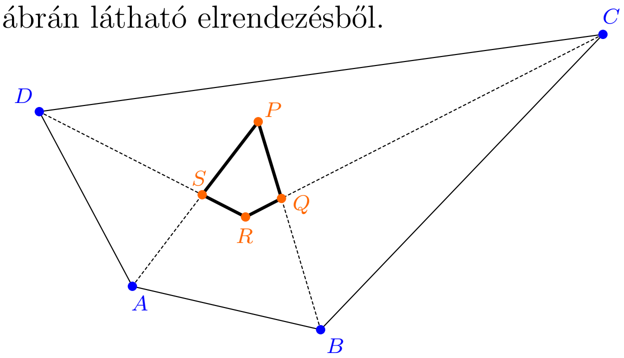
$$15^4 - 4 \cdot 7^4 + 6 \cdot 3^4 - 4 \cdot 1^4 = 41503,$$

ami páratlan.

5. Az $ABCD$ konvex négyszögnek megrajzoltuk mind a négy belső szögfelelezőjét.
Az A-nál levő szög belső szögfelezője a P pontban metszi a B-nél levő szög belső szögfelezőjét.
A B-nél levő szög belső szögfelezője a Q pontban metszi a C-nél levő szög belső szögfelezőjét.
A C-nél levő szög belső szögfelezője az R pontban metszi a D-nél levő szög belső szögfelezőjét.
A D-nél levő szög belső szögfelezője az S pontban metszi az A-nál levő szög belső szögfelezőjét.
Bizonyítsuk be, hogy ha az így keletkezett $PQRS$ négyszög rombusz, akkor négyzet is.

Bebizonyítjuk, hogy ha $PQRS$ paralelogramma, akkor téglalap. Ebből következik az állítás, hiszen ha $PQRS$ rombusz, akkor paralelogramma is, ezért az előző állítás alapján téglalap; de ha egy téglalap oldalai egyenlők, akkor négyzet.

Induljunk ki az alábbi ábrán látható elrendezésből.



Az $ABCD$ négyszög szögeire használjuk az $A\sphericalangle = \alpha$, $B\sphericalangle = \beta$, $C\sphericalangle = \gamma$ és $D\sphericalangle = \delta$ jelöléseket, és azt a tényt, hogy $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^o$.

Ha $PQRS$ paralelogramma, akkor szemközti szögei egyenlők. Felírjuk, hogy ez mit jelent az eredeti négyszög szögeivel kifejezve.

$P\sphericalangle = 180^o - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ és $R\sphericalangle = 180^o - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}$.Innen következik, hogy ha $P\sphericalangle = R\sphericalangle$, akkor $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.Ez csak úgy lehetséges, ha mindkét összeg pontosan 180^o. Ez azt is jelenti továbbá, hogy AD és BC párhuzamos.

Hasonlóan a $Q\sphericalangle = S\sphericalangle$ feltételből AB és CD párhuzamossága következik. Ott tartunk tehát, hogy ha $PQRS$ paralelogramma, akkor $ABCD$ is paralelogramma.A kapott $\alpha + \beta = 180^o$ eredményt is felhasználva kapjuk, hogy $P\sphericalangle = 90^o$, ami a $PQRS$ paralelogrammában csak úgy lehetséges, ha az egyben téglalap is.

A bevezetőben írtak alapján ezzel kész vagyunk, hiszen azt is tudjuk a $PQRS$ négszögről, hogy rombusz, vagyis valóban négyzet is egyben.

Megjegyzések, diszkusszió:

- A $PQRS$ körüljárása kétféle lehet $ABCD$ körüljárásához képest, de a két eset lényegében azonos. Bizonyítható, hogy minden lehetséges elrendezésben a fenti bizonyítás során felírt formulák adják a minket érdeklő szögeket.
- Ha $ABCD$ konkáv, akkor $PQRS$ hurkolt, így nem lehet rombusz.

1. Melyik a nagyobb,

$$A = (1+2)^2 + (3+4)^2 + (5+6)^2 + \ldots + (2019+2020)^2 + (2021+2022)^2,$$

vagy

$$B = (2+3)^2 + (4+5)^2 + (6+7)^2 + \ldots + (2020+2021)^2 + (2022+1)^2?$$

Megmutatjuk, hogy az $A - B$ különbség pozitív, tehát $A > B$. Felhasználjuk, hogy

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Az A és B összegben is szerepel az összes négyzetszám 1-től 2022^2-ig, ezek a kivonásnál kiesnek, és csak a kétszeres szorzatok maradnak.

$$A - B = 2 \cdot (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \ldots + 2021 \cdot 2022) - 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \ldots + 2022 \cdot 1)$$

A különbség előjele nem változik, ha kettővel osztunk. A kivonást „elcsúsztatva” végezzük, az első összeg második tagjából a második összeg első tagját vonjuk le, az első összeg harmadik tagjából a második összeg második tagját és így tovább. Végül az első összeg első tagjából kivonjuk a második összeg utolsó tagját.

$$\frac{A-B}{2} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 - 4 \cdot 5 + \ldots + 2021 \cdot 2022 - 2020 \cdot 2021 + (1 \cdot 2 - 2022 \cdot 1)$$

Az utolsó pártól eltekintve mindig pozitív különbségeket kapunk:

$$\frac{A-B}{2} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + \ldots + 2 \cdot 2021 + (1 \cdot 2 - 2022 \cdot 1)$$

A pozitív tagok összege éppen 1-től 2021-ig a páratlan számok összegének duplája, ebből vonunk le 2022-t.

$$\frac{A-B}{2} = 2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2021) - 2022$$

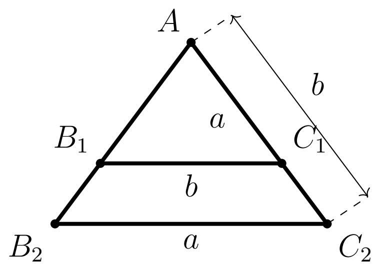
A zárójelben már az első és utolsó tag összege 2022, tehát $\frac{A-B}{2}$ pozitív, ezért $A > B$.

2. Sára rajzolt két egyenlő szárú, de nem szabályos háromszöget úgy, hogy az első háromszög alapjának hossza megegyezik a második háromszög szárainak hosszával, valamint a második háromszög alapjának hossza megegyezik az első háromszög szárainak hosszával. Miután megrajzolta a két háromszöget, észrevette, hogy az első háromszög egyik szöge megegyezik a második háromszög egyik szögével. Mekkorák lehetnek a két háromszög szögei?

Legyenek az egyik háromszög oldalai a, a, b, míg a másiké a, b, b. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $a < b$ (a feladat szövege nem tesz különbséget a két háromszög között; és tudjuk, hogy nem szabályosak a háromszögek, tehát $a \neq b$).

Vizsgáljuk meg, hogyan helyezkedhet el a két háromszög egyenlő szöge.

A két háromszög szárszöge nem egyezhet meg, mivel ha egymásra helyeznénk a háromszögeket úgy, hogy a szárszögük egybeessen, akkor az alábbi ábrát kapnánk:

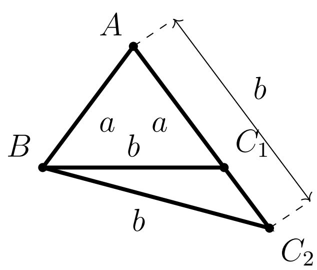


Ha a két háromszögben a szárszögek megegyeznek, akkor az alapon fekvő szögek is. Ezért B_1C_1 és B_2C_2 párhuzamos kell, hogy legyen. Így mivel $a = AB_1 < AB_2 = b$, nyilvánvaló, hogy $B_1C_1 < B_2C_2$.

Ezzel együtt azonban $B_1C_1 = a$ és $B_2C_2 = b$, azaz $b < a$, ellentmondva a feltevésünknek.

Ha a két háromszög alapon fekvő szögei lennének egyenlők, akkor a szárszögeknek is egyenlőknek kellene lenniük. Tehát csak az lehetséges, hogy az egyik háromszög alapon fekvő szöge egyezik meg a másik háromszög szárszögével.

<u>1. eset:</u> Az a, a, b oldalú háromszög szárszöge egyenlő az a, b, b oldalú háromszög alapon fekvő szögeivel. Helyezzük most is egymásra a háromszögeket úgy, hogy az azonos méretű szögek egybeessenek. Ekkor az alábbi szerkezetű ábrát kapjuk:



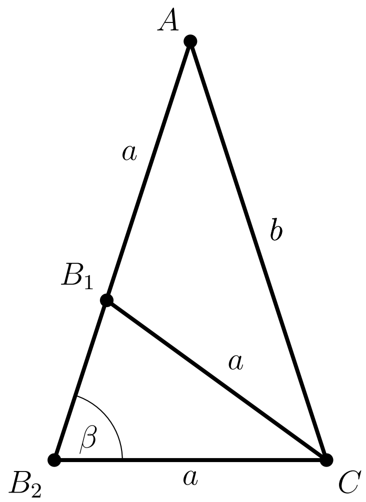
Itt $AB = AC_1 = a$, illetve $BC_1 = AC_2 = BC_2 = b$.

Ekkor C_1BC_2-nek olyan egyenlőszárú háromszögnek kellene lennie, amelynek C_1-nél van az alapon fekvő szöge.

De ez lehetetlen, mivel C_1-nél tompaszögnek kell lennie ebben a háromszögben (hiszen az ABC_1 egyenlő szárú háromszög C-nél levő szöge hegyesszög, mivel alapon fekvő szög).

2. eset: Az a, a, b oldalú háromszög alapon fekvő szöge egyenlő az a, b, b oldalú háromszög szárszögével. Helyezzük ezúttal is egymásra a háromszögeket úgy, hogy az azonos méretű szögek egybeessenek.

Ekkor az alábbi szerkezetű ábrát kapjuk:



Jelölje az a, b, b oldalú AB_2C háromszög alapon fekvő szögeinek nagyságát β,
azaz legyen $AB_2C\sphericalangle = B_2CA\sphericalangle = \beta$. Ekkor $B_2AC\sphericalangle = 180° - 2\beta$.
Mivel $B_1C = B_2C = a$, ezért B_1B_2C háromszög is egyenlő szárú, amiből

$$CB_1B_2\sphericalangle = \beta \quad \text{és} \quad B_2CB_1\sphericalangle = 180° - 2\beta.$$

Innen a AB_1C háromszög (ez éppen az a, a, b oldalú egyenlő szárú háromszög) szögeit mind fel tudjuk írni β segítségével:

- Alapon felvő szögei: $B_1CA\sphericalangle = CAB_2\sphericalangle = 180° - 2\beta$
- Szárszöge: $AB_1C\sphericalangle = 180° - CB_1B_2\sphericalangle = 180° - \beta$.

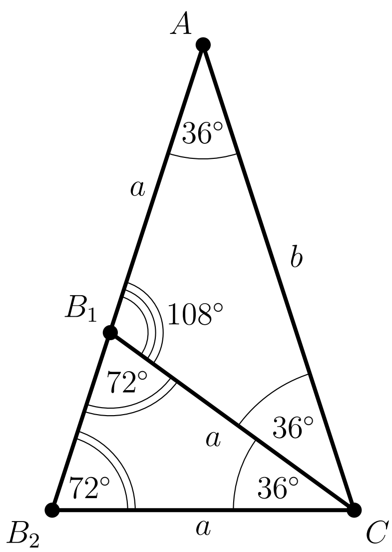
Ezek összege $180°$ kell, hogy legyen, azaz:

$$\begin{aligned} 180° &= 180° - 2\beta + 180° - 2\beta + 180° - \beta \qquad / + 5\beta - 180° \\ 5\beta &= 360° \\ \beta &= 72° \end{aligned}$$

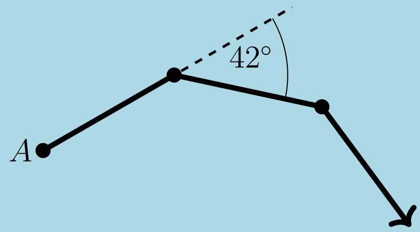
Így persze $B_1CA\sphericalangle = CAB_2\sphericalangle = 180° - 2\beta = 36°$
és $AB_1C\sphericalangle = 180° - 108°$.
Tehát azt kaptuk, hogy az egyetlen lehetséges megoldás:

- Az a, a, b oldalú háromszög szögei: $36°, 36°, 108°$.
- Az a, b, b oldalú háromszög szögei: $36°, 72°, 72°$.

Ezekkel a szögekkel valóban létezik az összes feltételnek eleget tevő háromszög-pár: a 2. eset viszgálatakor megadott AB_1C és AB_2C háromszögek éppen ilyenek.
(De gondolhatunk arra is, hogy egy szabályos ötszögben két átló és egy oldal az első, míg két oldal és egy átló a második típusú egyenlő szárú háromszöget határozza meg.)

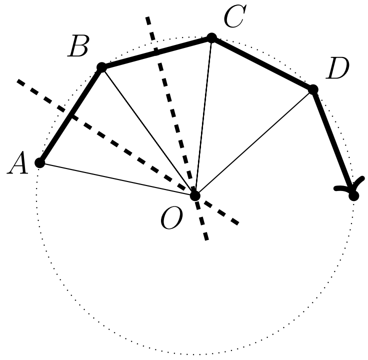


3. Egy csiga elindul az A pontból valamilyen irányba. Állandó nagyságú sebességgel, szakaszonként egyenesen halad, irányt csak minden egész órakor vált, ilyenkor 42 fokkal jobbra fordul.
Mennyi idő múlva ér először vissza az A pontba?
Az ábra a csiga mozgásának első 3 órájáról készült.



A fő észrevétel, hogy ha minden órában megjelöljük azt a pontot, ahol a csiga tartózkodik, akkor ezek a pontok egy körön vannak.

Ezt elegendő az első négy, A, B, C és D pontok esetén igazolni, utána például a B, C, D és E pontokra hasonló érvelés bizonyítja, hogy E is ugyanazon a körön van.



Legyen AB és BC szakaszfelező merőlegesének (létező) metszéspontja O. Ekkor $AO = BO = CO$, továbbá ABO és BCO egybevágó egyenlő szárú háromszögek. A csiga ,,lépései" egyenlő hosszúak, az elfordulás szöge mindig azonos, ezért ABC és BCD is egybevágó, ahol B és C felel meg egymásnak. Innen már következik, hogy $ABCO$ és $BCDO$ egybevágó deltoidok, így $DO = CO$ is teljesül.

Gondolhatunk tehát úgy a csiga mozgására, hogy minden órában egy ugyanakkora körívet tesz meg az előbb leírt körön, mindig azonos irányban haladva. Érdemes ezért a csiga egész órákban elfoglalt pozícióját az OA-hoz viszonyított elfordulással jellemezni. Ehhez az AOB szög értékére van szükségünk.

Egyszerű szögszámolással $ABC\sphericalangle = 180° - 42° = 138°$. Innen $OAB\sphericalangle = ABO\sphericalangle = 69°$, végül $AOB\sphericalangle = 42°$.

(Ha valaki ismeri a kerületi és középponti szögek tételét, akkor azzal is eljuthat ide.)

Tehát minden órában 42 fokkal ,,fordul el" a csiga, így az a kérdés, hogy melyik a legkisebb n pozitív egész, amelyre $n \cdot 42$ a 360 többszöröse, avagy $n \cdot 7$ a 60 többszöröse. Mivel 7 és 60 relatív prímek, ezért a legkisebb ilyen érték az $n = 60$. Tehát 60 óra kell a csigának, hogy visszaérjen A-ba.

4. Egy 7×7-es táblázatba beírtuk az $1, 2, 3, \ldots, 49$ számokat úgy, hogy a szomszédos számok mindig oldalszomszédos mezőkön legyenek. Lehetséges-e, hogy ha 7-tel maradékosan osztjuk a beírt számokat, akkor minden sorban és minden oszlopban szerepel mind a hétféle maradék?

Színezzük ki a táblázatot sakktáblaszerűen. Legyen a bal alsó mező fekete. Ekkor a táblán 25 fekete és 24 fehér mező van. Mivel a számot felváltva írjuk fekete és fehér mezőkre, így az 1-es számot fekete mezőre kell írni.

Írjuk rá minden sorra és oszlopra, hogy az hányadik sor, illetve oszlop, majd minden mezőre írjuk rá a sorszámának és oszlopszámának az összegét.

Ekkor az összeg a fekete mezőkön páros, a fehér mezőkön páratlan lesz.

Nézzük meg a 7-tel osztva 1 maradékot adó számokat: 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43. Ezek közül 4 páratlan és 3 páros szám van, vagyis 4 szám lesz fekete, 3 szám lesz fehér mezőn.

Az előző megállapítás alapján az ehhez a 7 mezőhöz tartozó összegeknek az összege páratlan lesz.

Mivel minden sorból és oszlopból egy számot választottunk ki, így ennek az összegnek 56-nak kell lennie, ami ellentmondás.

LII. verseny 2022–2023.

Feladatok

5. osztály **Megyei forduló**

1. Egy szög háromszorosa tompaszög, az ötszöröse viszont homorúszög. Hányféle lehet a szög nagysága, ha fokban mérve egész szám?

2. Arisztid bált rendez a kastélyában, ezért üvegpoharakat kért kölcsön Taszilótól. Tasziló 100 üvegpoharat küldött Arisztidnek. A poharakat Jean, az inas szállította át, de sajnos útközben a poharak egy része eltört. Arisztid minden egyes épségben leszállított pohárért 300 forint borravalót adott Jeannak, Tasziló viszont 900 forintos büntetést fizettetett Jeannal minden egyes összetört pohárért. Hány poharat tört össze Jean, ha a kapott borravalóból a büntetés kifizetése után 24000 forintja maradt?

3. Jelöljük meg egy kockának két kitérő élét zölddel. Ki lehet-e választani egy harmadik élt a kockán úgy, hogy az a zöld élek közül
   (a) az egyikkel párhuzamos, a másikat metszi?
   (b) mindkettőt metszi?
   (c) mindkettővel párhuzamos?

   Amelyik feladatrésznél ki lehet választani, rajzold le, hogyan; amelyiknél nem, indokold meg, miért nem.

4. Levente egy négyzet alakú papírt egy egyenes vágással két részre osztott. Ezután az egyik darabot egy újabb egyenes vágással megint két részre osztotta. Így három darab sokszög alakú papírlapja lett, melyek mindegyikére ráírta, hogy hány oldalú sokszög. Ezt a három számot összeszorozta. Mi lehetett a kapott szorzat?
   Keress példát minél többféle lehetséges szorzatra, és minden szorzathoz rajzolj egy lehetséges feldarabolást. *Nem kell indokolnod, hogy más lehetőség nincsen.*

5. Egy utcában 5 ház van, melyekben sorban balról jobbra a következő családok laknak: Almási, Bodnár, Csukás, Dobó és Erdős család. Megkérdeztük a házak lakóit az utcában élő gyerekekről, mire a következő válaszokat kaptuk:

   - Almási család: Az utcában 9 gyerek van, az életkoruk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 illetve 10 év.
   - Bodnár család: A két szomszédban lakó gyerekek életkorának összege megegyezik a mi családunkban a gyerekek életkorának összegével.
   - Csukás család: Egy gyerek van a családban. Az egyik szomszédban csak nála fiatalabb, a másik szomszédban csak nála idősebb gyerekek laknak.
   - Dobó család: Az utcában egyik családnak sincs kettőnél több gyermeke.
   - Erdős család: Az utcában bármely két azonos házban élő gyerek közt legalább 3 év korkülönbség van.

   Hány éves gyerekek laknak az egyes házakban?

6. osztály — Megyei forduló

1. Arisztid bált rendez a kastélyában, ezért üvegpoharakat kért kölcsön Taszilótól. Tasziló 100 üvegpoharat küldött Arisztidnek. A poharakat Jean, az inas szállította át, de sajnos útközben a poharak egy része eltört. Arisztid minden egyes épségben leszállított pohárért 300 forint borravalót adott Jeannak, Tasziló viszont 900 forintos büntetést fizettetett Jeannal minden egyes összetört pohárért. Hány poharat tört össze Jean, ha a kapott borravalóból a büntetés kifizetése után 24000 forintja maradt?

2. Levente egy négyzet alakú papírt egy egyenes vágással két részre osztott. Ezután az egyik darabot egy újabb egyenes vágással megint két részre osztotta. Így három darab sokszög alakú papírlapja lett, melyek mindegyikére ráírta, hogy hány oldalú sokszög. Ezt a három számot összeszorozta. Mi lehetett a kapott szorzat?
   Keress példát minél többféle lehetséges szorzatra, és minden szorzathoz rajzolj egy lehetséges feldarabolást. *Nem kell indokolnod, hogy más lehetőség nincsen.*

3. 12 focista együtt nyaral. Mindenkinek ugyanannyi honfitársa van jelen, és mindenkinek 1-gyel több klubtársa van jelen, mint honfitársa. Hány klubcsapatból lehetnek? Határozd meg az összes lehetőséget.
   Minden játékosnak pontosan egy hazája van és pontosan egy klubnak tagja.

4. Igaz-e, hogy 200-nál több különböző háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege legalább annyi, mint a számjegyek szorzata?

5. Felírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ számokat valamilyen sorrendben egy sorba. Ezután minden szám alá odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra, így kaptunk a második sorban hat újabb számot. Ezek mindegyike alá is odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra. Ezt a lépést ismételgettük, de amint leírtunk egy olyan sort, amiben csak a 0 szerepelt, befejeztük az eljárást.
   Legfeljebb hány sort írhattunk egymás alá?

7. osztály

Megyei forduló

1. Néhány focista együtt nyaral, összesen 8 országból. Minden játékosnak 3 klubtársa és 2 honfitársa van jelen. Hány klubcsapatból érkeztek a nyaralásra?
Minden játékosnak pontosan egy hazája van és pontosan egy klubnak tagja.

2. Luca téglalap alakú kertjében hagymát és répát termeszt. A kertet úgy alakította ki, hogy mind a négy oldala mentén 1 m széles sávban termeszt hagymát, a megmaradó belső részben pedig répát. Így pontosan ugyanakkora területen termeszt hagymát és répát.
A kert egyik oldala 5 m hosszú. Milyen hosszú a másik oldal?

3. Karcsi telefonja különböző városok hőmérsékletértékét is kijelzi, napszakonként, Celsius-fokban mérve. Egy éjszaka során Szegeden és Balassagyarmaton estéről reggelre ugyanannyi Celsius-fokkal lett hidegebb. Karcsi azt is észrevette, hogy ha kivonja a szegedi reggeli hőmérsékletértékből az estit, akkor a balassagyarmati reggeli értéket kapja, ha viszont összeadja a balassagyarmati esti és reggeli hőmérsékletértékeket, az pont annyi, mint a szegedi reggeli hőmérsékletérték ellentettjének kétszerese. Ha a szegedi esti hőmérséklet 6°C volt, mekkora volt a reggeli?

4. Felírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ számokat valamilyen sorrendben egy sorba. Ezután minden szám alá odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra, így kaptunk a második sorban hat újabb számot. Ezek mindegyike alá is odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra. Ezt a lépést ismételgettük, de amint leírtunk egy olyan sort, amiben csak a 0 szerepelt, befejeztük az eljárást.
Legfeljebb hány sort írhattunk egymás alá?

5. (a) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 2 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
(b) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 3 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
A sokszögnek nem lehet sem $0°$-os, sem $180°$-os szöge. A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.

8. osztály

Megyei forduló

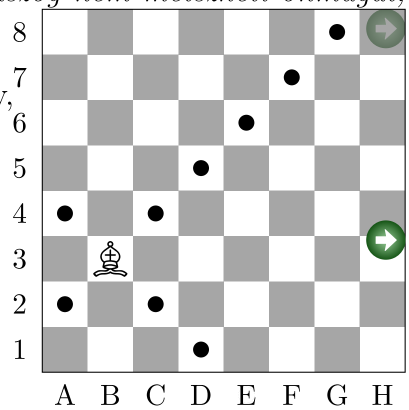
1. Egy szög kétszerese hegyesszög, háromszorosa tompaszög, az ötszöröse pedig homorúszög. Hányféle lehet a szög nagysága, ha fokban mérve egész szám?

2. Melyik a nagyobb és mennyivel: a 100-nál nem nagyobb, 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adó természetes számok négyzeteinek az összege vagy a 100-nál nem nagyobb, 4-gyel osztva 2 vagy 3 maradékot adó természetes számok négyzeteinek az összege?

3. (a) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 2 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
(b) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 3 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
A sokszögnek nem lehet sem $0°$*-os, sem* $180°$*-os szöge. A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.*

4. Hányféleképpen lehet egy sakktáblán 14 mezőt megjelölni úgy, hogy egy futó egyik megjelölt mezőről se tudjon egy lépésben eljutni egy másik megjelölt mezőre?

A futó átlósan lép, tehát például a B3 mezőn álló futó az ábrán pöttyel megjelölt mezőkre juthat el egy lépésben.



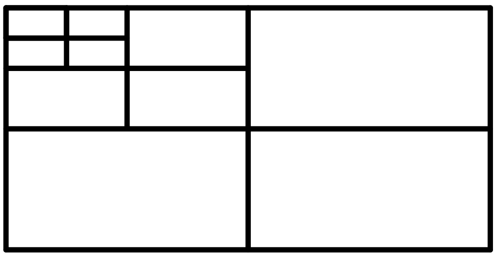
5. Az a számot leírtam kétszer egymás után, így kaptam a b számot. Érdekes módon b osztható a^2-tel. Mennyi lehet a hányados?
Az a és b számok tízes számrendszerben felírt pozitív egészek.

5. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Panka gondolt egy számra. Ezután kivont belőle 1-et, majd hozzáadott 2-t, majd kivont belőle 3-at, majd hozzáadott 4-et, és így tovább, míg végül kivont belőle 99-et, aztán hozzáadott 100-at, és így 53-at kapott. Melyik számra gondolt Panka?

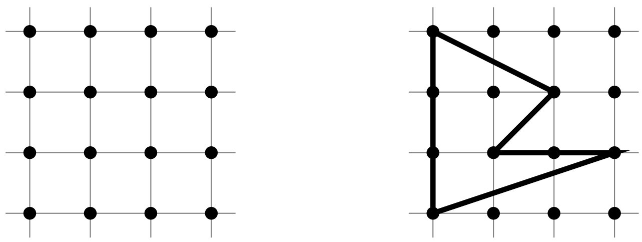
2. Öt testvér életkora: 11, 12, 13, 14 és 15 év. A 14 évesnek egy húga, egy nővére és két fiútestvére van. A 12 évesnek egy öccse, egy bátyja és két lánytestvére van.
Hány lánytestvére lehet a 13 évesnek?

3. Egy téglalapnak összekötöttük a szemközti oldalfelező pontjait, ezáltal négy egyforma területű téglalapra bontottuk. A bal felső téglalappal ugyanezt az eljárást megismételtük még kétszer, így összesen tíz téglalapra bontottuk fel a nagy téglalapot, az ábrán látható módon.



A tíz téglalap közül néhányat szürkére színeztünk úgy, hogy bármely két szürke téglalap legfeljebb egy pontban érintkezzen. Legfeljebb mennyi lehet a szürke téglalapok területeinek az összege, ha a bal felső téglalap 1 cm^2 területű?

4. Egy matekfüzetben kijelöltünk 16 rácspontot a bal oldali ábrán látható elrendezésben.



A jobb oldali ábrán egy olyan ötszög látható, amelynek minden csúcsa a kijelölt rácspontok közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(a) Rajzolj egy olyan hatszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(b) Rajzolj egy olyan hétszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(c) Rajzolj egy olyan nyolcszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

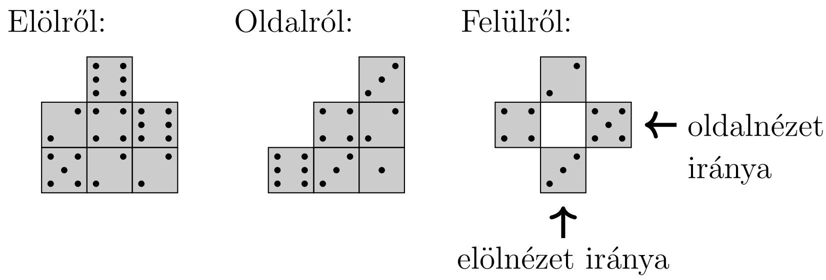
A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.

5. Legfeljebb hány pozitív egész számot lehet megadni úgy, hogy bármely kettő szorzata különböző számjegyre végződjön?

5. osztály, 2. nap **Országos döntő**

1. A mesebeli lények találkozóján tündérek, manók és óriások vettek részt. Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak. Minden manó adott egy szál virágot minden tündérnek. Így összesen 72 szál virág került átadásra. Minden tündér adott ajándékba egy szelet csokit minden óriásnak. Így összesen 48 szelet csoki került átadásra. Minden óriás adott ajándékba egy üveg szörpöt minden manónak. Hány üveg szörp kerülhetett átadásra összesen?

2. Szabályos dobókockák összeragasztásával tornyokat készítettünk, majd felragasztottuk ezeket az asztalra. Az elkészült építmény az ábrán látható módon néz ki elölről, oldalról, illetve felülről.
   Összesen hány pötty van a ragasztós oldalakon?

   A felülnézeti ábrán egy-egy nyíllal jelöltük az elölnézet és az oldalnézet irányát.
   A ragasztásoknál mindig teljes kockalapok érintkeznek egymással, illetve az asztallal.
   Egy dobókocka akkor szabályos, ha a szemközti lapjain összesen 7 pötty van.

3. Leírtam egymás mögé a számokat 1-től 2023-ig szünet vagy egyéb elválasztás nélkül, így kaptam egy hatalmas számot: 1234567891011 . . . 02120222023. Hányszor fordul elő ebben a számban, hogy három egymást követő számjegy 023, ebben a sorrendben?

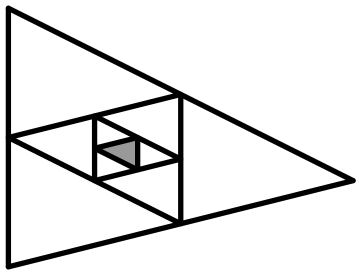
4. Joe bácsi az űrutazásról hazatérve hozott három holdkövet és három marskövet, melyeket szét szeretne osztani három fia között úgy, hogy mindenki egy holdkövet és egy marskövet kapjon. Sajnos már nem tudja, hogy melyik kő melyik égitestről származik, de szerencséjére van egy gépe, amely el tudja dönteni, hogy a gépbe berakott két kő ugyanarról az égitestről származik-e. Legalább hányszor kell használnia a gépet ahhoz, hogy biztosan szét tudja osztani jól a köveket?

   A gép működése a következő: Ha a két betett kő ugyanarról az égitestről származik, akkor egy zöld lámpa villan fel. Ha különböző égitestről származnak, akkor egy piros lámpa villan fel. A gép semmilyen más információt nem ad. Nem lehet egyszerre kettőnél több követ betenni.

   Keress megoldást minél kevesebb géphasználatra és mutasd meg, hogy annyi miért elegendő. Azt nem kell indokolni, hogy ennél kevesebből nem lehet megcsinálni.

1. Panka gondolt egy számra. Ezután kivont belőle 1-et, majd hozzáadott 2-t, majd kivont belőle 3-at, majd hozzáadott 4-et, és így tovább. Amikor befejezte, 39-cel kisebb számot kapott eredményül, mint amelyre eredetileg gondolt.
   Melyik számot adhatta hozzá vagy vonhatta ki utoljára Panka?

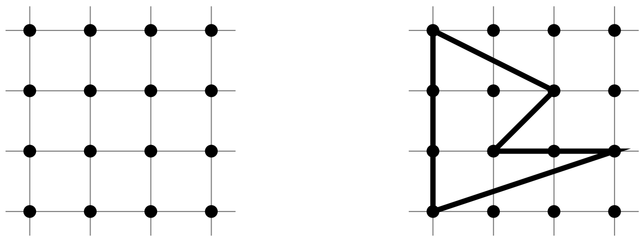
2. Egy háromszögnek összekötöttük az oldalfelező pontjait, ezáltal négy egyforma területű háromszögre bontottuk. A középső háromszöggel ugyanezt az eljárást megismételtük még kétszer. A legbelső háromszöget szürkére színezve az alábbi ábrát kaptuk.

   Ezután minden olyan háromszöget, melynek a belsejében nincs további szakasz berajzolva, sárgára vagy szürkére színeztünk úgy, hogy ha két háromszög több, mint egy pontban találkozik, akkor különböző színűek legyenek.

   Hányszor akkora a sárga háromszögek területeinek összege, mint a szürkéké?

3. Egy matekfüzetben kijelöltünk 16 rácspontot a bal oldali ábrán látható elrendezésben.

   A jobb oldali ábrán egy olyan ötszög látható, amelynek minden csúcsa a kijelölt rácspontok közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

   a) Rajzolj egy olyan hatszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

   b) Rajzolj egy olyan hétszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

   c) Rajzolj egy olyan nyolcszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

   A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.

4. Csaba bácsi felírt 89 egymást követő egész számot. Csenge összeadta az első 45 számot, Csongor pedig a többit. Csodák csodájára ugyanazt a számot kapták összegként.
   Mi volt a legnagyobb szám, amelyet Csaba bácsi felírt?

5. Legfeljebb hány pozitív egész számot lehet megadni úgy, hogy bármely kettő összege különböző számjegyre végződjön?

6. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. A mesebeli lények találkozóján tündérek, manók és óriások vettek részt. Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak. Minden manó adott egy szál virágot minden tündérnek. Így összesen 72 szál virág került átadásra. Minden tündér adott ajándékba egy szelet csokit minden óriásnak. Így összesen 48 szelet csoki került átadásra. Minden óriás adott ajándékba egy üveg szörpöt minden manónak. Hány üveg szörp kerülhetett átadásra összesen?

2. Öt különböző magasságú ember mindegyike két-két állítást mondott, melyek némelyike igaz, némelyike hamis volt (lehetséges, hogy ugyanazon ember egyik állítása igaz, míg a másik hamis).

   Anna: ,,Magasabb vagyok, mint Béla.” ,,Két magasabb és két alacsonyabb ember van nálam.”

   Béla: ,,Magasabb vagyok, mint Endre.” ,,Dénes a legmagasabb.”

   Csaba: ,,Anna mindkét állítása igaz.” ,,Magasabb vagyok, mint Endre.”

   Dénes: ,,Alacsonyabb vagyok, mint Csaba.” ,,Endre a második legmagasabb.”

   Endre: ,,Béla mindkét állítása hamis.” ,,Magasabb vagyok, mint Anna.”

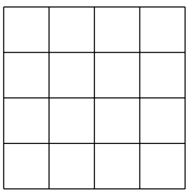
   a) Lehetséges-e, hogy pontosan 1 állítás hamis a 10 állítás közül?
   b) Lehetséges-e, hogy pontosan 2 állítás hamis a 10 állítás közül?

3. Joe bácsi az űrutazásról hazatérve hozott három holdkövet és három marskövet, melyeket szét szeretne osztani három fia között úgy, hogy mindenki egy holdkövet és egy marskövet kapjon. Sajnos már nem tudja, hogy melyik kő melyik égitestről származik, de szerencséjére van egy gépe, amely el tudja dönteni, hogy a gépbe berakott két kő ugyanarról az égitestről származik-e. Legalább hányszor kell használnia a gépet ahhoz, hogy biztosan szét tudja osztani jól a köveket?

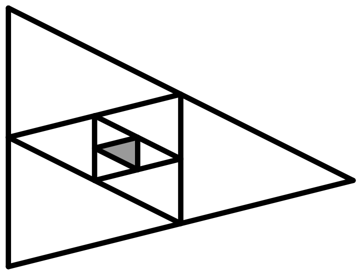
   A gép működése a következő: Ha a két betett kő ugyanarról az égitestről származik, akkor egy zöld lámpa villan fel. Ha különböző égitestről származnak, akkor egy piros lámpa villan fel. A gép semmilyen más információt nem ad. Nem lehet egyszerre kettőnél több követ betenni.

   Keress megoldást minél kevesebb géphasználatra és mutasd meg, hogy annyi miért elegendő. Azt nem kell indokolni, hogy ennél kevesebből nem lehet megcsinálni.

4. A tornatanár egy 4×4-es rácsot rajzolt az iskolaudvarra. A rács mind a 16 mezőjére felállt egy-egy diák, úgy, hogy valamelyik rácsvonallal párhuzamos irányba néz. A tornatanár néha tapsol egyet. Ha két élszomszédos mezőn álló diák éppen egymás felé néz, akkor a tapsra mindketten 90°-os fordulatot végeznek jobbra. Ezen kívül semmilyen más mozgást nem végeznek. Legfeljebb hány fordulatot végezhet a legtöbb fordulatot végző diák?



1. Egy háromszögnek összekötöttük az oldalfelező pontjait, ezáltal négy egyforma területű háromszögre bontottuk. A középső háromszöggel ugyanezt az eljárást megismételtük még kétszer. A legbelső háromszöget szürkére színezve az alábbi ábrát kaptuk.



Ezután minden olyan háromszöget, melynek a belsejében nincs további szakasz berajzolva, sárgára vagy szürkére színeztünk úgy, hogy ha két háromszög több, mint egy pontban találkozik, akkor különböző színűek legyenek.

Hányszor akkora a sárga háromszögek területeinek összege, mint a szürkéké?

2. Egy csapat működési szabályzata rögzíti, hogy rendkívüli esemény esetén a csapat vezetője kiket hív fel a hírrel, s azok, akik megkapták a hírt, kit kell, hogy felhívjanak az információ továbbadása végett. Ezt nevezzük riadóláncnak. A riadólánc jól működik, tehát minden csapattagot csak egyszer hívnak fel (a vezetőn kívül, akit nem hív fel senki), és a hír mindenkihez eljut. Érdekes módon a riadólánc felépítése olyan, hogy a vezetőn kívül mindenki annyi embert hív fel, ahányat az őt értesítő őutána még felhív. Hány embert kell a vezetőnek felhívnia, ha tudjuk, hogy a csapatban 100-nál többen, de 200-nál kevesebben vannak?

3. Egy ötjegyű számot *csattanós*nak hívunk, ha a százasok és a tízesek helyén azonos számjegy áll, és ennél nagyobb számjegy áll az egyesek helyén. Hány 9-cel osztható csattanós szám van?

4. Egy végtelen számsorozat első tagja 2, második tagja 1. Ezután a sorozat minden tagja az előző két tag összegének reciproka. Azaz a harmadik tag $2+1=3$ reciproka, vagyis $\frac{1}{3}$; a negyedik tag $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ reciproka, vagyis $\frac{3}{4}$. Szerepel-e a sorozatban 2-nél nagyobb szám?

5. Anna és Béla kezében is öt-öt számjegykártya van, Annánál az $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$, Bélánál pedig a $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$. Felváltva balról jobbra rakják le a számjegykártyákat, így egy tízjegyű számot képezve. Anna kezd. Mi a legnagyobb kettőhatvány, amelyről Béla garantálni tudja (Anna bármilyen stratégiája esetén), hogy osztani fogja a kapott tízjegyű számot?

7. osztály, 2. nap Országos döntő

1. Öt különböző magasságú ember mindegyike két-két állítást mondott, melyek némelyike igaz, némelyike hamis volt (lehetséges, hogy ugyanazon ember egyik állítása igaz, míg a másik hamis).

   Anna: ,,Magasabb vagyok, mint Béla.” ,,Két magasabb és két alacsonyabb ember van nálam.”

   Béla: ,,Magasabb vagyok, mint Endre.” ,,Dénes a legmagasabb.”

   Csaba: ,,Anna mindkét állítása igaz.” ,,Magasabb vagyok, mint Endre.”

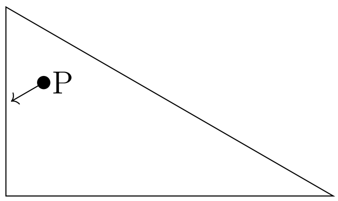
   Dénes: ,,Alacsonyabb vagyok, mint Csaba.” ,,Endre a második legmagasabb.”

   Endre: ,,Béla mindkét állítása hamis.” ,,Magasabb vagyok, mint Anna.”

   a) Lehetséges-e, hogy pontosan 1 állítás hamis a 10 állítás közül?

   b) Lehetséges-e, hogy pontosan 2 állítás hamis a 10 állítás közül?

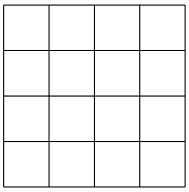
2. Egy derékszögű háromszög alakú, lyukak nélküli biliárdasztal egyik csúcsánál az oldalak 30°-os szöget zárnak be egymással. Egy biliárdgolyót elindítunk az ábrán jelölt módon, a P pontból úgy, hogy az először az asztal legrövidebb oldalát éri el annak egy belső pontjában. A golyó haladási iránya 60°-os szöget zár be a legrövidebb oldallal.



   A golyó útját vizsgálva azt látjuk, hogy minden egyes alkalommal, amikor találkozik a fallal, tökéletesen pattanva halad tovább, vagyis a falhoz érkező, valamint a faltól elinduló haladási iránya ugyanakkora szöget zár be a fallal. Hány pattanás után lesz a golyó újra a P pontban?

3. Van 1000 kártya, melyek 000-tól 999-ig vannak megszámozva, és 100 doboz, melyek 00-tól 99-ig vannak megszámozva. Egy kártyát egy dobozba akkor lehet belerakni, ha a doboz száma a kártya számából egy számjegy elhagyásával kapható meg (így például a 627-es számú kártya a 27-es, a 67-es vagy a 62-es számú dobozok valamelyikébe tehető).
   Dobozokba lehet-e tenni az összes kártyát úgy, hogy 50 doboz üresen maradjon?

4. A tornatanár egy 4×4-es rácsot rajzolt az iskolaudvarra. A rács mind a 16 mezőjére felállt egy-egy diák, úgy, hogy valamelyik rácsvonallal párhuzamos irányba néz. A tornatanár néha tapsol egyet. Ha két élszomszédos mezőn álló diák éppen egymás felé néz, akkor a tapsra mindketten $90°$-os fordulatot végeznek jobbra. Ezen kívül semmilyen más mozgást nem végeznek. Lehetséges-e, hogy a 30. tapsnál még fordul valaki?

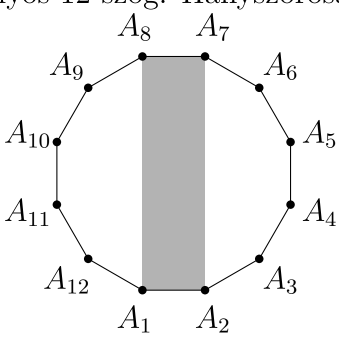


8. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Egy termék árát növelték p %-kal, majd csökkentették p %-kal, így a végső ára az eredeti árhoz képest 9 %-kal kisebb lett. Határozzuk meg p értékét.

2. Egy ötjegyű számot *csattanós*nak hívunk, ha a százasok és a tízesek helyén azonos számjegy áll, és ennél nagyobb számjegy áll az egyesek helyén. Hány 9-cel osztható csattanós szám van?

3. Legyen $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ egy szabályos 12-szög. Hányszorosa a 12-szög területe az $A_1A_2A_7A_8$ téglalap területének?



4. Anna és Béla kezében is öt-öt számjegykártya van, Annánál az $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$, Bélánál pedig a $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$. Felváltva balról jobbra rakják le a számjegykártyákat, így egy tízjegyű számot képezve. Anna kezd. Mi a legnagyobb kettőhatvány, amelyről Béla garantálni tudja (Anna bármilyen stratégiája esetén), hogy osztani fogja a kapott tízjegyű számot?

5. A bergengóc vásáron kétféle fizetőeszköz létezik: arany és ezüst. Tudjuk, hogy 1 kecske és 5 birka 4 aranyba és 8 ezüstbe, 7 kecske és 2 birka 11 aranyba és 8 ezüstbe, 3 kecske és 4 birka 7 aranyba és 6 ezüstbe kerül. Szeretnénk 2 kecskét és 3 birkát venni. Hány ezüstöt kell még adnunk, ha már 2 aranyat adtunk az eladónak?

8. osztály, 2. nap **Országos döntő**

1. Anna, Bea, Cili és Dóra leült egy körbe. Anna felírta két kedvenc számát (különböző pozitív egészek) egy lapra, majd továbbadta jobbra. Amikor valaki megkapta a lapot, kiradírozta a rajta lévő két számot, és helyükre felírta a kiradírozott két szám összegét és különbségét, majd továbbadta a lapot jobbra. Mikor a lap visszaért Annához, azt látta, hogy a lapon szereplő két szám közül az egyik megegyezik az általa felírt kisebb számmal, míg a másik szám az általa felírt nagyobb számnál 42-vel nagyobb. Mi Anna két kedvenc száma?
Két szám különbségét úgy számítjuk, hogy a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbiket.

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek az összes osztója közül a negyedik legnagyobb a 42?
Például a 12 osztói: 1, 2, 3, 4, 6 és 12, így a negyedik legnagyobb osztója a 3.

3. Az $ABCD$ egységnyi oldalhosszúságú négyzetben az AB oldal felezőpontja E, a BC oldal felezőpontja F. Az AF és DE egyenesek metszéspontja M. Milyen hosszú a CM szakasz?

4. Van 100 000 kártyánk, melyek 00000-tól 99999-ig vannak megszámozva, és van 1000 dobozunk is, melyek 000-tól 999-ig vannak megszámozva. Egy kártyát egy dobozba akkor lehet belerakni, ha a doboz száma a kártya számából két számjegy elhagyásával kapható meg (így például a 40557-es kártya a 405-ös, a 407-es, a 455-ös, a 457-es, a 055-ös, a 057-es és az 557-es dobozok valamelyikébe tehető).
Bele lehet-e rakni a dobozokba az összes kártyát úgy, hogy legalább 666 doboz üresen maradjon?

Megoldások

5. osztály | Megyei forduló

1. Egy szög háromszorosa tompaszög, az ötszöröse viszont homorúszög. Hányféle lehet a szög nagysága, ha fokban mérve egész szám?

Jelöljük α-val a vizsgált szög nagyságát.

Az első feltétel szerint $90° < 3\alpha < 180°$, emiatt $30° < \alpha < 60°$.

A második feltétel szerint $180° < 5\alpha < 360°$, tehát $36° < \alpha < 72°$.

A kapott két feltételt összevetve a megfelelő szögekre $36° < \alpha < 60°$ teljesül.

Ezen határok közötti egész értékek:

$$\underbrace{37, 38, 39 \ldots, 58, 59}_{59-37+1=23 \text{ db}}$$

Tehát **a szög nagysága 23-féle lehet**.

2. Arisztid bált rendez a kastélyában, ezért üvegpoharakat kért kölcsön Taszilótól. Tasziló 100 üvegpoharat küldött Arisztidnek. A poharakat Jean, az inas szállította át, de sajnos útközben a poharak egy része eltört. Arisztid minden egyes épségben leszállított pohárért 300 forint borravalót adott Jeannak, Tasziló viszont 900 forintos büntetést fizettetett Jeannal minden egyes összetört pohárért. Hány poharat tört össze Jean, ha a kapott borravalóból a büntetés kifizetése után 24000 forintja maradt?

Ha Jean minden poharat épségben leszállított volna, akkor $100 \cdot 300 = 30000$ forint ütötte volna a markát. Minden egyes eltört pohár után elesett azonban a szállításért járó 300 forint borravalótól, továbbá 900 forint büntetést is kellett fizetnie, tehát tekinthetjük úgy, hogy poharanként 1200 forint veszteség érte.

Ha végül 24000 forinttal lett gazdagabb a lehetséges 30000 helyett, akkor 6000 forint volt a vesztesége, ami $6000 : 1200 = 5$, azaz **öt pohár** eltörésével jöhetett létre.

Ellenőrzés: Jean a 95 épségben leszállított pohárért $95 \cdot 300 = 28500$ forintot kapott, büntetésül pedig $5 \cdot 900 = 4500$ forintot fizetett, összesen tehát a borravalóból $28500 - 4500 = 24000$ Ft maradt meg.

3. Jelöljük meg egy kockának két kitérő élét zölddel. Ki lehet-e választani egy harmadik élt a kockán úgy, hogy az a zöld élek közül

   a) az egyikkel párhuzamos, a másikat metszi?

   b) mindkettőt metszi?

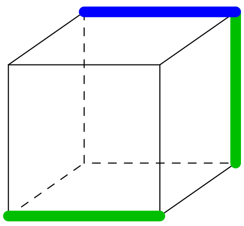
   - (c)] mindkettővel párhuzamos?

   Amelyik feladatrésznél ki lehet választani, rajzold le, hogyan; amelyiknél nem, indokold meg, miért nem.

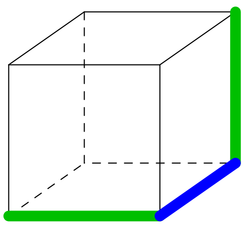
A két adott kitérő élt zölddel megjelöltük. (Bármely kitérő élpár esetén az az ábrán látható helyzetbe forgatható a kocka).

Az **a) és b) részben lehetséges a kiválasztás**, az alábbi ábrán kékkel bejelöltünk egy-egy megoldást:

a)



b)

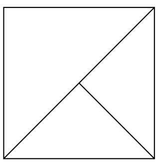


A **c) részre ugyanakkor nem létezhet megoldás**, mivel ha a kék él mindkét zöld éllel párhuzamos volna, akkor a zöld éleknek egymással is párhuzamosnak kellene lenniük.

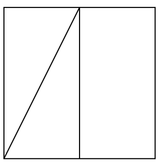
4. Levente egy négyzet alakú papírt egy egyenes vágással két részre osztott. Ezután az egyik darabot egy újabb egyenes vágással megint két részre osztotta. Így három darab sokszög alakú papírlapja lett, melyek mindegyikére ráírta, hogy hány oldalú sokszög. Ezt a három számot összeszorozta. Mi lehetett a kapott szorzat?
   Keress példát minél többféle lehetséges szorzatra, és minden szorzathoz rajzolj egy lehetséges feldarabolást. *Nem kell indokolnod, hogy más lehetőség nincsen.*

7-féle szorzat keletkezhet, mégpedig a következők:

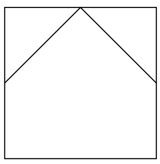
$3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{27}$



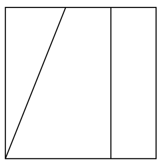
$3 \cdot 3 \cdot 4 = \mathbf{36}$



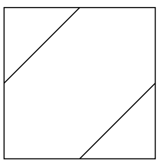
$3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{45}$



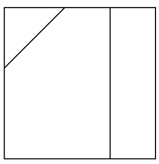
$3 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{48}$



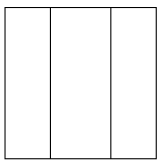
$3 \cdot 3 \cdot 6 = \mathbf{54}$



$3 \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{60}$



$4 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{64}$



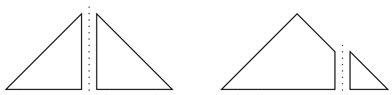
Hogyan található meg az összes lehetőség?

Első megközelítés. Először nézzük azt meg, hogy az első vágással milyen darabokat tudunk létrehozni.

Az eseteket jelölhetjük a keletkező sokszögek oldalszámával.

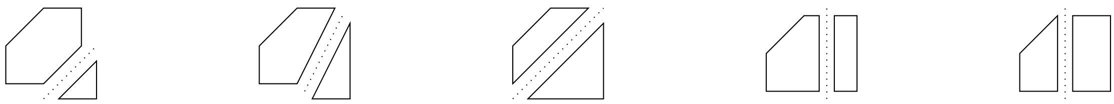
$$(4) \longrightarrow (3,5) \qquad (4) \longrightarrow (4,4) \qquad (4) \longrightarrow (3,3) \qquad (4) \longrightarrow (3,4)$$

A második lépésben vagy egy háromszöget, vagy egy négyszöget, vagy egy ötszöget vágunk ketté. Háromszögből indulva két lehetőségünk van:



$$(3) \longrightarrow (3,3) \qquad (3) \longrightarrow (4,3)$$

A négyszögek lehetséges felvágásainak oldalszámait már korábban (a négyzet szétvágásánál) megadtuk. Végül egy ötszöget ötféle módon vághatunk ketté, ha csak a keletkező darabok oldalszámára vagyunk kíváncsiak:



$$(5) \longrightarrow (6,3) \qquad (5) \longrightarrow (5,3) \qquad (5) \longrightarrow (4,3) \qquad (5) \longrightarrow (5,4) \qquad (5) \longrightarrow (4,4)$$

Az eddig felsorolt vágásokat kombinálva a következő hét eset állítható elő:

$$(3,3,3),(3,3,4),(3,3,5),(3,3,6),(3,4,4),(3,4,5),(4,4,4)$$

2. megközelítés. Vizsgáljuk meg, hogy egy vágással hogyan változhat az előttünk álló sokszögek oldalszámainak összege. Ha egy sokszöget egy átló mentén vágunk ketté, akkor az eredeti oldalak mellett két új oldal alkotja az új sokszögeket, hiszen a vágás egy-egy oldalt jelent mindkét keletkező sokszögben.

Ha a vágás egy csúcson és egy oldal belső pontján megy át, akkor az adott oldalból két oldal keletkezik (két külön sokszögben), ez eggyel növeli a sokszögek összes oldalainak számát, továbbá az előzőhöz hasonlóan a vágás két új oldalt ad, így összesen hárommal nő az oldalak száma.

Ha pedig a vágás két oldal egy-egy belső pontját köti össze, akkor az előzőhöz hasonló meggondolás alapján 4-gyel nő az oldalak száma.

A feladatban négyszögből indulunk ki és két vágást ejtünk egymás után, így legfeljebb 8-cal nőhet az oldalak száma, azaz nem lehet több 12-nél.

Mivel minden sokszög legalább három oldalból áll, így olyan számhármasokat jöhetnek szóba (a darabok oldalszámaiként), amelyek mindegyik tagja legalább 3, és az összegük legfeljebb 12. Ilyenből 7 különböző található:

$$3+3+3=9, \qquad 3+3+4=10, \qquad 3+3+5=11, \qquad 3+4+4=11,$$
$$3+3+6=12, \qquad 3+4+5=12, \qquad 4+4+4=12.$$

És ezek mindegyikéhez található alkalmas szétvágás (mint azt már ábráinkkal megmutattuk).

5. Egy utcában 5 ház van, melyekben sorban balról jobbra a következő családok laknak: Almási, Bodnár, Csukás, Dobó és Erdős család. Megkérdeztük a házak lakóit az utcában élő gyerekekről, mire a következő válaszokat kaptuk:

- Almási család: Az utcában 9 gyerek van, az életkoruk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 illetve 10 év.
- Bodnár család: A két szomszédban lakó gyerekek életkorának összege megegyezik a mi családunkban a gyerekek életkorának összegével.
- Csukás család: Egy gyerek van a családban. Az egyik szomszédban csak nála fiatalabb, a másik szomszédban csak nála idősebb gyerekek laknak.
- Dobó család: Az utcában egyik családnak sincs kettőnél több gyermeke.
- Erdős család: Az utcában bármely két azonos házban élő gyerek közt legalább 3 év korkülönbség van.

Hány éves gyerekek laknak az egyes házakban?

Az utcában összesen 9 gyerek van, a Csukás családban pedig csak 1, így a többi négy házban összesen 8 gyerek van. Mivel minden családban legfeljebb 2 gyerek van, így a másik négy családban 2-2 gyereknek kell lennie.

Mivel bármely két azonos házban élő gyerek közt legalább 3 év a különbség, így ahol két gyerek van, ott a fiatalabb testvér legfeljebb $10-3=7$ éves lehet. Hasonlóan, bármely idősebb testvérről tudjuk, hogy legalább $2+3=5$ éves.

Mivel a Csukás család egyik szomszédjában csak nála idősebb gyerekek laknak, így a Csukás család gyereke legfeljebb 6 éves lehet. Ezenkívül a másik szomszédban csak nála fiatalabb gyerekek laknak, így a Csukás család gyereke legalább 6 éves. Ezek alapján a Csukás család gyereke 6 éves, az egyik szomszédban a két gyerek 2 és 5 éves, míg a másik szomszédban lévő két gyerek 7 és 10 éves.

Mivel a Bodnár családban lévő gyerekek életkorainak összege megegyezik a szomszédban lévő gyerekek életkorainak összegével, így ebben a családban lakik a 7 és 10, a Dobó családban a 2 és 5 éves gyerek.

Ez alapján az Almási és Erdős családban lakik a 3, a 4, a 8 illetve a 9 éves gyerek. Ebből az Almási családban lakó két gyerek életkorának összege $10+7-6=11$. Ez csak úgy lehet, ha a 3 és a 8 éves gyerek lakik ott.

Ez alapján **a gyerekek életkorai az egyes családokban: Almási: 3 és 8, Bodnár: 7 és 10, Csukás: 6, Dobó: 2 és 5, Erdős: 4 és 9 év**. Ezek valóban teljesítik az összes feltételt.

1. Arisztid bált rendez a kastélyában, ezért üvegpoharakat kért kölcsön Taszilótól. Tasziló 100 üvegpoharat küldött Arisztidnek. A poharakat Jean, az inas szállította át, de sajnos útközben a poharak egy része eltört. Arisztid minden egyes épségben leszállított pohárért 300 forint borravalót adott Jeannak, Tasziló viszont 900 forintos büntetést fizettetett Jeannal minden egyes összetört pohárért. Hány poharat tört össze Jean, ha a kapott borravalóból a büntetés kifizetése után 24000 forintja maradt?

Ha Jean minden poharat épségben leszállított volna, akkor $100 \cdot 300 = 30000$ forint ütötte volna a markát. Minden egyes eltört pohár után elesett azonban a szállításért járó 300 forint borravalótól, továbbá 900 forint büntetést is kellett fizetnie, tehát tekinthetjük úgy, hogy poharanként 1200 forint veszteség érte.

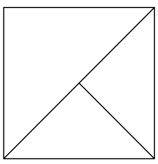
Ha végül 24000 forinttal lett gazdagabb a lehetséges 30000 helyett, akkor 6000 forint volt a vesztesége, ami $6000 : 1200 = 5$, azaz **öt pohár** eltörésével jöhetett létre.

Ellenőrzés: Jean a 95 épségben leszállított pohárért $95 \cdot 300 = 28500$ forintot kapott, büntetésül pedig $5 \cdot 900 = 4500$ forintot fizetett, összesen tehát a borravalóból $28500 - 4500 = 24000$ Ft maradt meg.

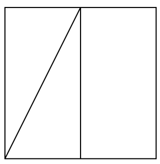
2. Levente egy négyzet alakú papírt egy egyenes vágással két részre osztott. Ezután az egyik darabot egy újabb egyenes vágással megint két részre osztotta. Így három darab sokszög alakú papírlapja lett, melyek mindegyikére ráírta, hogy hány oldalú sokszög. Ezt a három számot összeszorozta. Mi lehetett a kapott szorzat?
Keress példát minél többféle lehetséges szorzatra, és minden szorzathoz rajzolj egy lehetséges feldarabolást. *Nem kell indokolnod, hogy más lehetőség nincsen.*

7-féle szorzat keletkezhet, mégpedig a következők:

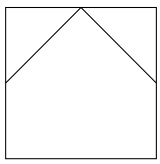
$3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{27}$



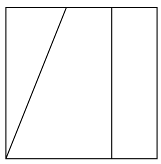
$3 \cdot 3 \cdot 4 = \mathbf{36}$



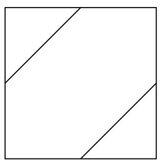
$3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{45}$



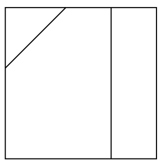
$3 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{48}$



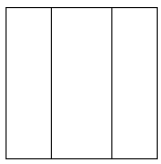
$3 \cdot 3 \cdot 6 = \mathbf{54}$



$3 \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{60}$

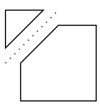


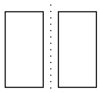
$4 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{64}$

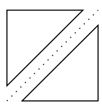


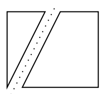
Hogyan található meg az összes lehetőség?

Először nézzük azt meg, hogy az első vágással milyen darabokat tudunk létrehozni.





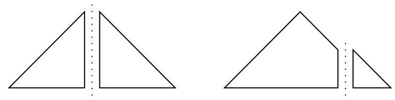




Az eseteket jelölhetjük a keletkező sokszögek oldalszámával.

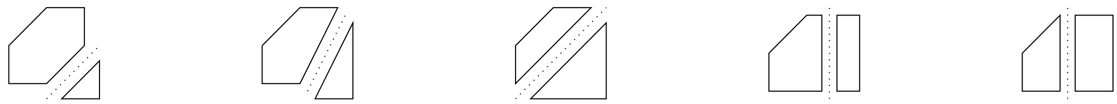
$$(4) \longrightarrow (3,5) \qquad (4) \longrightarrow (4,4) \qquad (4) \longrightarrow (3,3) \qquad (4) \longrightarrow (3,4)$$

A második lépésben vagy egy háromszöget, vagy egy négyszöget, vagy egy ötszöget vágunk ketté. Háromszögből indulva két lehetőségünk van:



$$(3) \longrightarrow (3,3) \qquad (3) \longrightarrow (4,3)$$

A négyszögek lehetséges felvágásainak oldalszámait már korábban (a négyzet szétvágásánál) megadtuk. Végül egy ötszöget ötféle módon vághatunk ketté, ha csak a keletkező darabok oldalszámára vagyunk kíváncsiak:



$$(5) \longrightarrow (6,3) \qquad (5) \longrightarrow (5,3) \qquad (5) \longrightarrow (4,3) \qquad (5) \longrightarrow (5,4) \qquad (5) \longrightarrow (4,4)$$

Az eddig felsorolt vágásokat kombinálva a következő hét eset állítható elő:

$$(3,3,3), (3,3,4), (3,3,5), (3,3,6), (3,4,4), (3,4,5), (4,4,4)$$

2. megközelítés. Vizsgáljuk meg, hogy egy vágással hogyan változhat az előttünk álló sokszögek oldalszámainak összege. Ha egy sokszöget egy átló mentén vágunk ketté, akkor az eredeti oldalak mellett két új oldal alkotja az új sokszögeket, hiszen a vágás egy-egy oldalt jelent mindkét keletkező sokszögben.

Ha a vágás egy csúcson és egy oldal belső pontján megy át, akkor az adott oldalból két oldal keletkezik (két külön sokszögben), ez eggyel növeli a sokszögek összes oldalainak számát, továbbá az előzőhöz hasonlóan a vágás két új oldalt ad, így összesen hárommal nő az oldalak száma.

Ha pedig a vágás két oldal egy-egy belső pontját köti össze, akkor az előzőhöz hasonló meggondolás alapján 4-gyel nő az oldalak száma.

A feladatban négyszögből indulunk ki és két vágást ejtünk egymás után, így legfeljebb 8-cal nőhet az oldalak száma, azaz nem lehet több 12-nél.

Mivel minden sokszög legalább három oldalból áll, így olyan számhármasokat jöhetnek szóba (a darabok oldalszámaiként), amelyek mindegyik tagja legalább 3, és az összegük legfeljebb 12. Ilyenből 7 különböző található:

$$3+3+3=9, \qquad 3+3+4=10, \qquad 3+3+5=11, \qquad 3+4+4=11,$$
$$3+3+6=12, \qquad 3+4+5=12, \qquad 4+4+4=12.$$

És ezek mindegyikéhez található alkalmas szétvágás (mint azt már ábráinkkal megmutattuk).

3. 12 focista együtt nyaral. Mindenkinek ugyanannyi honfitársa van jelen, és mindenkinek 1-gyel több klubtársa van jelen, mint honfitársa. Hány klubcsapatból lehetnek? Határozd meg az összes lehetőséget.
Minden játékosnak pontosan egy hazája van és pontosan egy klubnak tagja.

Vizsgáljuk meg, hogy a focisták összesen hány országból érkezhettek. Ha mindenkinek ugyanannyi honfitársa van jelen, akkor minden országból ugyanannyian vannak, vagyis az egy országból érkezők száma, így az országok száma is osztója 12-nek.

Megállapíthatjuk, hogy ha mindenkinek 1-gyel több klubtársa van jelen, mint honfitársa, akkor az egy klubból érkezők száma is állandó, és ez a szám eggyel nagyobb, mint az egy országból érkezők száma.

Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket:

Országok száma	Egy országból érkezők	Egy klubból érkezők
12	1	2
6	2	3
4	3	4
3	4	5
2	6	7
1	12	13

Mivel a klubcsapatok számát úgy kapjuk meg, hogy tizenkettőt elosztjuk az egy klubból érkezők számával, így a táblázat utolsó három sora nem is ad megoldást, az első három sor alapján pedig **a lehetséges válaszok: 6, 4 vagy 3 klub**.

Megjegyzés. Ezek nyilván elő is fordulhatnak, mivel a focisták klubja sokszor független a hazájuktól, tehát bárhogyan hozzáredelhetjük a 12 focistához a kiválasztott néhány országot/klubot. Egy lehetséges hozzárendelés az alábbi ábrákon látható, ahol a táblázatok sorai a klubokat, oszlopai az országokat jelölik, és minden egyes $\times$ egyetlen játékosnak felel meg.

klub / ország	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11	O12
K1	×	×										
K2			×	×								
K3					×	×						
K4							×	×				
K5									×	×		
K6											×	×

klub / ország	O1	O2	O3	O4	O5	O6
K1	×	×	×			
K2	×	×	×			
K3				×	×	×
K4				×	×	×

klub / ország	O1	O2	O3	O4
K1	×	×	×	×
K2	×	×	×	×
K3	×	×	×	×

4. Igaz-e, hogy 200-nál több különböző háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege legalább annyi, mint a számjegyek szorzata?

Gyűjtsük össze azokat a háromjegyű számokat, amelyben a számjegyek összege legalább annyi, mint a számjegyek szorzata – ezeket nevezzük *jó* számoknak.

Ha van a számban 0 számjegy, akkor a számjegyek szorzata 0, míg az összeg legalább 1, tehát a szám biztosan jó. A 0-t tartalmazó háromjegyű számokat megszámolhatjuk pl. így:

- Ha az utolsó számjegy 0, akkor az első két számjegy $9 \cdot 10 = 90$-féle lehet (az első számjegy nem lehet 0, ezért az csak 9-féle lehet).
- Ha az utolsó számjegy nem 0, akkor a középsőnek 0-nak kell lennie, az első és az utolsó számjegy mindegyike 9-féle lehet, ez $9 \cdot 9 = 81$ lehetőség.

Összesen tehát $90 + 81 = 171$ darab 0-t tartalmazó háromjegyű szám van, és ezek mind jók.

Ha a számban nincs 0, de két 1-es számjegy van, akkor a számjegyek szorzata a harmadik jegy, míg az összeg ennél 2-vel nagyobb. Számoljuk meg ezeket a számokat. Egy olyan szám van, amelyben mindhárom számjegy 1-es, a 111, míg a többi számban van egy 1-nél nagyobb számjegy, amely lehet 8-féle és lehet 3 helyen.

Összesen tehát $1 + 3 \cdot 8 = 25$ darab 0-t nem tartalmazó, de két 1-est tartalmazó háromjegyű szám van, és ezek mind jók. Jók azok a számok is, amelyek egy 1-esből, egy 2-esből és egy 3-asból állnak (ezekben a számjegyösszeg és a számjegyszorzat is 6), ezek: $123, 132, 213, 231, 312, 321$, összesen 6 db.

Ezzel már találtunk $171 + 25 + 6 = 202$ különböző jó számot, tehát **igaz a feladat állítása**.

Megjegyzés. Jók még azok a számok, amelyekben egy 1-es és két 2-es számjegy van (ezekben a számjegyösszeg 5, a számjegyszorzat 4), ezek: $122, 212, 221$, ez összesen 3 db. Enélkül is megvan több, mint 200 darab, míg ezzel együtt, bármelyik korábbi típus kihagyásával sincs meg, így ezek nélkülözhetőek a feladat megoldása szempontjából. Az eddig felsoroltakon kívül más jó szám nincs, de ennek bizonyítása nem képezi a feladat megoldásának részét.

5. Felírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ számokat valamilyen sorrendben egy sorba. Ezután minden szám alá odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra, így kaptunk a második sorban hat újabb számot. Ezek mindegyike alá is odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra. Ezt a lépést ismételgettük, de amint leírtunk egy olyan sort, amiben csak a 0 szerepelt, befejeztük az eljárást.
Legfeljebb hány sort írhattunk egymás alá?

Akármilyen sorrendben is írtuk a számokat az első sorba, a második sortól kezdve a hatodik (jobb szélső) szám biztosan 0 lesz, hiszen a fölötte levő számtól jobbra nincs semmi.

A harmadik sortól kezdve az ötödik szám is biztosan 0, hiszen a fölötte levő számtól jobbra csak egy 0 szerepel, az pedig nem lehet nagyobb egy természetes számnál.

Ezt a gondolatot folytatva azt kapjuk, hogy

- a negyedik sortól kezdve már a negyedik szám is csak 0 lehet;
- az ötödik sortól kezdve már a harmadik szám is csak 0 lehet;
- a hatodik sortól kezdve már a második szám is csak 0 lehet;
- a hetedik sortól kezdve már az első szám is csak 0 lehet.

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	?	0
?	?	?	?	0	0
?	?	?	0	0	0
?	?	0	0	0	0
?	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

3	4	1	5	0	2
2	1	2	0	1	0
0	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Azaz a hetedik sorba (ha egyáltalán eljutunk eddig a játékban) biztosan csupa 0-t kell írnunk. Tehát 7 sornál többet biztosan nem írhattunk le.
7 sor viszont létrejöhetett, például a bal oldali ábrán látható módon.
Tehát legfeljebb 7 sort írhattunk egymás alá.

Hogyan találhatunk hétsoros táblázatokat?

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	$\boxed{?}$	0
?	?	?	$\boxed{?}$	0	0
?	?	$\boxed{?}$	0	0	0
?	$\boxed{?}$	0	0	0	0
$\boxed{?}$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	1	0
?	?	?	1	0	0
?	?	1	0	0	0
?	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Ha bármelyik $\boxed{?}$ helyére 0-t írnánk, akkor az alatta levő $\boxed{?}$-ek is mind 0-k kellene legyenek. Tehát egyik sem lehet 0, ha el szeretnénk jutni a hetedik sorig.

Másrészt a $\boxed{?}$-ek helyére 1-nél nagyobb szám sem kerülhet: a fölöttük levő számtól jobbra egyetlen kivétellel csak 0-k állnak.

Tehát mindegyik $\boxed{?}$ helyén 1-nek kell állnia.

?	?	?	?	?	?
?	?	?	$\boxed{?}$	1	0
?	?	$\boxed{?}$	1	0	0
?	$\boxed{?}$	1	0	0	0
$\boxed{?}$	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

?	?	?	?	?	?
?	?	?	0	1	0
?	?	0	1	0	0
?	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Most a $\boxed{?}$-lel megjelölt mezőkön csak 0 állhat, hiszen alattuk 1 van, míg tőlük jobbra csak egyetlen pozitív szám áll, és az is 1-es.

A továbbiakban már nem lehet egyértelműen meghatározni az egyes mezőkön álló számokat, de viszonylag kevés lehetőségre korlátozhatunk.

A jobb oldali ábrán $\boxed{?}$-lel megjelölt mezőn nem állhat sem 0 (akkor alatta nem 0 lenne), sem 2-nél nagyobb szám (a felette levőtől jobbra levők közt legfeljebb 2 pozitív lehet). Ha $\boxed{?}$ = 1, akkor felette levő (azaz harmadik) sor így nézhet csak ki:

1 2 0 1 0 0

Ha $\boxed{?}$ = 2, akkor felette levő (azaz harmadik) sor így nézhet csak ki:

0 X 0 1 0 0

ahol **X** lehet 1 vagy 2.

?	?	?	?	?	?
?	?	?	**0**	**1**	**0**
?	?	**0**	**1**	**0**	**0**
$\boxed{?}$	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

A harmadik sorból visszafele következtetve a második sorra összesen $3+10+12 = 25$-féle lehetőség adódik. A második sor pedig egyértelműen meghatározza az első sort (kihasználva, hogy az első sorban a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számok szerepelnek valamilyen sorrendben).

Így összesen **25-féle hétsoros táblázat van**, melyek első sorai:

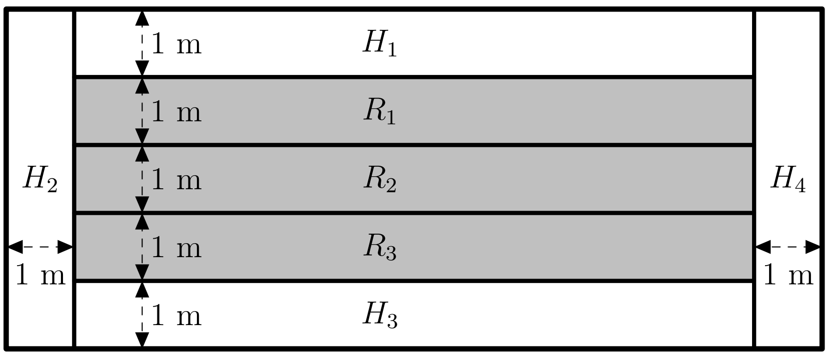
031524	041523	042513	051423	052413
053412	130524	140523	142503	150423
152403	153402	230514	240513	241503
250413	251403	253401	341502	350412
351402	352401	450312	451302	452301

1. Néhány focista együtt nyaral, összesen 8 országból. Minden játékosnak 3 klubtársa és 2 honfitársa van jelen. Hány klubcsapatból érkeztek a nyaralásra?
Minden játékosnak pontosan egy hazája van és pontosan egy klubnak tagja.

Mivel minden focistának 2 honfitársa van jelen, így minden országból 3 focista jött, azaz $8 \cdot 3 = 24$ focista van a nyaraláson. Mivel minden focistának 3 klubtársa van jelen, így minden klubból 4 focista jött, azaz $24/4 =$ **6 klubból** érkeztek focisták a nyaralásra.

2. Luca téglalap alakú kertjében hagymát és répát termeszt. A kertet úgy alakította ki, hogy mind a négy oldala mentén 1 m széles sávban termeszt hagymát, a megmaradó belső részben pedig répát. Így pontosan ugyanakkora területen termeszt hagymát és répát.
A kert egyik oldala 5 m hosszú. Milyen hosszú a másik oldal?

Osszuk fel a kertet az ábra szerinti elrendezésben $5 + 2$ kisebb téglalapra.



Így a répa éppen a három belső téglalapban terem (R_1, R_2, R_3, az ábrán szürke háttérrel), a hagyma pedig a külső négyben (H_1, H_2, H_3, H_4). R_1 és H_1 egyforma területű (mivel egybevágó téglalapok), hasonlóan R_3 és H_3 is egyforma területű, tehát R_2 területe éppen meg kell egyezzen H_2 és H_4 területének összegével.

Mivel a téglalapok ugyanolyan szélesek, R_2 hosszúsága éppen H_2 és H_4 hosszúságának összege, azaz $5 + 5 = 10$ méter. Így a kert másik oldala $1 + 10 + 1 =$ **12 méter** hosszú.

3. Karcsi telefonja különböző városok hőmérsékletértékét is kijelzi, napszakonként, Celsius-fokban mérve. Egy éjszaka során Szegeden és Balassagyarmaton estéről reggelre ugyanannyi Celsius-fokkal lett hidegebb. Karcsi azt is észrevette, hogy ha kivonja a szegedi reggeli hőmérsékletértékből az estit, akkor a balassagyarmati reggeli értéket kapja, ha viszont összeadja a balassagyarmati esti és reggeli hőmérsékletértékeket, az pont annyi, mint a szegedi reggeli hőmérsékletérték ellentettjének kétszerese. Ha a szegedi esti hőmérséklet 6°C volt, mekkora volt a reggeli?

Mivel egyrészt estéről reggelre ugyanannyi Celsius-fokkal lett hidegebb a két településen, másrészt a szegedi reggeli és az esti hőmérséklet különbsége megegyezik a balassagyarmati reggeli hőmérséklettel, észrevehető, hogy a balassagyarmati reggeli hőmérséklet megegyezik a balassagyarmati reggeli és esti hőmérséklet különbségével.

Ebből a balassagyarmati esti hőmérséklet 0 (°C).

Így viszont a balassagyarmati reggeli és esti hőmérsékletek összege megegyezik a reggeli hőmérséklettel, ami a feladat szerint egyrészt egyenlő a szegedi reggeli és esti hőmérséklet különbségével (azaz a reggeli hőmérséklet mínusz hattal), másrészt a szegedi reggeli hőmérséklet ellentettjének kétszeresével. Egyenlettel, ha a szegedi reggeli hőmérsékletet x-rel jelöljük:

$$\begin{aligned} -2x &= x-6 \\ -3x &= -6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Így a balassagyarmati reggeli hőmérséklet -4 (°C), és ezek a számok tényleg kielégítik a feladat feltételeit. **A szegedi reggeli hőmérséklet tehát 2°C volt.**

Második megoldás. Ábrázoljuk táblázatban a feladatban szereplő négy hőmérsékletértéket, figyelembe véve, hogy a két sorban azonos az esti és reggeli érték különbsége.

	este	reggel
Szeged	6	x
Balassagyarmat	y	$y+(x-6)$

Karcsi első megfigyelése szerint $x-6=y+(x-6)$,
azaz $y=0$.

	este	reggel
Szeged	6	x
Balassagyarmat	0	$x-6$

Karcsi második észrevétele azt jelenti, $0+(x-6)=-2x$, vagyis $x-6=-2x$. Ezt az egyenletet megoldva $x=2$ adódik, és a táblázatunk kitöltése után könnyen látható, hogy az összes feltételnek megfelelő megoldást kaptunk.

	este	reggel
Szeged	6	2
Balassagyarmat	0	-4

Tehát Szegeden 2°C volt reggel a hőmérséklet.

4. Felírtuk a $0,1,2,3,4,5$ számokat valamilyen sorrendben egy sorba. Ezután minden szám alá odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra, így kaptunk a második sorban hat újabb számot. Ezek mindegyike alá is odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra. Ezt a lépést ismételgettük, de amint leírtunk egy olyan sort, amiben csak a 0 szerepelt, befejeztük az eljárást.
Legfeljebb hány sort írhattunk egymás alá?

Akármilyen sorrendben is írtuk a számokat az első sorba, a második sortól kezdve a hatodik (jobb szélső) szám biztosan 0 lesz, hiszen a fölötte levő számtól jobbra nincs semmi.

A harmadik sortól kezdve az ötödik szám is biztosan 0, hiszen a fölötte levő számtól jobbra csak egy 0 szerepel, az pedig nem lehet nagyobb egy természetes számnál.

Ezt a gondolatot folytatva azt kapjuk, hogy

- a negyedik sortól kezdve már a negyedik szám is csak 0 lehet;
- az ötödik sortól kezdve már a harmadik szám is csak 0 lehet;
- a hatodik sortól kezdve már a második szám is csak 0 lehet;
- a hetedik sortól kezdve már az első szám is csak 0 lehet.

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	?	**0**
?	?	?	?	**0**	**0**
?	?	?	**0**	**0**	**0**
?	?	**0**	**0**	**0**	**0**
?	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

3	**4**	**1**	**5**	**0**	**2**
2	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
2	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Azaz a hetedik sorba (ha egyáltalán eljutunk eddig a játékban) biztosan csupa 0-t kell írnunk. Tehát 7 sornál többet biztosan nem írhattunk le.
7 sor viszont létrejöhetett, például a bal oldali ábrán látható módon.
Tehát legfeljebb 7 sort írhattunk egymás alá.

Hogyan találhatunk hétsoros táblázatokat?

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	$\boxed{?}$	**0**
?	?	?	$\boxed{?}$	**0**	**0**
?	?	$\boxed{?}$	**0**	**0**	**0**
?	$\boxed{?}$	**0**	**0**	**0**	**0**
$\boxed{?}$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	**1**	**0**
?	?	?	**1**	**0**	**0**
?	?	**1**	**0**	**0**	**0**
?	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Ha bármelyik $\boxed{?}$ helyére 0-t írnánk, akkor az alatta levő $\boxed{?}$-ek is mind 0-k kellene legyenek. Tehát egyik sem lehet 0, ha el szeretnénk jutni a hetedik sorig.

Másrészt a $\boxed{?}$-ek helyére 1-nél nagyobb szám sem kerülhet: a fölöttük levő számtól jobbra egyetlen kivétellel csak 0-k állnak.

Tehát mindegyik $\boxed{?}$ helyén 1-nek kell állnia.

?	?	?	?	?	?
?	?	?	$\boxed{?}$	**1**	**0**
?	?	$\boxed{?}$	**1**	**0**	**0**
?	$\boxed{?}$	**1**	**0**	**0**	**0**
$\boxed{?}$	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

?	?	?	?	?	?
?	?	?	**0**	**1**	**0**
?	?	**0**	**1**	**0**	**0**
?	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Most a $\boxed{?}$-lel megjelölt mezőkön csak 0 állhat, hiszen alattuk 1 van, míg tőlük jobbra csak egyetlen pozitív szám áll, és az is 1-es.

A továbbiakban már nem lehet egyértelműen meghatározni az egyes mezőkön álló számokat, de viszonylag kevés lehetőségre korlátozhatunk.

A jobb oldali ábrán $\boxed{?}$-lel megjelölt mezőn nem állhat sem 0 (akkor alatta nem 0 lenne), sem 2-nél nagyobb szám (a felette levőtől jobbra levők közt legfeljebb 2 pozitív lehet).
Ha $\boxed{?}$ = 1, akkor felette levő (azaz harmadik) sor így nézhet csak ki:

$$\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}$$

Ha $\boxed{?}$ = 2, akkor felette levő (azaz harmadik) sor így nézhet csak ki:

$$\mathbf{0} \quad \mathbf{X} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}$$

?	?	?	?	?	?
?	?	?	**0**	**1**	**0**
?	?	**0**	**1**	**0**	**0**
$\boxed{?}$	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

ahol **X** lehet 1 vagy 2.

A harmadik sorból visszafele következtetve a második sorra összesen $3+10+12 = 25$-féle lehetőség adódik. A második sor pedig egyértelműen meghatározza az első sort (kihasználva, hogy az első sorban a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számok szerepelnek valamilyen sorrendben).

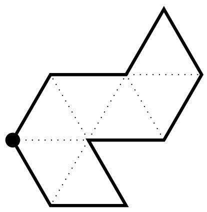
Így összesen **25-féle hétsoros táblázat van**, melyek első sorai:

031524	041523	042513	051423	052413
053412	130524	140523	142503	150423
152403	153402	230514	240513	241503
250413	251403	253401	341502	350412
351402	352401	450312	451302	452301

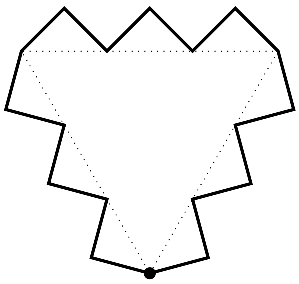
5. a) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 2 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
b) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 3 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
A sokszögnek nem lehet sem $0°$*-os, sem* $180°$*-os szöge. A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.*

Mindkét részre sokféle konstrukció adható, ezek közül néhány lehetőséget mutatunk be.
A sokszög belső szögeit a megjelölt csúcsból indulva, az óramutató járása szerint haladva soroltuk fel.

a)

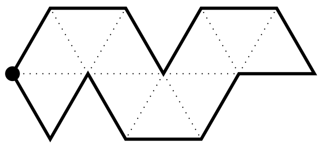


120°, 120°, 240°, 60°, 120°, 120°, 300°, 60°, 120°
(Szabályos háromszögrácsra rajzolt sokszög)

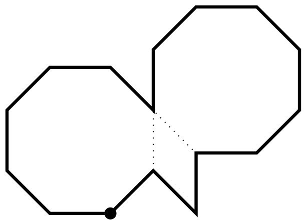


150°, 90°, 270°, 90°, 270°, 90°, 150°, 90°, 270°, 90°, 270°, 90°, 150°, 90°, 270°, 90°, 270°, 90°
(Szabályos háromszög oldalaihoz rögzített háromfokú lépcsők)

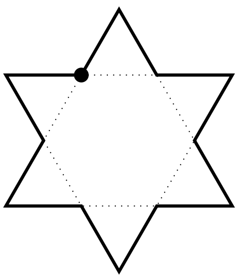
b)



120°, 120°, 120°, 300°, 120°, 120° 60°, 240°, 120°, 120°, 300°, 60°
(Szabályos háromszögrácsra rajzolt sokszög)



135° (6 db), 315°, 135° (6 db), 270°, 45°, 270°,
(Két szabályos nyolcszög összekapcsolva)



felváltva 240° és 60°
(Szabályos hatágú csillag)

1. Egy szög kétszerese hegyesszög, háromszorosa tompaszög, az ötszöröse pedig homorúszög. Hányféle lehet a szög nagysága, ha fokban mérve egész szám?

Jelöljük α-val a vizsgált szög nagyságát.

Az első feltétel szerint $0° < 2\alpha < 90°$, vagyis $0° < \alpha < 45°$.

A második feltétel szerint $90° < 3\alpha < 180°$, emiatt $30° < \alpha < 60°$.

A harmadik feltétel szerint $180° < 5\alpha < 360°$, tehát $36° < \alpha < 72°$.

A kapott feltételeket összevetve a megfelelő szögekre $36° < \alpha < 45°$ teljesül.

Ezen határok közötti egész értékek:

$$\underbrace{37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44}_{8\text{ db}}$$

Tehát **a szög nagysága 8-féle lehet**.

2. Melyik a nagyobb és mennyivel: a 100-nál nem nagyobb, 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adó természetes számok négyzeteinek az összege vagy a 100-nál nem nagyobb, 4-gyel osztva 2 vagy 3 maradékot adó természetes számok négyzeteinek az összege?

A feladatban az alábbi két összeg közti különbséget kell meghatározni:

$$A = 1^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + 9^2 + ... + 100^2 \quad \text{és} \quad B = 2^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2 + ... + 99^2$$

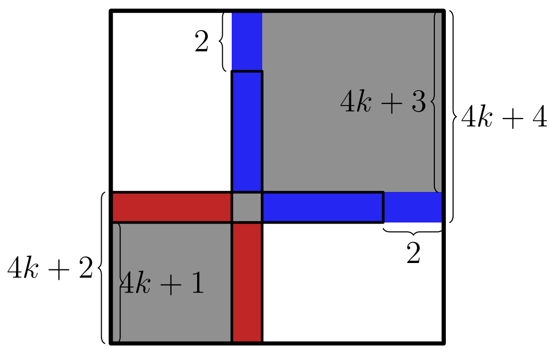
Bontsuk 4-es csoportokra a számokat, majd minden $0 \le k \le 24$-re vegyük a $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$, $4k + 4$ alakú számokat.

Minden ilyen csoportból 2 szám, a $4k+1$ és $4k+4$ alakú lesz az A összegben, 2 szám pedig, a $4k + 2$ és $4k + 3$ alakú lesz a B összegben. Vegyük ebben az A-beli és B-beli elemek különbségét:

$$\begin{aligned}&(4k + 1)^2 - (4k + 2)^2 - (4k + 3)^2 + (4k + 4)^2 =\\&= 16k^2 + 8k + 1 - 16k^2 - 16k - 4 - 16k^2 - 24k - 9 + 16k^2 + 32k + 16 =\\&= (16 - 16 - 16 + 16)k^2 + (8 - 16 - 24 + 32)k + (1 - 4 - 9 + 16 = 4.\end{aligned}$$

Ez minden 4-es csoportra igaz lesz, vagyis $4 \cdot 25 =$ **100-zal nagyobb a 0 vagy 1 maradékot adó számok összege, mint a 2 vagy 3 maradékot adó számok összege.**

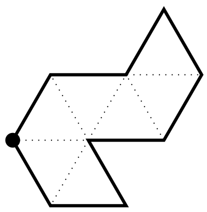
Megjegyzés: Azt, hogy az ilyen 4-es csoportokban miért 4 lesz a különbség, az alábbi ábrával is lehet szemléltetni. Vegyünk egy $8k + 5$ oldalhosszúságú négyzetet. Először rakjuk bele a $4k + 1$ és a $4k + 4$ oldalhosszúságú négyzeteket, majd a $4k + 2$ és $4k + 3$ oldalhosszúságúakat az ábrán látható módon. Ekkora a keresett érték a kék terület nagyságából a piros terület nagysága, ami pontosan 4 lesz.



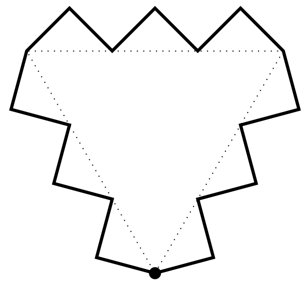
3. a) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 2 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
b) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 3 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
A sokszögnek nem lehet sem $0°$*-os, sem* $180°$*-os szöge. A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.*

Mindkét részre sokféle konstrukció adható, ezek közül néhány lehetőséget mutatunk be.
A sokszög belső szögeit a megjelölt csúcsból indulva, az óramutató járása szerint haladva soroltuk fel.

a)

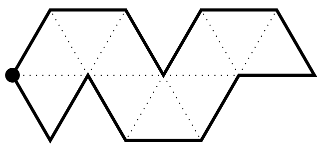


$120°$, $120°$, $240°$, $60°$, $120°$, $120°$, $300°$, $60°$, $120°$
(Szabályos háromszögrácsra rajzolt sokszög)

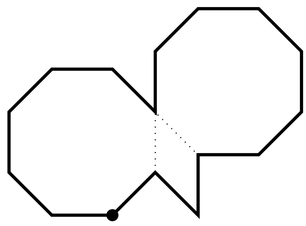


$150°$, $90°$, $270°$, $90°$, $270°$, $90°$, $150°$, $90°$, $270°$, $90°$, $270°$, $90°$, $150°$, $90°$, $270°$, $90°$, $270°$, $90°$
(Szabályos háromszög oldalaihoz rögzített háromfokú lépcsők)

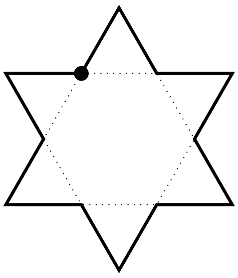
b)



$120°, 120°, 120°, 300°, 120°, 120°$ $60°, 240°, 120°, 120°, 300°, 60°$
(Szabályos háromszögrácsra rajzolt sokszög)



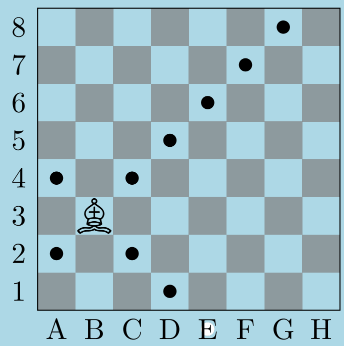
$135°$ (6 db), $315°$, $135°$ (6 db), $270°$, $45°$, $270°$,
(Két szabályos nyolcszög összekapcsolva)



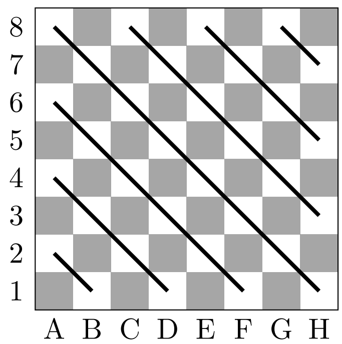
felváltva $240°$ és $60°$
(Szabályos hatágú csillag)

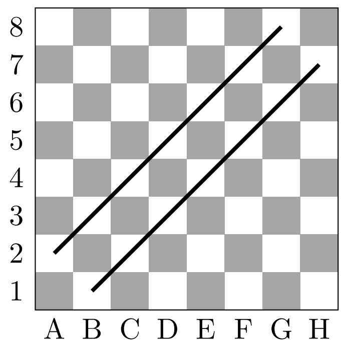
4. Hányféleképpen lehet egy sakktáblán 14 mezőt megjelölni úgy, hogy egy futó egyik megjelölt mezőről se tudjon egy lépésben eljutni egy másik megjelölt mezőre?

A futó átlósan lép, tehát például a B3 mezőn álló futó az ábrán pöttyel megjelölt mezőkre juthat el egy lépésben.



A sakktáblán a fehér mezőkön álló futók csak fehér mezőkre tudnak lépni, ugyanígy a sötét mezőkön állók csak sötét mezőre. Tekintsük az első ábrán berajzolt hét átlót!





Ezek mindegyikén legfeljebb egy megjelölt pont lehet, de ugyanezt elmondhatjuk ennek elforgatottjaként hét, sötét mezőket tartalmazó átlóra is, ezek együtt pedig lefedik a sakktáblát, tehát az itt feltüntetett átlók mindegyikén is kell, hogy legyen egy megjelölt pont.

Tekintsük a két legrövidebb átlót. Ha A2-t megjelöljük, akkor G8-at nem lehet, csak H7-et, hasonlóan, ha A2 helyett B1-et jelöljük, akkor a másik legrövidebb átlón csak G8 jöhet szóba. A két legrövidebb átlón megjelölt két pont tehát kétféle helyzetben lehet.

Ez a két megjelölt pont együttesen lefedi a második ábrán szereplő két átlót, tehát a következő (4 mezőből álló) átlók esetén megintcsak két-két pont jöhet szóba, hasonlóan kétféle felállásban (A4 és H5 vagy D1 és E8.)

A gondolatmenetet folytatva a 6 mezőből álló átlóknak szintén csak a végpontjaiból választhatunk, újfent kétféleképpen (A6 és H3 vagy F1 és C8).

Végül a leghosszabb átlóban két mező maradt. Ezek bármelyike az előzőektől függetlenül választható. Mivel minden eddigi döntés az előzőektől független volt, így a lehetőségek száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Ugyanezeket elmondhatjuk a sötét mezőket tartalmazó átlókról is, továbbá a világos mezők jelölései nem befolyásolják a sötét mezőkét, tehát ott is 16-féle lehetőségünk van. Összesen pedig ezek szorzata adja a megfelelő megjelölések számát.

Tehát $16 \cdot 16 =$ **256-féleképpen lehet a mezőket a feltételeknek megfelelően megjelölni**.

5. Az a számot leírtam kétszer egymás után, így kaptam a b számot. Érdekes módon b osztható a^2-tel. Mennyi lehet a hányados?
Az a és b számok tízes számrendszerben felírt pozitív egészek.

Ha a egy n-jegyű szám, akkor $b = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1 \text{ db}}1 \cdot a = (10^n + 1) \cdot a$.

A keresett hányadost nevezzük c-nek. c nyilván egy 1-nél nagyobb egész szám, továbbá:

$$c = \frac{b}{a^2} = \frac{(10^n + 1) \cdot a}{a^2} = \frac{10^n + 1}{a}$$

Tehát c osztója $(10^n + 1)$-nek, másrészt pedig legfeljebb 11, hiszen

$$\frac{10^n + 1}{11} \leq \frac{10^n + 10^{n-1}}{11} = 10^{n-1} \leq a$$

Egyenlőség csak $n = 1$ esetén állhat fenn, ehhez $a = 1$ esetén valóban 11 lesz a hányados, hiszen

$$\frac{b}{a^2} = \frac{11}{1} = 11.$$

Milyen 11-nél kisebb szám oszthatja a $10^n + 1$ számot?

Sem a páros számok, sem az 5 sem jöhet szóba, mivel $10^n + 1$ utolsó számjegye 1.

Továbbá, $10^n + 1$ nem lehet osztható 3-mal és 9-cel sem, hiszen a számjegyeinek összege 2.

Így a 11-en kívül egyetlen lehetőség maradt: $c = 7$.
Ez tényleg meg is valósulhat. Mivel $1001 = 7 \cdot 143$, így ha $a = 143$, akkor $b = 143143$, és így:

$$\frac{b}{a^2} = \frac{143143}{143^2} = 7.$$

Tehát a hányados lehet 7 vagy 11, más érték nem lehetséges.

Megjegyzés: Más példa is van a $c = 7$ esetre, pl. $a = 142857143$.
Általánosan: tetszőleges k pozitív egész esetén $a = (10^{6k+3} + 1)/7$ választással a b/a^2 hányados 7,
$a = 1$ esetén a hányados 11, egyébként pedig nem egész.

1. Panka gondolt egy számra. Ezután kivont belőle 1-et, majd hozzáadott 2-t, majd kivont belőle 3-at, majd hozzáadott 4-et, és így tovább, míg végül kivont belőle 99-et, aztán hozzáadott 100-at, és így 53-at kapott. Melyik számra gondolt Panka?

Tekintsük az elvégzett műveleteket kettesével. Ha a gondolt számból kivonunk 1-et, majd hozzáadunk 2-t, az együtt olyan, mintha 1-et adtunk volna hozzá.

Hasonlóan, ha kivonunk 3-at, majd hozzáadunk 4-et, az is eggyel növeli a szám értékét. Innentől világos, hogy minden ilyen műveletpár ugyanígy működik, mivel a hozzáadott szám értéke eggyel nagyobb, mint a kivont számé, így a két művelet együtt eggyel növeli a számot.

$$\underbrace{-1+2}_{+1}\underbrace{-3+4}_{+1}\underbrace{-5+6}_{+1}\underbrace{-7+8}_{+1}\dots\underbrace{-99+100}_{+1}$$

Mivel 100 műveletet végzett Panka, ez összesen 50-szer növelte eggyel az aktuális értéket, így ha a végén 53-at kapott, akkor a gondolt szám 3 kellett, hogy legyen

2. Öt testvér életkora: 11, 12, 13, 14 és 15 év. A 14 évesnek egy húga, egy nővére és két fiútestvére van. A 12 évesnek egy öccse, egy bátyja és két lánytestvére van.
Hány lánytestvére lehet a 13 évesnek?

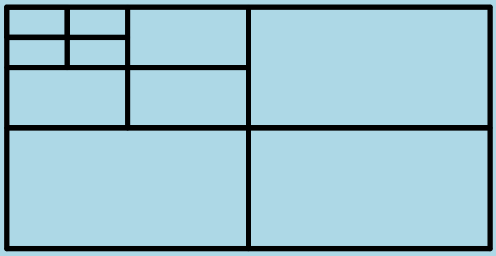
Mivel a 14 évesnek van egy nővére, így a legidősebb testvér biztosan lány. A 12 évesnek van egy öccse, ezért a legfiatalabb biztosan fiú.

Nézzük meg, mi a helyzet, ha a 13 éves testvér lány. Ekkor a 14 évesről ismert információk miatt a 12 éves biztosan fiú (hogy meglegyen 14 éves két fiútestvére), a 12 évesről ismert információk miatt pedig a 14 évesről mondhatjuk el ugyanezt (hogy legyen a 12 évesnek bátyja). Ebben az esetben azt látjuk, hogy a 13 évesnek egy lánytestvére van csak, a 15 éves.

Nézzük, mi a helyzet, ha a 13 éves testvér fiú. Ekkor a 14 évesről ismert információk szerint a 12 éves lány (hogy legyen a 14 évesnek húga), a 12 évesről ismert információk miatt pedig a 14 évesről mondhatjuk el ugyanezt (hogy meglegyen a 12 éves két lánytestvére). Ebben az esetben tehát azt látjuk, hogy a 13 évesnek három lánytestvére van.

Tehát két különböző megoldás lehetséges: **1 vagy 3 lánytestvére lehet**.

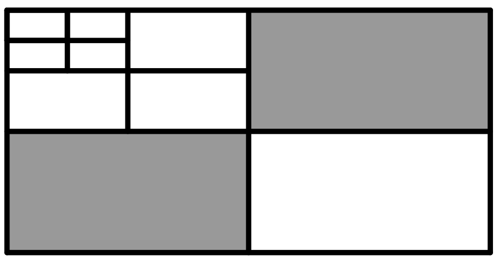
3. Egy téglalapnak összekötöttük a szemközti oldalfelező pontjait, ezáltal négy egyforma területű téglalapra bontottuk. A bal felső téglalappal ugyanezt az eljárást megismételtük még kétszer, így összesen tíz téglalapra bontottuk fel a nagy téglalapot, az ábrán látható módon.



A tíz téglalap közül néhányat szürkére színeztünk úgy, hogy bármely két szürke téglalap legfeljebb egy pontban érintkezzen. Legfeljebb mennyi lehet a szürke téglalapok területeinek az összege, ha a bal felső téglalap 1 cm^2 területű?

Nézzük a három legnagyobb téglalapot! Ezek közül nem lehet mindhárom szürke, mert van köztük kettő, amelynek van közös oldala. Viszont ha legfeljebb egy szürke van közöttük, akkor a szürke téglalapok területeinek összege legfeljebb a teljes terület felét adja ki, bárhogyan is színezzük a maradék, kisebb téglalapokat. Ugyanakkor, ha két téglalapot is szürkére színezünk, azzal már a teljes terület felét megkapjuk, és ehhez jön még hozzá a kisebb téglalapokból adódó terület. Ez tehát mindenképpen nagyobb eredményt ad.

A legnagyobb területű téglalapokból csak az ábrán látható módon tudunk kettőt is szürkére színezni.



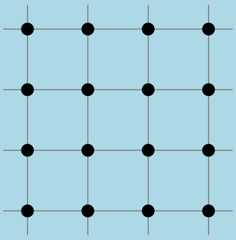
Ez már meghatározza, hogy a velük szomszédos téglalapok nem lehetnek szürkék.

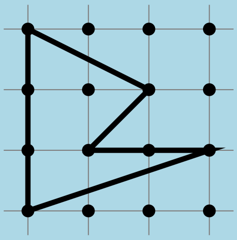
A bal felső, legkisebb méretű téglalapok közül pedig ismét kettőt tudunk kiszínezni.

Ha a legkisebb téglalap területe 1 cm^2, akkor a közepes méretű téglalapé 4 cm^2, a legnagyobbé pedig 16 cm^2 (az egész téglalapé pedig 64 cm^2).

Így a területek összegének lehetséges legnagyobb értéke $1 + 1 + 16 + 16 = 34$ (cm^2).

4. Egy matekfüzetben kijelöltünk 16 rácspontot a bal oldali ábrán látható elrendezésben.





A jobb oldali ábrán egy olyan ötszög látható, amelynek minden csúcsa a kijelölt rácspontok közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(a) Rajzolj egy olyan hatszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

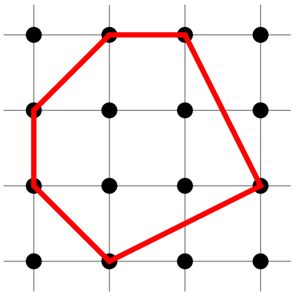
(b) Rajzolj egy olyan hétszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(c) Rajzolj egy olyan nyolcszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

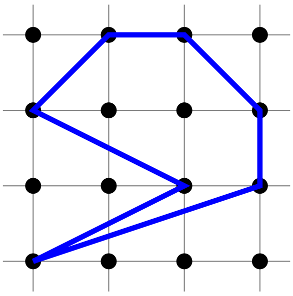
A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.

Mindegyik feladatrészre többféle jó rajz készíthető, egy-egy példát adunk meg:

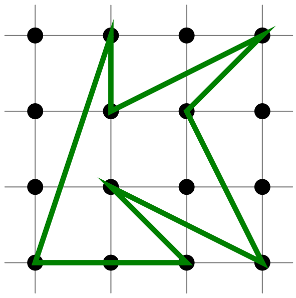
(a) Hatszög:



(b) Hétszög:



(c) Nyolcszög:



5. Legfeljebb hány pozitív egész számot lehet megadni úgy, hogy bármely kettő szorzata különböző számjegyre végződjön?

Négy pozitív egész számot meg lehet így adni, például $1, 2, 3, 7$ megfelelő, az ezekből képezhető kéttagú szorzatok:

$$1 \cdot 2 = 2 \qquad 1 \cdot 3 = 3 \qquad 1 \cdot 7 = 7 \qquad 2 \cdot 3 = 6 \qquad 2 \cdot 7 = 14 \qquad 3 \cdot 7 = 21$$

valóban csupa különböző számjegyre végződnek.

Öt (vagy még több) pozitív egész szám azonban már nem adható meg így. Öt számból ugyanis már $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$-féle szorzat képezhető, így ezek csak úgy végződhetnének csupa különböző számjegyre, ha 0-tól 9-ig minden szám pontosan egyszer jelenne meg a szorzatok utolsó számjegyei között.

Ez azt jelenti, hogy a szorzatok között pontosan két 5-tel osztható szám van. Egy szorzat csak akkor lehet 5-tel osztható, ha valamelyik tényezője 5-tel osztható. Tehát a megadott öt szám között kell, hogy legyen legalább egy 5-tel osztható.

De ha volna egy 5-tel osztható a megadott öt szám között, akkor az rögtön négy 5-tel osztható szorzatot hozna létre, ezeknek mind 0-ra vagy 5-re kellene végződnie.

Alternatív indoklás *arra, hogy miért nem végződhet a 10 szorzat* $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$*-re:*
Így a szorzatok között mindenképpen 5 páros és 5 páratlan kellene, hogy legyen.

De ez nem lehetséges, mivel

- Ha a megadott öt szám közül legfeljebb 1 páratlan, akkor a kéttagú szorzatok mind párosak.
- Ha a megadott öt szám közül 2 páratlan, akkor a kéttagú szorzatok közül csak 1 lesz páratlan.
- Ha a megadott öt szám közül 3 páratlan, akkor a kéttagú szorzatok közül csak 4 lesz páratlan.
- Ha a megadott öt szám közül legalább 4 páratlan, akkor viszont a kéttagú szorzatok közül legalább 6 páratlan lesz.

(Itt felhaszáltuk, hogy két egész szám szorzata akkor és csak akkor páratlan, ha mindkét tényező páratlan).

1. A mesebeli lények találkozóján tündérek, manók és óriások vettek részt. Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak. Minden manó adott egy szál virágot minden tündérnek. Így összesen 72 szál virág került átadásra. Minden tündér adott ajándékba egy szelet csokit minden óriásnak. Így összesen 48 szelet csoki került átadásra. Minden óriás adott ajándékba egy üveg szörpöt minden manónak. Hány üveg szörp kerülhetett átadásra összesen?

Az átadásra került üveg szörpök száma **csak 54 lehet**.

Ha 8 tündér vett részt a találkozón, akkor:

Mindegyik tündér $72/8 = 9$ szál virágot kapott (hiszen mindannyian ugyanannyi szálat kaptak), azaz 9 manó volt jelen.

Mindegyik tündér $48/8 = 6$ szelet csokit adott át, azaz 6 óriás volt jelen.

Így tényleg több tündér vett részt, mint óriás , míg a manók még a tündéreknél is többen voltak.

A 6 óriás a 9 manónak összesen $6 \cdot 9 = 54$ üveg szörpöt adott át.

A következőkben belátjuk, hogy más lehetőség nem lehetséges.

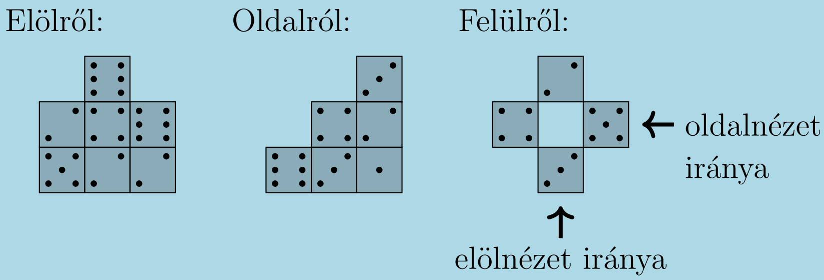
Ha 8-nál több, azaz legalább 9 tündér vett volna részt a találkozón, akkor legfeljebb $72/9 = 8$ manó lett volna jelen – ők így kevesebben lettek volna, mint a tündérek.

Ha 7 tündér vett volna részt, akkor mivel 72 nem osztható 7-tel, a manók száma nem lenne egész (vagy: 48 nem osztható 7-tel, így az óriások száma nem egész).

Ha 7-nél kevesebb, azaz legfeljebb 6 tündér vett volna részt a találkozón, akkor legalább $48/6 = 8$ óriás lett volna jelen – ők így többen lettek volna, mint a tündérek.

Alternatív megoldás. Más módon is belátható, hogy csak 8 tündér lehet, például: oszthatósági megfontolásokból következik, hogy a tündérek száma osztója a 24-nek (48 és 72 legnagyobb közös osztójának), így csak $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ vagy 24 lehet. Ezeket végigpróbálva kiderül, hogy csak a 8 esetén teljeül a ,,Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak” feltétel.

2. Szabályos dobókockák összeragasztásával tornyokat készítettünk, majd felragasztottuk ezeket az asztalra. Az elkészült építmény az ábrán látható módon néz ki elölről, oldalról, illetve felülről.
Összesen hány pötty van a ragasztós oldalakon?



A felülnézeti ábrán egy-egy nyíllal jelöltük az elölnézet és az oldalnézet irányát.
A ragasztásoknál mindig teljes kockalapok érintkeznek egymással, illetve az asztallal.
Egy dobókocka akkor szabályos, ha a szemközti lapjain összesen 7 pötty van.

A felülnézeti kép alapján megállapítható, hogy összesen 4 tornyot készítettünk.

Azt is észrevehetjük a felülnézeti képből, hogy mind az elölnézeti, mind az oldalnézeti képen a két szélső torony nem takar ki semmit, így biztos, hogy a négy torony közül van egy, amely egy kockából áll, kettő, amely két kockából áll, a negyedik pedig három kockából áll.

Összesen tehát 8 kockát használtunk fel az építéshez.

Vegyük észre, hogy a ragasztások minden kocka esetében két egymással szemközti lapon történtek (az alsó lapjánál az asztalhoz vagy az alatta levő kockához, a felső lapján a felette levő kockához), kivéve a tornyok legfelső kockáin, ahol a felső lap nincs beragasztózva. Ha ezeket is beragasztóztuk volna, akkor a nyolc kocka esetében összesen $8 \cdot 7 = 56$ pont lenne a beragasztózott lapokon, mivel a szemközti lapokon levő pontok száma összesen mindig 7. Mivel azonban a felső lapokat nem ragasztóztuk be, $2+4+3+5 = 14$ ponttal kapunk ennél kevesebbet, azaz a keresett érték $56 - 14 = 42$.

3. Leírtam egymás mögé a számokat 1-től 2023-ig szünet vagy egyéb elválasztás nélkül, így kaptam egy hatalmas számot: 1234567891011…02120222023. Hányszor fordul elő ebben a számban, hogy három egymást követő számjegy 023, ebben a sorrendben?

Utólag tegyünk egy-egy | elválasztójelet az egymás mögé leírt számok közé:

$$1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid 10 \mid 11 \mid \ldots \mid 2021 \mid 2022 \mid 2023$$

Most vizsgáljuk meg, hogy ha három egymást követő számjegy 023, akkor ezekhez képest hogyan helyezkedhetnek el a | jelek. A 0 előtt közvetlenül nem lehet elválasztójel (mivel 0-val nem kezdődhet szám). A szám legvégétől eltekintve (éppen egy 023-mal zárunk, ezt majd nem szabad kifelejtenünk a megoldások megszámolásánál) legalább egy elválasztójel még következik a 0 után. Mivel legfeljebb négyjegyű számok szerepelnek a | jelek között, így a 0 utáni első elválasztójel háromféle helyen lehet:

$$\ldots 0 \mid 23 \ldots \quad \text{vagy} \quad \ldots 02 \mid 3 \ldots \quad \text{vagy} \quad \ldots 023 \mid \ldots$$

- A $\ldots 0 \mid 23\ldots$ esetben az elválasztójel utáni első szám utolsó jegye 1 kell legyen, így két lehetőség van:
$$\ldots 0 \mid 231 \mid \ldots \text{ vagy } \ldots 0 \mid 23?1 \mid \ldots$$
Az előbbi lehetőség meg is valósul, méghozzá a 230 és a 231 számok egymás mögé írásakor.
Az utóbbi viszont nem fordul elő, hiszen akármilyen számjegy is áll az ? helyén, $23?1 > 2023$, így ez a szám már nem kerül leírásra.
- A $\ldots 02 \mid 3\ldots$ esetben az elválasztójel utáni első szám utolsó két jegyének 03-nak kell lennie, így két lehetőség van:
$$\ldots 02 \mid 303 \mid \ldots \text{ vagy } \ldots 02 \mid 3?03 \mid \ldots$$
Az előbbi lehetőség meg is valósul, méghozzá a 302 és a 303 számok egymás mögé írásakor.
Az utóbbi viszont nem fordul elő, hiszen akármilyen számjegy is áll az ? helyén, $3?03 > 2023$, így ez a szám már nem kerül leírásra.
- A $\ldots 023 \mid \ldots$ esetben az elválasztójel utáni számnak 024-re kell végződnie. Egyetlen ilyen számot írunk le, az 1024-et:
$$\ldots 1023 \mid 1024 \mid \ldots$$
tehát csak itt valósul meg ez a lehetőség.

A nagy szám legvégét is beleszámolva, összesen **4 alkalommal** fordul elő, hogy három egymást követő számjegy 023:

$$229 \mid 23\mathbf{0} \mid \mathbf{23}1 \ldots 301 \mid 3\mathbf{02} \mid \mathbf{3}03 \ldots 1022 \mid 1\mathbf{023} \mid 1024 \ldots 2022 \mid \mathbf{2023}$$

4. Joe bácsi az űrutazásról hazatérve hozott három holdkövet és három marskövet, melyeket szét szeretne osztani három fia között úgy, hogy mindenki egy holdkövet és egy marskövet kapjon. Sajnos már nem tudja, hogy melyik kő melyik égitestről származik, de szerencséjére van egy gépe, amely el tudja dönteni, hogy a gépbe berakott két kő ugyanarról az égitestről származik-e. Legalább hányszor kell használnia a gépet ahhoz, hogy biztosan szét tudja osztani jól a köveket?
A gép működése a következő: Ha a két betett kő ugyanarról az égitestről származik, akkor egy zöld lámpa villan fel. Ha különböző égitestről származnak, akkor egy piros lámpa villan fel. A gép semmilyen más információt nem ad. Nem lehet egyszerre kettőnél több követ betenni.
Keress megoldást minél kevesebb géphasználatra és mutasd meg, hogy annyi miért elegendő. Azt nem kell indokolni, hogy ennél kevesebből nem lehet megcsinálni.

A testvérek legyenek Sándor, József és Benedek, a köveket pedig jelöljük A, B, C, D, E, F-fel.

A gép kétszeri használatával el lehet osztani a köveket.

Először tegyük A-t és B-t, majd másodszor C-t és D-t a gépbe. Így négy különböző esetet kell megvizsgálni.

- Ha mindkétszer különböző égitestről származónak ítéli a gép a köveket, akkor A-t és B-t odaadhatjuk Sándornak, C-t és D-t Józsefnek, majd E-t és F-et Benedeknek.
- Ha A-t és B-t különböző égitestről származónak ítéli a gép, de C-t és D-t ugyanarról a égitestről származónak, akkor A-t és B-t adjuk oda Sándornak (ez rendben van, mert ezek a kövek különböző égitestről jönnek), majd C-t Józsefnek és D-t Benedeknek (és ez is, mert ezt a két követ csak két különböző testvérnek adhatjuk). Ekkor E-t ismét Józsefnek és F-et ismét Benedeknek adva készen vagyunk.
- Ha A-t és B-t ugyanarról a égitestről, de C-t és D-t különböző égitestről származónak ítéli a gép, az ugyanaz az eset, mint az előbb, csak megfordítva. (C és D legyen Sándoré, A és E Józsefé, B és F Benedeké.)
- Ha mindkétszer azonos égitestről származónak mondja a gép a betett köveket, akkor vegyük észre, hogy nem lehet mind a négy vizsgált kő ugyanarról az égitestről származó, mert csak három kövünk van egy égitestről. Így A-t és C-t adhatjuk Sándornak, B-t és D-t pedig Józsefnek. E és F pedig Benedeké lesz.

1. Panka gondolt egy számra. Ezután kivont belőle 1-et, majd hozzáadott 2-t, majd kivont belőle 3-at, majd hozzáadott 4-et, és így tovább. Amikor befejezte, 39-cel kisebb számot kapott eredményül, mint amelyre eredetileg gondolt.
Melyik számot adhatta hozzá vagy vonhatta ki utoljára Panka?

Tekintsük az elvégzett műveleteket kettesével.

$$\underbrace{-1+2}_{+1}\underbrace{-3+4}_{+1}\underbrace{-5+6}_{+1}\underbrace{-7+8}_{+1}\dots\underbrace{-?+?}_{+1}$$

Ha a gondolt számból kivonunk 1-et, majd hozzáadunk 2-t, az együtt olyan, mintha 1-et adtunk volna hozzá. Hasonlóan, ha kivonunk 3-at, majd hozzáadunk 4-et, az is 1-gyel növeli a szám értékét. Innentől világos, hogy minden ilyen műveletpár ugyanígy működik, mivel a hozzáadott szám értéke 1-gyel nagyobb, mint a kivont számé, így a két művelet együtt 1-gyel növeli a számot.

Így világos, hogy Panka nem fejezhette be a műveletsort egy páros szám hozzáadásával, hiszen akkor nagyobb számot kapott volna végeredményül a kezdetben gondoltnál.

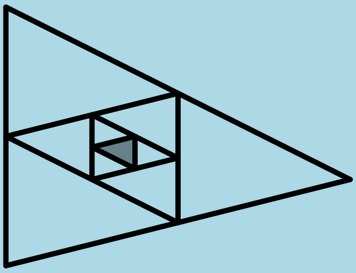
Tehát Panka egy páratlan szám kivonásával fejezte be. Most párosítsuk a műveleteket máshogy. Az első levonást vegyük külön, majd utána a -2 párja legyen a $+3$, a -4 párja legyen a $+5$, stb.

$$-1\underbrace{+2-3}_{-1}\underbrace{+4-5}_{-1}\underbrace{+6-7}_{-1}\underbrace{+8-9}_{-1}\dots\underbrace{+?-?}_{-1}$$

Ha hozzáadunk valamennyit, majd utána 1-gyel többet vonunk ki, azzal összességében 1-gyel csökkentettünk. Tehát minden ilyen műveletpár 1-gyel csökkenti az eredményt.

Így Pankának, miután elsőre kivont 1-et, még 38 ilyen műveletpárt kellett végrehajtania ahhoz, hogy összesen 39-cel csökkenjen a végeredmény. A 38-adik ilyen pár $+76-77$.
Tehát **Panka a 77 kivonásával fejezte be a műveletsort**.

2. Egy háromszögnek összekötöttük az oldalfelező pontjait, ezáltal négy egyforma területű háromszögre bontottuk. A középső háromszöggel ugyanezt az eljárást megismételtük még kétszer. A legbelső háromszöget szürkére színezve az alábbi ábrát kaptuk.

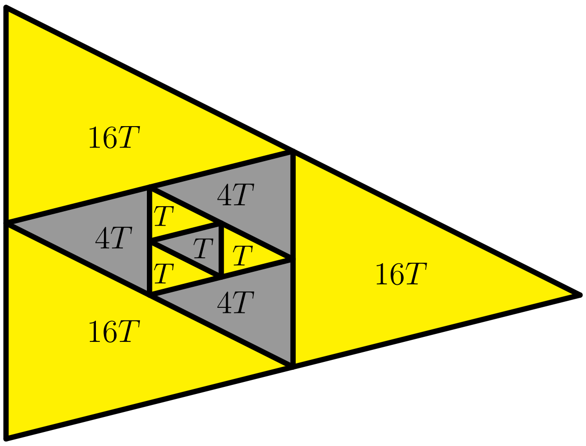


Ezután minden olyan háromszöget, melynek a belsejében nincs további szakasz berajzolva, sárgára vagy szürkére színeztünk úgy, hogy ha két háromszög több, mint egy pontban találkozik, akkor különböző színűek legyenek.

Hányszor akkora a sárga háromszögek területeinek összege, mint a szürkéké?

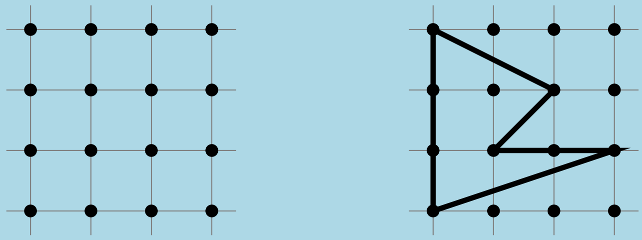
A középső, először szürkére színezett háromszög területét jelölje T. Körülötte három ugyanekkora területű háromszög helyezkedik el, ezeket sárgára kell színeznünk. Ezek mindegyikének területe is T.

A belső négy háromszög összterülete $4T$. Körülötte három „közepes méretű”, $4T$ területű háromszög helyezkedik el, melyeket szürkére kell színeznünk.
Az eddig kiszínezett összterület: $4 \cdot 4T = 16T$. Ugyanekkora területűek a legnagyobb, kiszínezendő háromszögek is, amelyeknek sárgának kell lennie.



Így a szürke terület összesen: $T + 4T + 4T + 4T = 13T$;
míg a sárga terület összesen: $T + T + T + 16T + 16T + 16T = 51T$. Tehát a sárga terület $\frac{51}{13}$-szor akkora, mint a szürke.

3. Egy matekfüzetben kijelöltünk 16 rácspontot a bal oldali ábrán látható elrendezésben.



A jobb oldali ábrán egy olyan ötszög látható, amelynek minden csúcsa a kijelölt rácspontok közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(a) Rajzolj egy olyan hatszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

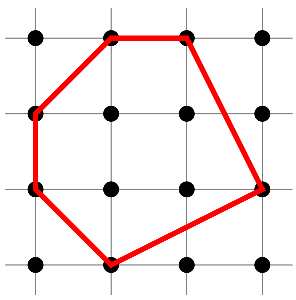
(b) Rajzolj egy olyan hétszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(c) Rajzolj egy olyan nyolcszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

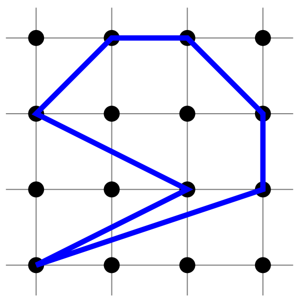
A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.

Mindegyik feladatrészre többféle jó rajz készíthető, egy-egy példát adunk meg:

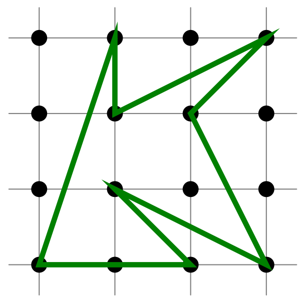
(a) Hatszög:



(b) Hétszög:



(c) Nyolcszög:



4. Csaba bácsi felírt 89 egymást követő egész számot. Csenge összeadta az első 45 számot, Csongor pedig a többit. Csodák csodájára ugyanazt a számot kapták összegként.
Mi volt a legnagyobb szám, amelyet Csaba bácsi felírt?

Jelöljük a Csenge által felírt legnagyobb számot a-val. Írjuk fel a Csenge és Csongor által összeadott számokat egymás alá balról jobbra emelkedő sorrendben!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(a-88) & + & (a-87) & + & \dots & + & (a-46) & + & (a-45) & + & (a-44) \\
\downarrow{+45} & & \downarrow{+45} & & & & \downarrow{+45} & & \downarrow{+45} & & \\
(a-43) & + & (a-42) & + & \dots & + & (a-1) & + & a & &
\end{array}$$

Ahogy az ábrán látszik, a felső sor minden elemét párosíthatjuk az alsó sor minden elemével, a felső sor utolsó elemét kivéve.

Minden párban az alsó sor eleme pont 45-tel több, mint a felső soré.

Mivel a két sor összege egyenlő, ez csak úgy lehet, ha ezeket a különbségeket a kimaradó $a - 44$ pontosan kompenzálja,

azaz, ha $a - 44 = 45 \cdot 44 = 1980$, és így $a = 2024$.

5. Legfeljebb hány pozitív egész számot lehet megadni úgy, hogy bármely kettő összege különböző számjegyre végződjön?

Négy pozitív egész számot meg lehet így adni.
Például $1, 2, 3$ és 5 megfelelő, az ezekből képezhető kéttagú összegek:

$$1 + 2 = 3; \quad 1 + 3 = 4; \quad 2 + 3 = 5; \quad 1 + 5 = 6; \quad 2 + 5 = 7; \quad 3 + 5 = 8$$

valóban csupa különböző számjegyre végződnek.

Öt (vagy még több) pozitív egész szám azonban már nem adható meg így. Öt számból ugyanis már $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$-féle összeg képezhető, így ezek csak úgy végződhetnének csupa különböző számjegyre, ha 0-tól 9-ig minden szám pontosan egyszer jelenne meg az összegek között.

Így az összegek között mindenképpen 5 páros és 5 páratlan kellene, hogy legyen.

De ez nem lehetséges, mivel:

- Ha a megadott öt szám mind páros vagy mind páratlan, akkor az összes belőlük képezhető kéttagú összeg is páros.
- Ha a megadott öt szám közül 4 páros és 1 páratlan vagy 1 páros és 4 páratlan; akkor a kéttagú összegek közül 6 páros és 4 páratlan lesz.
- Ha a megadott öt szám közül 3 páros és 2 páratlan vagy 2 páros és 3 páratlan, akkor a kéttagú összegek közül 4 páros és 6 páratlan lesz.

(Itt felhaszáltuk, hogy két páros szám összege mindig páros; két páratlan szám összege is mindig páros, míg egy páros és egy páratlan szám összege mindig páratlan).

Megjegyzés. Észrevehetjük azt is, hogy az öt adott számból képzett kéttagú összegek között mindig páros sok páratlan lesz. Ez azért teljesül, mert ha s db páros és t darab páratlan szám van az öt megadott szám között, akkor a kéttagú összegek közül $s \cdot t$ darab páratlan lesz; márpedig s és t közül az egyik mindig páros, hiszen $s + t = 5$.

Egy még körmönfontabb bizonyítás arra, hogy az öt adott számból képzett kéttagú összegek között mindig páros sok páratlan lesz: a 10 kéttagú összeg összege mindig páros, mert megegyezik az öt adott szám összegének 4-szeresével.

6. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. A mesebeli lények találkozóján tündérek, manók és óriások vettek részt. Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak. Minden manó adott egy szál virágot minden tündérnek. Így összesen 72 szál virág került átadásra. Minden tündér adott ajándékba egy szelet csokit minden óriásnak. Így összesen 48 szelet csoki került átadásra. Minden óriás adott ajándékba egy üveg szörpöt minden manónak. Hány üveg szörp kerülhetett átadásra összesen?

Az átadásra került üveg szörpök száma **csak 54 lehet**.

Ha 8 tündér vett részt a találkozón, akkor:

Mindegyik tündér $72/8 = 9$ szál virágot kapott (hiszen mindannyian ugyanannyi szálat kaptak), azaz 9 manó volt jelen.

Mindegyik tündér $48/8 = 6$ szelet csokit adott át, azaz 6 óriás volt jelen.

Így tényleg több tündér vett részt, mint óriás , míg a manók még a tündéreknél is többen voltak.

A 6 óriás a 9 manónak összesen $6 \cdot 9 = 54$ üveg szörpöt adott át.

A következőkben belátjuk, hogy más lehetőség nem lehetséges.

Ha 8-nál több, azaz legalább 9 tündér vett volna részt a találkozón, akkor legfeljebb $72/9 = 8$ manó lett volna jelen – ők így kevesebben lettek volna, mint a tündérek.

Ha 7 tündér vett volna részt, akkor mivel 72 nem osztható 7-tel, a manók száma nem lenne egész (vagy: 48 nem osztható 7-tel, így az óriások száma nem egész).

Ha 7-nél kevesebb, azaz legfeljebb 6 tündér vett volna részt a találkozón, akkor legalább $48/6 = 8$ óriás lett volna jelen – ők így többen lettek volna, mint a tündérek.

Alternatív megoldás. Más módon is belátható, hogy csak 8 tündér lehet, például: oszthatósági megfontolásokból következik, hogy a tündérek száma osztója a 24-nek (48 és 72 legnagyobb közös osztójának), így csak $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ vagy 24 lehet. Ezeket végigpróbálva kiderül, hogy csak a 8 esetén teljeül a „Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak” feltétel.

2. Öt különböző magasságú ember mindegyike két-két állítást mondott, melyek némelyike igaz, némelyike hamis volt (lehetséges, hogy ugyanazon ember egyik állítása igaz, míg a másik hamis).
Anna: „Magasabb vagyok, mint Béla.” „Két magasabb és két alacsonyabb ember van nálam.”
Béla: „Magasabb vagyok, mint Endre.” „Dénes a legmagasabb.”
Csaba: „Anna mindkét állítása igaz.” „Magasabb vagyok, mint Endre.”
Dénes: „Alacsonyabb vagyok, mint Csaba.” „Endre a második legmagasabb.”
Endre: „Béla mindkét állítása hamis.” „Magasabb vagyok, mint Anna.”

a) Lehetséges-e, hogy pontosan 1 állítás hamis a 10 állítás közül?
b) Lehetséges-e, hogy pontosan 2 állítás hamis a 10 állítás közül?

a) Mivel Endre azt állítja, hogy Béla mindkét állítása hamis, ezért ha Endrének ez az állítása igaz lenne, akkor már legalább két hamis állítás lenne az állítások között. Így tehát ha pontosan egy hamis állítás van, akkor ennek (Endre első állításának) kell az egyetlen hamisnak lennie.

Már csak azt kell megvizsgálnunk, a maradék kilenc állítás ellentmondásmentes-e.
Dénes azt állítja, alacsonyabb, mint Csaba, Béla viszont azt mondja, Dénes a legmagasabb. Ez ellentmondás, így nem lehet pontosan egy állítás hamis.

b) Az előző feladatrész végét ismét felhasználhatjuk: Dénes első állítása és Béla második állítása egyszerre nem lehet igaz.

Béla és Csaba egyszerre állítják, hogy magasabbak, mint Endre, Dénes azonban Endrét a második legmagasabbnak mondja. Ez a három állítás sem lehet igaz tehát egyszerre.

Ha tehát pontosan két hamis állítás van a tíz között, akkor ebből a két csoportból egyenek-egyenek kell a két hamis állításnak lennie, az összes többi állítás tehát igaz kell, hogy legyen. Endre első állítása tehát igaz: Béla mindkét állítása hamis. Ez pedig pont lefed egyet-egyet mindkét csoportból.

Megvan tehát az egyetlen lehetőség a két hamis állításra, már csak meg kell vizsgálni, lehetséges-e így kielégíteni az állításokat.

Anna a harmadik legmagasabb (Anna második állítása), Endre pedig a második legmagasabb (Dénes második állítása), és így Csaba a legmagasabb (Csaba első állítása). Az összes többi állításról ellenőrizhető, hogy megfelelnek a feltételeinknek (azaz Béla állításai hamisak, a többieké igazak). Dénes és Béla sorrendjéről nem tudunk meg semmit, mindkettő lehetőség jó megoldást ad.

Lehetséges tehát, hogy pontosan két állítás hamis.

3. Joe bácsi az űrutazásról hazatérve hozott három holdkövet és három marskövet, melyeket szét szeretne osztani három fia között úgy, hogy mindenki egy holdkövet és egy marskövet kapjon. Sajnos már nem tudja, hogy melyik kő melyik égitestről származik, de szerencséjére van egy gépe, amely el tudja dönteni, hogy a gépbe berakott két kő ugyanarról az égitestről származik-e. Legalább hányszor kell használnia a gépet ahhoz, hogy biztosan szét tudja osztani jól a köveket?
A gép működése a következő: Ha a két betett kő ugyanarról az égitestről származik, akkor egy zöld lámpa villan fel. Ha különböző égitestről származnak, akkor egy piros lámpa villan fel. A gép semmilyen más információt nem ad. Nem lehet egyszerre kettőnél több követ betenni.
Keress megoldást minél kevesebb géphasználatra és mutasd meg, hogy annyi miért elegendő. Azt nem kell indokolni, hogy ennél kevesebből nem lehet megcsinálni.

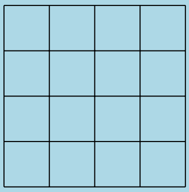
A testvérek legyenek Sándor, József és Benedek, a köveket pedig jelöljük A, B, C, D, E, F-fel.

A gép kétszeri használatával el lehet osztani a köveket.

Először tegyük A-t és B-t, majd másodszor C-t és D-t a gépbe. Így négy különböző esetet kell megvizsgálni.

- Ha mindkétszer különböző égitestről származónak ítéli a gép a köveket, akkor A-t és B-t odaadhatjuk Sándornak, C-t és D-t Józsefnek, majd E-t és F-et Benedeknek.
- Ha A-t és B-t különböző égitestről származónak ítéli a gép, de C-t és D-t ugyanarról a égitestről származónak, akkor A-t és B-t adjuk oda Sándornak (ez rendben van, mert ezek a kövek különböző égitestről jönnek), majd C-t Józsefnek és D-t Benedeknek (és ez is, mert ezt a két követ csak két különböző testvérnek adhatjuk). Ekkor E-t ismét Józsefnek és F-et ismét Benedeknek adva készen vagyunk.
- Ha A-t és B-t ugyanarról a égitestről, de C-t és D-t különböző égitestről származónak ítéli a gép, az ugyanaz az eset, mint az előbb, csak megfordítva. (C és D legyen Sándoré, A és E Józsefé, B és F Benedeké.)
- Ha mindkétszer azonos égitestről származónak mondja a gép a betett köveket, akkor vegyük észre, hogy nem lehet mind a négy vizsgált kő ugyanarról az égitestről származó, mert csak három kövünk van egy égitestről. Így A-t és C-t adhatjuk Sándornak, B-t és D-t pedig Józsefnek. E és F pedig Benedeké lesz.

4. A tornatanár egy 4×4-es rácsot rajzolt az iskolaudvarra. A rács mind a 16 mezőjére felállt egy-egy diák, úgy, hogy valamelyik rácsvonallal párhuzamos irányba néz. A tornatanár néha tapsol egyet. Ha két élszomszédos mezőn álló diák éppen egymás felé néz, akkor a tapsra mindketten $90°$-os fordulatot végeznek jobbra. Ezen kívül semmilyen más mozgást nem végeznek. Legfeljebb hány fordulatot végezhet a legtöbb fordulatot végző diák?



Csoportosítsuk a táblázat mezőit elhelyezkedésük alapján az ábra szerint, így kapunk *sarokmező*ket (s), *oldalsó mező*ket (o), illetve *középső mező*ket (k).

s	o	o	s
o	k	k	o
o	k	k	o
s	o	o	s

Ha valaki o vagy s jelű mezőn áll, akkor amint egyszer kifelé néz a táblázatból, onnantól már nem fog többet fordulni, hiszen nem fog szembenézni többé senkivel. Emiatt s-en állók legfeljebb 2-szer, o-n állók legfeljebb 3-szor fordulnak.

Nézzünk most egy k jelű mezőn álló diákot, nevezzük X-nek. X két szomszédja szintén k-n áll, a másik két szomszédja pedig o-n. Ha X egyszer egy o-n álló szomszédjával szemben áll, akkor a következő tapsra fordulnak, és ezt követően ugyanaz a szomszéd soha nem fog már szemben állni X-szel (hiszen nem tud újra az előző irányba kerülni).

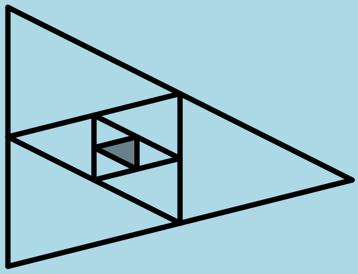
Emiatt X sem fog tudni újra továbbfordulni, ha megint ugyanazen szomszéd felé néz. Így, mivel az o-n álló szomszédaival legfeljebb egyszer néz szembe, addig a k-n álló szomszédaival is legfeljebb kétszer tud szemben állni. Ez azt jelenti, hogy X (és így bármelyik k jelű mezőn álló diák) legfeljebb 6 alkalommal fordulhat.

Már csak azt kell belátnunk, hogy a 6 fordulás tényleg megtörténhet egy diáknál. Az ábrán látható helyzetből indulva (a nyilak azt mutatják, hogy melyik irányba néz egy adott diák), a szürke háttérrel jelölt mezőn álló diák 6-szor fog fordulni.

←	↓	↓	→
→	↓	←	←
→	↑	←	←
←	↑	↑	→

7. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Egy háromszögnek összekötöttük az oldalfelező pontjait, ezáltal négy egyforma területű háromszögre bontottuk. A középső háromszöggel ugyanezt az eljárást megismételtük még kétszer. A legbelső háromszöget szürkére színezve az alábbi ábrát kaptuk.

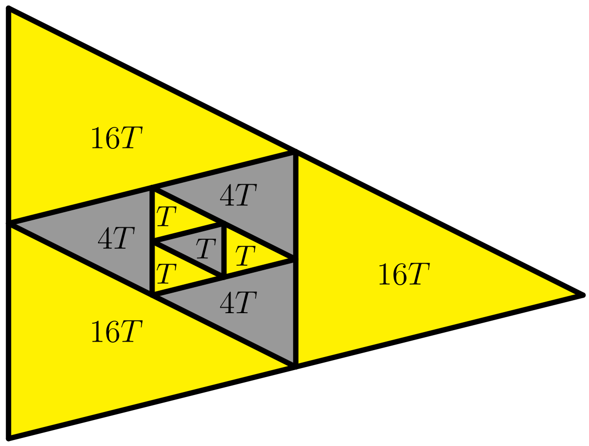


Ezután minden olyan háromszöget, melynek a belsejében nincs további szakasz berajzolva, sárgára vagy szürkére színeztünk úgy, hogy ha két háromszög több, mint egy pontban találkozik, akkor különböző színűek legyenek.

Hányszor akkora a sárga háromszögek területeinek összege, mint a szürkéké?

A középső, először szürkére színezett háromszög területét jelölje T. Körülötte három ugyanekkora területű háromszög helyezkedik el, ezeket sárgára kell színeznünk. Ezek mindegyikének területe is T.

A belső négy háromszög összterülete $4T$. Körülötte három „közepes méretű”, $4T$ területű háromszög helyezkedik el, melyeket szürkére kell színeznünk.
Az eddig kiszínezett összterület: $4 \cdot 4T = 16T$. Ugyanekkora területűek a legnagyobb, kiszínezendő háromszögek is, amelyeknek sárgának kell lennie.



Így a szürke terület összesen: $T + 4T + 4T + 4T = 13T$;
míg a sárga terület összesen: $T + T + T + 16T + 16T + 16T = 51T$. Tehát a sárga terület $\frac{51}{13}$-szor akkora, mint a szürke.

2. Egy csapat működési szabályzata rögzíti, hogy rendkívüli esemény esetén a csapat vezetője kiket hív fel a hírrel, s azok, akik megkapták a hírt, kit kell, hogy felhívjanak az információ továbbadása végett. Ezt nevezzük riadóláncnak. A riadólánc jól működik, tehát minden csapattagot csak egyszer hívnak fel (a vezetőn kívül, akit nem hív fel senki), és a hír mindenkihez eljut. Érdekes módon a riadólánc felépítése olyan, hogy a vezetőn kívül mindenki annyi embert hív fel, ahányat az őt értesítő őutána még felhív. Hány embert kell a vezetőnek felhívnia, ha tudjuk, hogy a csapatban 100-nál többen, de 200-nál kevesebben vannak?

Tegyük fel, hogy minden hívás lezajlik egy perc alatt, és mindenki percenként telefonálva intézi a szükséges hívásokat. Ekkor észrevehetjük, hogy minden csapattag pontosan akkor fog végezni a hívásaival, amikor az őt felhívó személy végez, hiszen a beszélgetésük után még ugyanannyi embert hívnak fel. Ez egyben azt is jelenti, hogy mindenki egyszerre végez.

Ha egy adott pillanatban n ember tudja a hírt, akkor a következő percben ők másik n embert fognak felhívni, hiszen a felhívottak között nincs átfedés. Ez azt jelenti, hogy a párhuzamosan zajló hívások után pontosan kétszer annyian tudják a hírt. Vagyis minden hívásnál kétszereződik az információ birtokában lévő csapattagok száma.

Mivel kezdetben csak a vezető ismerte a hírt és egyedül indította a riadóláncot, így a percenkénti duplázással 7 perc alatt jut el a hír 128 emberhez. Ha ezt követően zajlana még hívás, akkor a csapattagok száma meghalaná a 200-at, ha pedig hamarabb véget ért volna, akkor nem érné el a 100-at. Tehát azt is megtudtuk, hogy a vezetővel együtt a csapatban 128 ember van, és a sikeres riadólánchoz a vezetőnek 7 embert kell felhívnia.

Második megoldás. Nevezzük a riadólánc végpontjainak azokat a csapattagokat, akiknek nem kell senkit felhívniuk. Minden végpontot felhív pontosan egy nem-végpont, és minden nem-végpont pontosan egy végpontot hív fel, aki az általa értestendő személyek sorában az utolsó. Ezért pontosan ugyanannyi végpont, mint nem-végpont van a riadóláncban.

Távolítsuk el most az összes végpontot a riadóláncból. Ekkor minden korábbi nem-végpontnak eggyel kevesebb csapattagot kell felhívnia, mint eddig. Ezért megmarad az a tulajdonság, hogy a vezetőn kívül mindenki annyi embert hív fel, ahányat az őt értesítő őutána még felhív. Így ebben a csökkentett riadóláncban is egyenlő a végpontok és a nem-végpontok száma.

Az eljárást folytatva minden lépésben megfelezzük a riadólánc létszámát, amíg csak a vezető marad. Következésképpen a csapat létszámának 2-hatványnak kell lennie. Mivel 100 és 200 között az egyetlen 2-hatvány a 128, csak ennyi lehet a csapat létszáma.

A vezető által felhívott emberek száma minden felezésnél eggyel csökkent, így eredetileg neki 7 embert kellett felhívnia.

3. Egy ötjegyű számot *csattanós*nak hívunk, ha a százasok és a tízesek helyén azonos számjegy áll, és ennél nagyobb számjegy áll az egyesek helyén. Hány 9-cel osztható csattanós szám van?

Mivel az első számjegy nem lehet 0, így az 9-féle különböző értéket vehetne fel. Ha azonban vizsgáljuk a szám másik négy számjegyét, kiderül, hogy a 9-cel való oszthatóság miatt ezek közül pontosan egy lesz jó. (Pontosan akkor osztható egy szám 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel. Jelölje az utolsó négy számjegy összegét S. Ekkor $S+1, S+2, \dots S+9$ kilenc egymást követő egész szám, tehát közülük pontosan egy osztható 9-cel.)

Tehát a 9-cel való oszthatóságot innentől nem kell figyelembe vennünk, csak azt kell összeszámolnunk, hogy hány olyan szám van, ami a feladat többi feltételét teljesíti, vagyis a százasok és tízesek helyén álló számjegye egyenlő, és az egyesek helyén álló számjegye ezeknél nagyobb. Minden egyes ilyen szám pontosan egyféleképpen egészíthető ki csattanós számmá.

Ha a százasok és tízesek helyén álló számjegy k, akkor az egyesek helyén $(9-k)$-féle számjegy szerepelhet. Az utolsó három jegyet tekintve tehát $9+8+\dots+2+1=45$-féle végződés jön szóba, ezek mindegyikénél az ezresek helyén mind a tízféle számjegy szerepelhet, tehát összesen $10 \cdot 45 = 450$ csattanós szám van.

4. Egy végtelen számsorozat első tagja 2, második tagja 1. Ezután a sorozat minden tagja az előző két tag összegének reciproka. Azaz a harmadik tag $2+1=3$ reciproka, vagyis $\frac{1}{3}$; a negyedik tag $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ reciproka, vagyis $\frac{3}{4}$. Szerepel-e a sorozatban 2-nél nagyobb szám?

Érdemes a sorozat első néhány tagját felírnunk:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{4}, \quad a_5 = \frac{12}{13}$$

Vegyük észre, hogy a_4 és a_5 két egymást követő tag, amelyek mindegyike $\frac{1}{2}$ és 1 közé esik.

Márpedig ha ebben a sorozatban szerepel egymás után két $\frac{1}{2}$ és 1 közötti szám, akkor onnantól kezdve a sorozat összes tagja $\frac{1}{2}$ és 1 közé fog esni.

Hiszen két $1/2$ és 1 közé eső szám összege 1 és 2 közé esik, ennek reciproka pedig $\frac{1}{2}$ és 1 közé esik.

Tehát a sorozat hatodik tagjától kezdve minden szám $\frac{1}{2}$ és 1 közé fog esni.

Mivel az első 5 tag egyike sem volt 2-nél nagyobb, így a sorozatban egyáltalán nem szerepelhet 2-nél nagyobb szám.

Második megoldás. Tegyük fel, hogy szerepel a sorozatban 2-nél nagyobb szám. Ekkor az előző két tag összege kisebb $1/2$-nél, hiszen a reciproka 2-nél nagyobb. Így az előző két tag közül legalább az egyik kisebb $1/4$-nél. (Mivel pozitív számok összegének reciproka is mindig pozitív, a sorozatban csak pozitív számok szerepelhetnek.)

Ha a sorozat egy tagja kisebb $1/4$-nél, akkor a megelőző két tag összege nagyobb 4-nél. Így ezen tagok közül legalább az egyik 2-nél nagyobb.

Tehát ha szerepel a sorozatban 2-nél nagyobb szám, akkor a megelőző négy tag közül legalább egy szintén 2-nél nagyobb. Így a legelső olyan tag, ami 2-nél nagyobb, nem lehet a negyedik tag után. Viszont az első négy tag egyike sem nagyobb 2-nél, tehát a sorozatban nem szerepel 2-nél nagyobb szám.

5. Anna és Béla kezében is öt-öt számjegykártya van, Annánál az $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$, Bélánál pedig a $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$. Felváltva balról jobbra rakják le a számjegykártyákat, így egy tízjegyű számot képezve. Anna kezd. Mi a legnagyobb kettőhatvány, amelyről Béla garantálni tudja (Anna bármilyen stratégiája esetén), hogy osztani fogja a kapott tízjegyű számot?

Először megmutatjuk, hogy Béla el tudja érni, hogy a kirakott szám osztható legyen 8-cal.

Ehhez elég arra figyelnie, hogy a $\boxed{2}$ és $\boxed{6}$ számjegyeket hagyja meg az utolsó két kártyának. Amikor Anna lerakta az utolsó előtti számjegykártyáját, eldőlt az is, melyik lesz az utolsó páratlan számjegy. Bármi is legyen Anna utolsó kártyája, az alábbi táblázat megmutatja, Béla tudja olyan sorrendben használni a $\boxed{2}$ és $\boxed{6}$ számjegyeket, hogy az utolsó három számjegy 8-cal osztható számot alkosson.

Anna utolsó kártyája	utolsó három jegy
1	$216 = 8 \cdot 27$
3	$632 = 8 \cdot 79$
5	$256 = 8 \cdot 32$
7	$672 = 8 \cdot 84$
9	$296 = 8 \cdot 37$

Ez pedig azt jelenti, hogy a teljesen 10-jegyű szám is osztható lesz 8-cal (mivel a 8-cal való oszthatóságot az utolsó három számjegy meghatározza).

Másodszor azt látjuk be, hogy Anna meg tudja akadályozni, hogy a kirakott szám osztható legyen 16-tal. Ehhez Anna tartsa meg utolsó kettőnek az $\boxed{5}$ és a $\boxed{7}$ kártyákat.

- Ha Béla nem tartja a $\boxed{2}$ kártyáját, akkor Anna a $\boxed{7}$ kártyáját rakja le utoljára, így az utolsó két számjegy $\overline{7x}$ lesz, ahol x nem 2, így ez nem osztható 8-cal, tehát az elé tett páratlan számjeggyel együtt sem osztható nyolccal, és így a szám nem osztható sem 8-cal, sem 16-tal.
- Ha Béla nem tartja a $\boxed{6}$ kártyáját, akkor Anna az $\boxed{5}$ kártyáját rakja le utoljára, így az utolsó két számjegy $\overline{5x}$ lesz, ahol x nem 6, így ez szintén nem lesz osztható se 8-cal, az elé tett páros számjeggyel együtt sem oszható nyolccal, és így a szám nem osztható sem 8-cal, sem 16-tal.
- Ha Béla utolsó két számjegye a $\boxed{2}$ és a $\boxed{6}$, akkor Anna rakja le $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ sorrendben a két kártyáját. Ekkor az utolsó 4 számjegy 5276 vagy 5672 lehet, és ezek egyike sem osztható 16-tal.

Ha tehát mindketten a lehető legokosabban játszanak, akkor egy 8-cal osztható, de 16-tal nem osztható számot kapnak a játék végén. Azaz **3-szor lehet majd elosztani a számot 2-vel** úgy, hogy még egész legyen az eredmény.

7. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Öt különböző magasságú ember mindegyike két-két állítást mondott, melyek némelyike igaz, némelyike hamis volt (lehetséges, hogy ugyanazon ember egyik állítása igaz, míg a másik hamis).
Anna: ,,Magasabb vagyok, mint Béla.” ,,Két magasabb és két alacsonyabb ember van nálam.”
Béla: ,,Magasabb vagyok, mint Endre.” ,,Dénes a legmagasabb.”
Csaba: ,,Anna mindkét állítása igaz.” ,,Magasabb vagyok, mint Endre.”
Dénes: ,,Alacsonyabb vagyok, mint Csaba.” ,,Endre a második legmagasabb.”
Endre: ,,Béla mindkét állítása hamis.” ,,Magasabb vagyok, mint Anna.”

   a) Lehetséges-e, hogy pontosan 1 állítás hamis a 10 állítás közül?

   b) Lehetséges-e, hogy pontosan 2 állítás hamis a 10 állítás közül?

a) Mivel Endre azt állítja, hogy Béla mindkét állítása hamis, ezért ha Endrének ez az állítása igaz lenne, akkor már legalább két hamis állítás lenne az állítások között. Így tehát ha pontosan egy hamis állítás van, akkor ennek (Endre első állításának) kell az egyetlen hamisnak lennie.

Már csak azt kell megvizsgálnunk, a maradék kilenc állítás ellentmondásmentes-e.
Dénes azt állítja, alacsonyabb, mint Csaba, Béla viszont azt mondja, Dénes a legmagasabb.
Ez ellentmondás, így nem lehet pontosan egy állítás hamis.

b) Az előző feladatrész végét ismét felhasználhatjuk: Dénes első állítása és Béla második állítása egyszerre nem lehet igaz.

Béla és Csaba egyszerre állítják, hogy magasabbak, mint Endre, Dénes azonban Endrét a második legmagasabbnak mondja. Ez a három állítás sem lehet igaz tehát egyszerre.

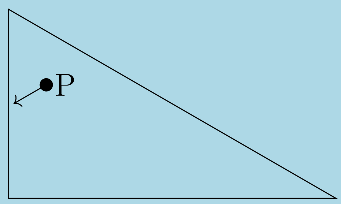
Ha tehát pontosan két hamis állítás van a tíz között, akkor ebből a két csoportból egynek-egynek kell a két hamis állításnak lennie, az összes többi állítás tehát igaz kell, hogy legyen. Endre első állítása tehát igaz: Béla mindkét állítása hamis. Ez pedig pont lefed egyet-egyet mindkét csoportból.

Megvan tehát az egyetlen lehetőség a két hamis állításra, már csak meg kell vizsgálni, lehetséges-e így kielégíteni az állításokat.

Anna a harmadik legmagasabb (Anna második állítása), Endre pedig a második legmagasabb (Dénes második állítása), és így Csaba a legmagasabb (Csaba első állítása). Az összes többi állításról ellenőrizhető, hogy megfelelnek a feltételeinknek (azaz Béla állításai hamisak, a többieké igazak). Dénes és Béla sorrendjéről nem tudunk meg semmit, mindkettő lehetőség jó megoldást ad.

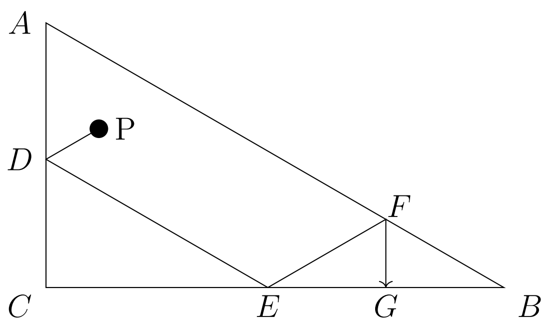
Lehetséges tehát, hogy pontosan két állítás hamis.

2. Egy derékszögű háromszög alakú, lyukak nélküli biliárdasztal egyik csúcsánál az oldalak 30°-os szöget zárnak be egymással. Egy biliárdgolyót elindítunk az ábrán jelölt módon, a P pontból úgy, hogy az először az asztal legrövidebb oldalát éri el annak egy belső pontjában. A golyó haladási iránya 60°-os szöget zár be a legrövidebb oldallal.



A golyó útját vizsgálva azt látjuk, hogy minden egyes alkalommal, amikor találkozik a fallal, tökéletesen pattanva halad tovább, vagyis a falhoz érkező, valamint a faltól elinduló haladási iránya ugyanakkora szöget zár be a fallal. Hány pattanás után lesz a golyó újra a P pontban?

Tekintsük az alábbi ábrán a golyó útja során az első három pattanást.



A szöveg szerint felírható, hogy $EDC\sphericalangle = PDA\sphericalangle = 60°$, tehát DE szakasz párhuzamos AB-vel. Emiatt a golyó az első pattanás után biztos, hogy a háromszög hosszabb befogójának belső pontján pattan meg. Innen az iránya miatt csak az átfogóhoz érhet, s a szögek alapján látni fogjuk, hogy a következő pattanás helye megint a BC oldal belsejébe esik.

CDE háromszögben már meghatározható, hogy $DEC\sphericalangle = 30°$, s a pattanás miatt $DEC\sphericalangle = FEG\sphericalangle$, tehát ez utóbbi is 30°-os. Emiatt $DEF\sphericalangle = 120°$, vagyis $EFA\sphericalangle = 60°$. A pattanás miatt ez megegyezik $BFG\sphericalangle$-gel. Mivel a B-nél levő szög 30°-os, ezért $FGB\sphericalangle = 90°$.

Tehát a golyó innentől kezdve ugyanezt az útvonalat járja be visszafelé,

vagyis rendre a D, E, F, G, F, E, D pontokon át, **7 pattanás után lesz újra a P pontban.**

3. Van 1000 kártya, melyek 000-tól 999-ig vannak megszámozva, és 100 doboz, melyek 00-tól 99-ig vannak megszámozva. Egy kártyát egy dobozba akkor lehet belerakni, ha a doboz száma a kártya számából egy számjegy elhagyásával kapható meg (így például a 627-es számú kártya a 27-es, a 67-es vagy a 62-es számú dobozok valamelyikébe tehető). Dobozokba lehet-e tenni az összes kártyát úgy, hogy 50 doboz üresen maradjon?

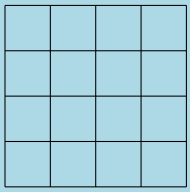
Meg fogjuk mutatni, hogy lehetséges. A kártyákat úgy fogjuk elhelyezni, hogy csak olyan dobozt használjunk, melynek a sorszámában vagy mindkét számjegy páros, vagy mindkettő páratlan.

Mivel 5-féle páros számjegy van, így olyan doboz, melynek sorszámában mindkét számjegy páros, $5 \cdot 5 = 25$ található. Ugyanígy az 5 páratlan számjegy felhasználásával 25 olyan dobozt kapunk, melynek mindkét számjegye páratlan. Ez összesen legfeljebb 50 doboz felhasználását jelenti, tehát legalább 50 doboz üresen marad.

Minden kártyán három számjegy található. Vizsgáljuk meg, hogy ezek között hány páros számjegy lehet! Ha 2 vagy 3, akkor tudunk úgy egy számjegyet elhagyni, hogy két páros számjegy maradjon, így a kártya elhelyezhető megfelelően egy dobozba az előbbiek közül. Amennyiben pedig csak 1 vagy 0 páros számjegyet találunk, úgy páratlan számjegyből lesz 2 vagy 3, így azt tudjuk elérni, hogy egy számjegy elhagyásával két páratlan számjegyből álljon a szám, ennek megfelelően kerül jó dobozba.

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, tehát valóban elhelyezhetőek a kártyák a feladat feltételei szerint.

4. A tornatanár egy 4×4-es rácsot rajzolt az iskolaudvarra. A rács mind a 16 mezőjére felállt egy-egy diák, úgy, hogy valamelyik rácsvonallal párhuzamos irányba néz. A tornatanár néha tapsol egyet. Ha két élszomszédos mezőn álló diák éppen egymás felé néz, akkor a tapsra mindketten $90°$-os fordulatot végeznek jobbra. Ezen kívül semmilyen más mozgást nem végeznek. Lehetséges-e, hogy a 30. tapsnál még fordul valaki?



Csoportosítsuk a táblázat mezőit elhelyezkedésük alapján az ábra szerint, így kapunk *sarokmező*ket (s), *oldalsó mező*ket (o), illetve *középső mező*ket (k).

s	o	o	s
o	k	k	o
o	k	k	o
s	o	o	s

Ha valaki o vagy s jelű mezőn áll, akkor amint egyszer kifelé néz a táblázatból, onnantól már nem fog többet fordulni, hiszen nem fog szembenézni többé senkivel. Emiatt s-en állók legfeljebb 2-szer, o-n állók legfeljebb 3-szor fordulnak.

Nézzünk most egy k jelű mezőn álló diákot, nevezzük X-nek. X két szomszédja szintén k-n áll, a másik két szomszédja pedig o-n. Ha X egyszer egy o-n álló szomszédjával szemben áll, akkor a következő tapsra fordulnak, és ezt követően ugyanaz a szomszéd soha nem fog már szemben állni X-szel (hiszen nem tud újra az előző irányba kerülni).

Emiatt X sem fog tudni újra továbbfordulni, ha megint ugyanazen szomszéd felé néz. Így, mivel az o-n álló szomszédaival legfeljebb egyszer néz szembe, addig a k-n álló szomszédaival is legfeljebb kétszer tud szemben állni. Ez azt jelenti, hogy X (és így bármelyik k jelű mezőn álló diák) legfeljebb 6 alkalommal fordulhat.

Számoljuk meg, hogy összesen hány fordulás történhet legfeljebb. A négy s-en álló legfeljebb 2-szer, a nyolc o-n álló legfeljebb 3-szor, a négy k-n álló diák pedig legfeljebb 6-szor fordulhat. Tehát a fordulások száma nem lehet több, mint $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 56$.

Mivel egy tapsnál legalább ketten fordulnak egyszerre, ez azt jelenti, hogy a játék során legfeljebb $56/2 = 28$ tapsnál fordulhattak, vagyis a 30. tapsnál már biztosan nem fordult senki.

1. Egy termék árát növelték p %-kal, majd csökkentették p %-kal, így a végső ára az eredeti árhoz képest 9 %-kal kisebb lett. Határozzuk meg p értékét.

Ha a termék ára eredetileg x volt, akkor a növelés után $(1+\frac{p}{100})\cdot x$ lett az ára, amelyet ha csökkentünk p %-kal, akkor $\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x\right)$-re változik. A feladat állítása szerint ez megegyezik 0,91x értékével. Tehát

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=0{,}91$$

vagyis

$$1-\left(\frac{p}{100}\right)^2=0{,}91$$

Ebből, mivel p pozitív, $\frac{p}{100}=0{,}3$ adódik, vagyis $p=30$. A kezdeti növelés 30 %-os volt.

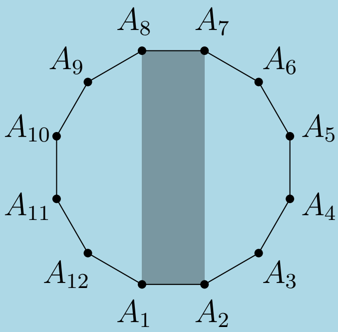
2. Egy ötjegyű számot *csattanós*nak hívunk, ha a százasok és a tízesek helyén azonos számjegy áll, és ennél nagyobb számjegy áll az egyesek helyén. Hány 9-cel osztható csattanós szám van?

Mivel az első számjegy nem lehet 0, így az 9-féle különböző értéket vehetne fel. Ha azonban vizsgáljuk a szám másik négy számjegyét, kiderül, hogy a 9-cel való oszthatóság miatt ezek közül pontosan egy lesz jó. (Pontosan akkor osztható egy szám 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel. Jelölje az utolsó négy számjegy összegét S. Ekkor $S+1, S+2, \ldots S+9$ kilenc egymást követő egész szám, tehát közülük pontosan egy osztható 9-cel.)

Tehát a 9-cel való oszthatóságot innentől nem kell figyelembe vennünk, csak azt kell összeszámolnunk, hogy hány olyan szám van, ami a feladat többi feltételét teljesíti, vagyis a százasok és tízesek helyén álló számjegye egyenlő, és az egyesek helyén álló számjegye ezeknél nagyobb. Minden egyes ilyen szám pontosan egyféleképpen egészíthető ki csattanós számmá.

Ha a százasok és tízesek helyén álló számjegy k, akkor az egyesek helyén $(9-k)$-féle számjegy szerepelhet. Az utolsó három jegyet tekintve tehát $9+8+\cdots+2+1=45$-féle végződés jön szóba, ezek mindegyikénél az ezresek helyén mind a tízféle számjegy szerepelhet, tehát összesen $10\cdot 45=450$ csattanós szám van.

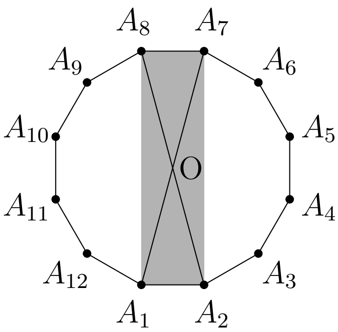
3. Legyen $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ egy szabályos 12-szög. Hányszorosa a 12-szög területe az $A_1A_2A_7A_8$ téglalap területének?

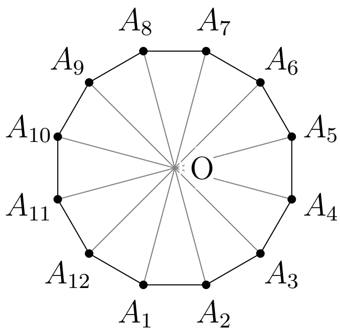


Húzzuk be a téglalap két átlóját, ezek a kör O középpontjában metszik egymást, és négy egyenlő területű részre osztják a téglalapot.

Utóbbi állítást például így bizonyíthatjuk: a téglalapot egyik átlója behúzásával két egybevágó, így egyenlő területű háromszögre osztjuk. Ha ezután a másik átlót is, a behúzott szakaszok mindkét háromszögben súlyvonalak, így mindkét háromszöget területét felezni fogják.

Emiatt a téglalap területe négyszerese az A_1A_2O háromszög területének.





Mivel a 12-szög szabályos, így bármely két szomszédos csúcsát O-val összekötve egymással egybevágó háromszögeket kapunk.

Látható tehát, hogy a sokszög területe 12-szerese egy ilyen háromszög területének.

Vagyis a sokszög területe a téglalap területének háromszorosa.

4. Anna és Béla kezében is öt-öt számjegykártya van, Annánál az $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$, Bélánál pedig a $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$. Felváltva balról jobbra rakják le a számjegykártyákat, így egy tízjegyű számot képezve. Anna kezd. Mi a legnagyobb kettőhatvány, amelyről Béla garantálni tudja (Anna bármilyen stratégiája esetén), hogy osztani fogja a kapott tízjegyű számot?

Először megmutatjuk, hogy Béla el tudja érni, hogy a kirakott szám osztható legyen 8-cal.

Ehhez elég arra figyelnie, hogy a $\boxed{2}$ és $\boxed{6}$ számjegyeket hagyja meg az utolsó két kártyának. Amikor Anna lerakta az utolsó előtti számjegykártyáját, eldőlt az is, melyik lesz az utolsó páratlan számjegy. Bármi is legyen Anna utolsó kártyája, az alábbi táblázat megmutatja, Béla tudja olyan sorrendben használni a $\boxed{2}$ és $\boxed{6}$ számjegyeket, hogy az utolsó három számjegy 8-cal osztható számot alkosson.

Anna utolsó kártyája	utolsó három jegy
1	$216 = 8 \cdot 27$
3	$632 = 8 \cdot 79$
5	$256 = 8 \cdot 32$
7	$672 = 8 \cdot 84$
9	$296 = 8 \cdot 37$

Ez pedig azt jelenti, hogy a teljesen 10-jegyű szám is osztható lesz 8-cal (mivel a 8-cal való oszthatóságot az utolsó három számjegy meghatározza).

Másodszor azt látjuk be, hogy Anna meg tudja akadályozni, hogy a kirakott szám osztható legyen 16-tal. Ehhez Anna tartsa meg utolsó kettőnek az $\boxed{5}$ és a $\boxed{7}$ kártyákat.

- Ha Béla nem tartja a $\boxed{2}$ kártyáját, akkor Anna a $\boxed{7}$ kártyáját rakja le utoljára, így az utolsó két számjegy $\overline{7x}$ lesz, ahol x nem 2, így ez nem osztható 8-cal, tehát az elé tett páratlan számjeggyel együtt sem osztható nyolccal, és így a szám nem osztható sem 8-cal, sem 16-tal.
- Ha Béla nem tartja a $\boxed{6}$ kártyáját, akkor Anna az $\boxed{5}$ kártyáját rakja le utoljára, így az utolsó két számjegy $\overline{5x}$ lesz, ahol x nem 6, így ez szintén nem lesz osztható se 8-cal, az elé tett páros számjeggyel együtt sem oszható nyolccal, és így a szám nem osztható sem 8-cal, sem 16-tal.
- Ha Béla utolsó két számjegye a $\boxed{2}$ és a $\boxed{6}$, akkor Anna rakja le $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ sorrendben a két kártyáját. Ekkor az utolsó 4 számjegy 5276 vagy 5672 lehet, és ezek egyike sem osztható 16-tal.

Ha tehát mindketten a lehető legokosabban játszanak, akkor egy 8-cal osztható, de 16-tal nem osztható számot kapnak a játék végén. Azaz **3-szor lehet majd elosztani a számot 2-vel** úgy, hogy még egész legyen az eredmény.

5. A bergengóc vásáron kétféle fizetőeszköz létezik: arany és ezüst. Tudjuk, hogy 1 kecske és 5 birka 4 aranyba és 8 ezüstbe, 7 kecske és 2 birka 11 aranyba és 8 ezüstbe, 3 kecske és 4 birka 7 aranyba és 6 ezüstbe kerül. Szeretnénk 2 kecskét és 3 birkát venni. Hány ezüstöt kell még adnunk, ha már 2 aranyat adtunk az eladónak?

Próbáljunk keresni olyan állatmennyiséget, amit kétféleképpen is elő lehet állítani az ismert mennyiségekből. Látható, hogy a 9 kecske és 12 birka megkapható egyrészt úgy, hogy kétszer veszünk 1 kecskét és 5 birkát, egyszer pedig 7 kecskét és 2 birkát, másrészt pedig ha háromszor veszünk 3 kecskét és 4 birkát.

Az első esetben 19 aranyat és 24 ezüstöt fizetünk, a másodikban 21 aranyat és 18 ezüstöt.

Ez alapján megállapítható, hogy 2 arany ugyanannyit ér, mint 6 ezüst, vagyis 1 arany az 3 ezüstöt ér.

Az aranyokat ezüsttel helyettesítve azt kapjuk, hogy 3 kecske 4 birka 27 ezüstbe, 1 kecske és 5 birka 20 ezüstbe kerül. Ez utóbbi azt jelenti, hogy 3 kecske és 15 birka 60 ezüstbe kerül, vagyis a 11-gyel több birka 33-mal több ezüstbe kerül, azaz 1 birka 3 ezüstbe kerül. Ebből pedig kiszámolható, hogy 1 kecske 5 ezüstbe kerül.

A feladat kérdése, a 2 kecske és 3 birka összesen 19 ezüstbe kerülne, amiből mi már 2 aranyat kaptunk így még $19 - 2 \cdot 3 = 13$ ezüstöt kell még adnunk.

8. osztály, 2. nap — **Országos döntő**

1. Anna, Bea, Cili és Dóra leült egy körbe. Anna felírta két kedvenc számát (különböző pozitív egészek) egy lapra, majd továbbadta jobbra. Amikor valaki megkapta a lapot, kiradírozta a rajta lévő két számot, és helyükre felírta a kiradírozott két szám összegét és különbségét, majd továbbadta a lapot jobbra. Mikor a lap visszaért Annához, azt látta, hogy a lapon szereplő két szám közül az egyik megegyezik az általa felírt kisebb számmal, míg a másik szám az általa felírt nagyobb számnál 42-vel nagyobb. Mi Anna két kedvenc száma?
Két szám különbségét úgy számítjuk, hogy a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbiket.

Jelölje az Anna által felírt két pozitív egészt x és y úgy, hogy $x > y$.
Foglaljuk táblázatba, hogy ki melyik számokat írta fel a lapra:

Anna	x	y
Bea	$x+y$	$x-y$
Cili	$2x$	$2y$
Dóra	$2x+2y$	$2x-2y$

(A táblázatban azért egyértelmű minden szám, mivel a bal oldalt szereplő számoknak muszáj nagyobbnak lenniük a jobb oldaliaknál, következésképp egyértelmű a különbség képzése is.)

A feladat szövege alapján a következő egyenleteket írhatjuk föl:

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= y \\ 2x + 2y &= x + 42 \end{aligned}$$

(Azért biztos, hogy $2x-2y$ egyezik meg y-nal, mert $x>y$ és $2x+2y>2x-2y$).

Az egyenletrendszer megoldásaként $x=18$, $y=12$ adódik.

Így az egyes lányok által felírt számok:

Anna	18	12
Bea	30	6
Cili	36	24
Dóra	60	12

valóban teljesítik a feladat feltételeit.

Tehát **Anna kedvenc számai 18 és 12**.

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek az összes osztója közül a negyedik legnagyobb a 42?
Például a 12 osztói: 1, 2, 3, 4, 6 és 12, így a negyedik legnagyobb osztója a 3.

Legyen N egy olyan szám, amelynek a negyedik legnagyobb osztója 42. Ekkor N osztható 42-vel, így 2-vel, 3-mal és 6-tal is, ezért N három legnagyobb osztója biztosan N, $\frac{N}{2}$ és $\frac{N}{3}$.

Mivel az $\frac{N}{6}$ biztosan szerepel az osztók között, a negyedik legnagyobb osztó csak az $\frac{N}{4}$, az $\frac{N}{5}$ vagy az $\frac{N}{6}$ lehet.

Ha a negyedik legnagyobb osztó $\frac{N}{4}$, akkor $N=42\cdot 4=168$. Ennek valóban 42 a negyedik legnagyobb osztója.

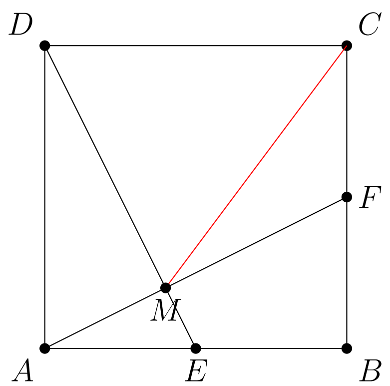
Ha a negyedik legnagyobb osztó $\frac{N}{5}$, akkor $N=42\cdot 5=210$, ennek is valóban 42 a negyedik legnagyobb osztója.

Ha a negyedik legnagyobb osztó $\frac{N}{6}$, akkor viszont $N=6\cdot 42=252$, ez viszont osztható 4-gyel is, és így a 42 csak az ötödik legnagyobb osztója (az $N=252$, az $\frac{N}{2}=126$, az $\frac{N}{3}=84$ és az $\frac{N}{4}=63$ után).

Tehát **2 olyan szám van**, ami a feladat feltételeinek megfelel, a 168, illetve a 210.

3. Az $ABCD$ egységnyi oldalhosszúságú négyzetben az AB oldal felezőpontja E, a BC oldal felezőpontja F. Az AF és DE egyenesek metszéspontja M. Milyen hosszú a CM szakasz?

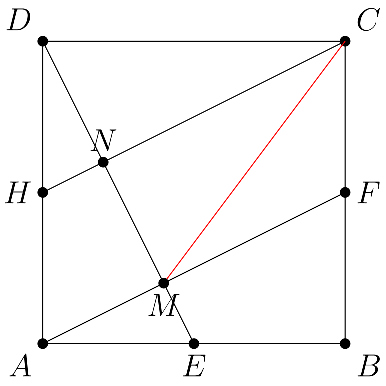
Készítsünk ábrát a feladathoz.



Vegyük észre, hogy $AF\perp DE$.
Ez azért teljesül,
mert AED és ABF derékszögű háromszögek egybevágók (hiszen egyik befogójuk 1, a másik befogójuk pedig $\frac{1}{2}$),
és egymáshoz képest derékszöggel vannak elforgatva.

Bizonyítás középvonallal és tükrözéssel

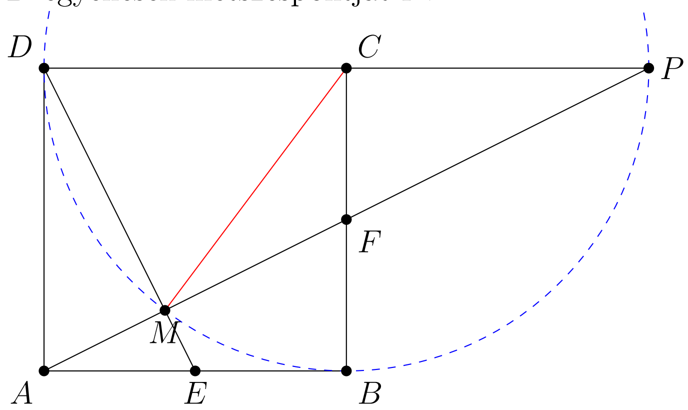
Legyen DA oldal felezőpontja H, és húzzuk be a CH szakaszt. Jelölje DE és HC metszéspontját N.



Ekkor $CH \parallel AF$ (például azért, mert $AFCH$ egy paralelogramma, hiszen HA és CF párhuzamos és egyenlő hosszú), és így persze $DM \perp HC$.
Vegyük észre, hogy az AMD háromszögben HN éppen középvonal, hiszen párhuzamos AM-mel és átmegy AD felezőpontján. Következésképpen N a DM felezőpontja.
Tehát HC merőlegesen felezi DM szakaszt, azaz D-t tükrözve HC tengelyre éppen M pontot kapjuk. Így a DC szakaszt tükrözve HC tengelyre MC szakaszt kapjuk, azaz $MC = CD = 1$.

Bizonyítás a Thalész-tétel megfordításával

Jelölje az AF és a CD egyenesek metszéspontját P.



ABF és PCF derékszögű háromszögek egybevágók, mivel szögeik megegyeznek ($FBA\sphericalangle$ és $FCP\sphericalangle$ derékszögek; $AFB\sphericalangle$ és $PFC\sphericalangle$ csúcsszögek; $BAF\sphericalangle$ és $CPF\sphericalangle$ váltószögek) és $BF = FC = \frac{1}{2}$.

Így $PC = CD = 1$, azaz DP felezőpontja C.

DMP háromszög derékszögű. A Thalész-tétel megfordítása miatt a PD átfogó Thalész-köre (amelynek középpontja a fentiek szerint C) átmegy az M ponton.

Tehát $CM = CD = CP = 1$.

4. Van 100 000 kártyánk, melyek 00000-tól 99999-ig vannak megszámozva, és van 1000 dobozunk is, melyek 000-tól 999-ig vannak megszámozva. Egy kártyát egy dobozba akkor lehet belerakni, ha a doboz száma a kártya számából két számjegy elhagyásával kapható meg (így például a 40557-es kártya a 405-ös, a 407-es, a 455-ös, a 457-es, a 055-ös, a 057-es és az 557-es dobozok valamelyikébe tehető).
Bele lehet-e rakni a dobozokba az összes kártyát úgy, hogy legalább 666 doboz üresen maradjon?

Meg fogjuk mutatni, hogy lehetséges.

A fő ötlet: a kártyákat úgy helyezzük el a dobozokba, hogy csak olyan dobozt használjunk, amelynek a sorszáma 3-mal osztható.

Ez nyilvánvalóan 333 dobozt jelentene, tehát üresen maradna 667 darab, vagyis a feladat feltétele teljesül.

Be kell látnunk, hogy minden kártyát el lehet helyezni olyan dobozba, amelynek a sorszáma 3-mal osztható.

Vizsgáljuk a kártyán szereplő számjegyeket a hármas maradékuk szerint!

Ha van köztük három egyforma, akkor ezek meghagyásával a számból olyan háromjegyűt képeztünk, mely osztható hárommal – tehát megfelelő dobozba sorolható.

Ugyanez könnyen látszik, ha a számjegyek hármas maradékai között van három különböző, ugyanis ezek összege is osztható lesz hárommal.

Innentől csak azon eseteket maradtak, ahol csak kétféle hármas maradék szerepel, és mindkettőből legfeljebb két darab – ez viszont nem lehetséges, ha öt számjegyünk van.

Vagyis a kívánt elhelyezés valóban megoldható.

LIII. verseny 2023–2024.

Feladatok

5. osztály **Megyei forduló**

1. Néhány pozitív egész számot felírtam egy lapra (lehet, hogy egy szám többször is szerepel). A számok szorzata 24, míg az összegük legfeljebb 10.

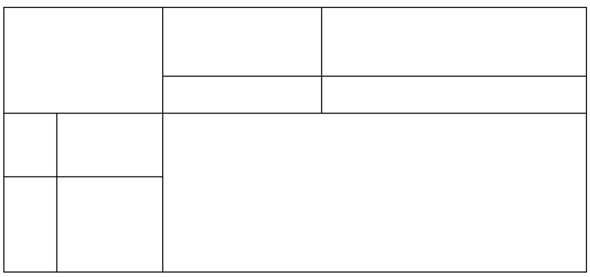
   Hány számot írhattam fel a lapra?

   Minden lehetséges darabszámhoz mutass egy-egy példát, hogy mit írhattam a lapra. Nem kell indokolnod, hogy más darabszám nem lehetséges.

2. Hét testvér (akik közt nincsenek ikrek) elment almát szedni. A legidősebb éppen kétszer annyi almát szedett, mint ahányat a legfiatalabb. Hazafele úton mindegyik testvér adott egy-egy almát az összes nála fiatalabb testvérének. Így mire hazaértek, az összes testvérnek ugyanannyi almája lett. Hány almát szedett a második legidősebb testvér?

3. Hullámzónak nevezünk egy pozitív egész számot, ha a tízesekre és ezresekre kerekített értéke is kisebb a számnál, de a százasokra kerekített értéke nagyobb a számnál.
   (a) Melyik a legkisebb hullámzó négyjegyű szám?
   (b) Hány hullámzó négyjegyű szám van?

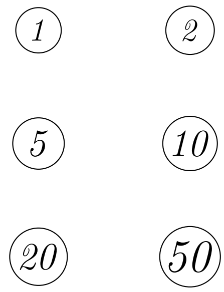
4. Egy téglalapot az alábbi ábra szerint szétvágtunk 10 kisebb téglalapra.



   Tudjuk, hogy a 10 kisebb téglalap kerületének összege 6 egység.
   Hány egység a nagy téglalap kerülete?
   A kis téglalapok oldalainak hossza nem feltétlenül egész számú egység.

5. Bergengóciában a következő pénzérmék vannak forgalomban: 1, 2, 5, 10, 20 és 50 peták. Sára az ábrán látható 4×4-es táblázat minden mezőjére elhelyezett pontosan egy érmét.

	18	**23**		**95**
31				
32				
66				
27				



Ezután néhány sorhoz és oszlophoz odaírta, hogy mennyi az ottani érmék összértéke. Mutass példát arra, hogy miként helyezhette el Sára az érméket.

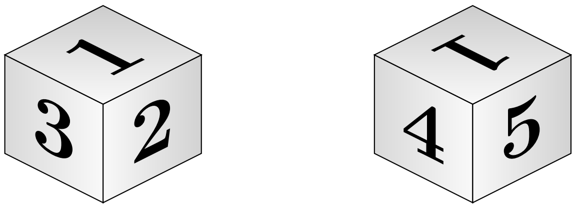
A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyes elhelyezés megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes elrendezés megtalálását.

1. Hullámzónak nevezünk egy pozitív egész számot, ha a tízesekre és ezresekre kerekített értéke is kisebb a számnál, de a százasokra kerekített értéke nagyobb a számnál.
   a) Melyik a legkisebb hullámzó négyjegyű szám?
   b) Hány hullámzó négyjegyű szám van?

2. Egy csapatversenyen négy fős csapatok vettek részt. Az egyik csapatban Ági, Bori, Cili és Dóra azt a stratégiát folytatták, hogy minden feladatnak volt egy megoldója, a másik három gyerek pedig ellenőrizte a megoldást. Bori mindenki másnál többször, összesen nyolcszor ellenőrzött feladatot. Dóra viszont csak ötször – mindenki más ennél többször.

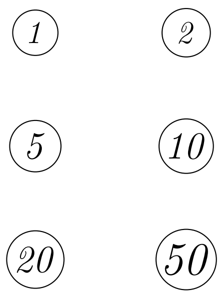
   Ki hány feladatot oldott meg?

3. Bergengócia játékgyárában csak olyan, 1-től 6-ig számozott dobókockát gyártanak, melyeken a számok elrendezése megegyezik a képen láthatóval (itt ugyanazt a kockát két irányból látjuk). Abban viszont különbözhetnek, hogy a számokat milyen színnel festik rá a kockára. Minden szám vagy zöld, vagy kék, vagy sárga, viszont két szomszédos lapra írt szám nem lehet azonos színű. Hányféle különböző dobókockát készíthetnek ebben a gyárban?



4. Bergengóciában a következő pénzérmék vannak forgalomban: 1, 2, 5, 10, 20 és 50 peták. Sára az ábrán látható 4×4-es táblázat minden mezőjére elhelyezett pontosan egy érmét.

	18	**23**		**95**
31				
32				
66				
27				



   Ezután néhány sorhoz és oszlophoz odaírta, hogy mennyi az ottani érmék összértéke. Mutass példát arra, hogy miként helyezhette el Sára az érméket.

   A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyes elhelyezés megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes elrendezés megtalálását.

5. Panna rajzolt 5 különböző pontot egy papírlapra. A 10 pontpár közül legfeljebb hánynak a távolsága lehet pontosan 4 cm?

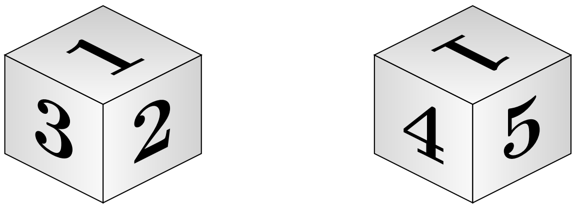
7. osztály Megyei forduló

1. Quadrata hercegnő készített egy bűvös négyzetet (azaz egy olyan, különböző számokkal kitöltött 3×3-as táblázatot, amelyben ugyanannyit kapunk eredményül, akármelyik sorban, oszlopban vagy átlóban adjuk össze a benne szereplő három számot).

   Az elkészült bűvös négyzetben két számot felcserélt, így kapta az ábrán látható táblázatot.
   Meg lehet-e egyértelműen állapítani, hogy melyik két számot cserélte fel Quadrata hercegnő?

17	11	23
20	14	8
5	26	2

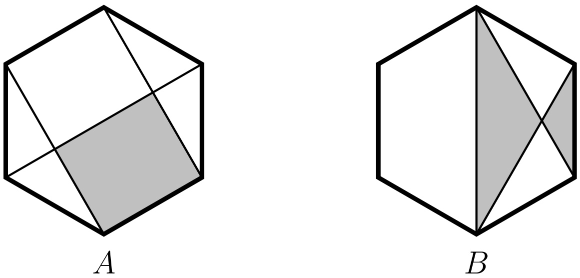
2. Bergengócia játékgyárában csak olyan, 1-től 6-ig számozott dobókockát gyártanak, melyeken a számok elrendezése megegyezik a képen láthatóval (itt ugyanazt a kockát két irányból látjuk). Abban viszont különbözhetnek, hogy a számokat milyen színnel festik rá a kockára. Minden szám vagy zöld, vagy kék, vagy sárga, viszont két szomszédos lapra írt szám nem lehet azonos színű. Hányféle különböző dobókockát készíthetnek ebben a gyárban?



3. Az első napon délben felírtuk egy táblára: $1, 2$. Ezután minden délben a következőt csináljuk: letöröljük a két táblán levő számot, és helyettük felírjuk a különbségüket (a nagyobból vonjuk ki a kisebbet) és az összegüket. Így például a második estén ez áll a táblán: $1, 3$; a harmadik estén $2, 4$ és így tovább.
   Szerepelhet-e a táblán valaha 0-ra végződő szám?

4. Piroska és Bertalan azon gondolkodik, hogy az
$$\frac{1}{2024}, \frac{2}{2024}, \frac{3}{2024}, \ldots, \frac{2023}{2024}$$
   törtek közt hány olyan van, amely nem egyszerűsíthető. Piroska szerint páros sok, Bertalan szerint páratlan sok ilyen tört van. Melyiküknek van igaza?

5. Az alábbi ábrákon két egybevágó szabályos hatszöget látsz, melyekben valamely átlók és oldalak mentén bizonyos részeket szürkére színeztünk. Melyik hatszögben színeztünk nagyobb területet szürkére?



8. osztály

Megyei forduló

1. Néhány testvér (akik közt nincsenek ikrek) elment almát szedni, mindegyikük a saját kosarába szedett almát. A legidősebb éppen kétszer annyi almát szedett, mint ahányat a legfiatalabb. Hazafelé úton mindegyikük (a legfiatalabbat leszámítva) adott egy-egy almát az összes nála fiatalabb testvérének. Így, mire hazaértek, minden testvér kosarában ugyanannyi alma volt. Hányan lehettek a testvérek, ha a második legidősebb 26 almát szedett?

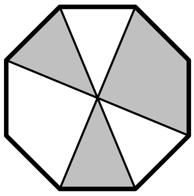
2. Az első napon délben felírtuk egy táblára: $1, 2$. Ezután minden délben a következőt csináljuk: letöröljük a két táblán levő számot, és helyettük felírjuk a különbségüket (a nagyobból vonjuk ki a kisebbet) és az összegüket. Így például a második estén ez áll a táblán: $1, 3$; a harmadik estén $2, 4$ és így tovább.
Szerepelhet-e a táblán valaha 0-ra végződő szám?

3. Luca egy papírra növekvő sorrendben felírta azokat a háromjegyű számokat, melyeknek számjegyei különbözőek és csökkenő sorrendben állnak. Majd a papír hátoldalára az ugyanilyen tulajdonságú négyjegyű számokat sorolta fel, szintén növekvő sorrendben.

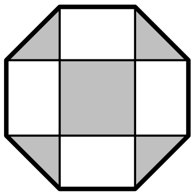
   a) Melyik szám szerepel a háromjegyűek között a hetedik helyen?

   b) Hányadik helyen szerepel a négyjegyűek között a 8642?

4. Az alábbi ábrákon két egybevágó szabályos nyolcszöget látsz, melyekben valamely átlók és oldalak mentén bizonyos részeket szürkére színeztünk. Melyik nyolcszögben színeztünk nagyobb területet szürkére?



A



B

5. Bergengócia játékgyárában csupa azonos méretű kiskockát gyártanak. A kiskockák mindegyik lapját pirosra vagy kékre festik, majd szétválogatva ládákba pakolják őket. Az A jelű ládában lévő kiskockák 3 lapja piros és 3 lapja kék, a B jelű ládában lévőknek 4 lapja piros és 2 lapja kék, a C jelű ládában lévőknek 2 lapja piros és 4 lapja kék.

   Ernő és Fanni egy-egy olyan $2\times2\times2$-es nagy kockát szeretnének építeni, amelynek semelyik lapján sincs kétféle szín.

   a) Ernő kivett 8 kiskockát az A jelű ládából. Igaz-e, hogy ezekből **biztosan** meg lehet építeni egy fenti tulajdonságú nagy kockát?

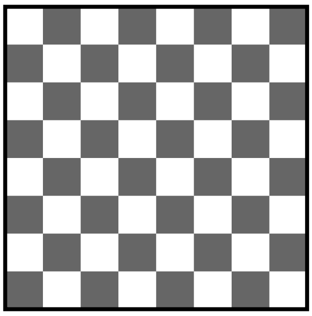
   b) Fanni kivett összesen 8 kiskockát a B és C jelű ládákból. Igaz-e, hogy ezekből **biztosan** meg lehet építeni a fenti tulajdonságú nagy kockát?

5. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a 4-szeresének az első és az utolsó számjegye is 4-es?

2. Egy robot egy 8×8-as sakktábla minden fehér mezőjére ráírta, hogy az a mező hány fekete mezővel szomszédos.



   a) Mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

   b) Ezt követően egy 80×80-as, sakktáblaszerűen kiszínezett négyzet mezőivel tette meg ugyanezt. Ezen a táblán mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

3. Boribon és Annipanni felváltva mondanak számokat. Először Annipanni mond egy pozitív egész számot. Boribonnak mindig az a feladata, hogy az Annipanni által utoljára mondott számot felbontsa tetszőlegesen két pozitív egész szám összegére, s ezt a két számot mondja ki. Annipanni ezután a Boribon által mondott két szám szorzatát mondja. Ezt folytatják, amíg kedvük tartja.

   Ha Annipanni először 24-et mondott, akkor lehetséges-e, hogy egyszer a 2024-et is kimondja?

4. Április 1-jén reggel egyetlen 0 állt egy táblán. Ezután minden nap délben annyit adtunk hozzá a táblán lévő számhoz, vagy vontunk ki belőle, ahányadika volt éppen, majd az így kapott eredményt írtuk a táblán szereplő szám helyére. (Tehát április 1-jén este vagy 1, vagy -1 állt a táblán.)

   a) Állhatott-e április 10-én este a táblán a 22?

   b) Állhatott-e április 10-én este a táblán a -37?

5. Az alábbi ábrán egy földterület térképét látjuk, rácsvonalakkal mezőkre bontva. Ábel azt a feladatot kapta, hogy a rácsvonalak mentén ossza fel kerítésekkel a földterületet úgy, hogy a számmal jelzett helyekről pontosan annyi mezőt lehessen kerítés átlépése nélkül elérni (a számot tartalmazó mezőt is beleértve), mint amennyi az adott mezőre van írva. A kerítések által határolt területek mindegyikében szerepelnie kell legalább egy számnak.

   Hová építheti Ábel a kerítéseket? Készíts ábrát.

6					4			
			5			7	6	
5		5	5		3			
		3		9				
	6					6		
		6		9				6

   A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyes rajz megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi gondolatok leírásáért, amelyek segítik egy helyes rajz megtalálását.

5. osztály, 2. nap — Országos döntő

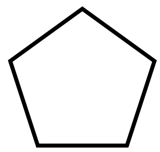
1. Öt gyerek beszélget a labdáikról. Minden gyereknek legalább egy és legfeljebb öt labdája van, továbbá semelyik két gyereknek nincs ugyanannyi labdája. Az alábbi **igaz** állításokat mondják:

Alíz:	Több labdám van, mint Boldizsárnak.
Boldizsár:	Nem két labdám van.
Csenge:	Annyi labdám van, mint Alíznak és Elemérnek összesen.
Dorka:	Szeretem a labdákat.
Elemér:	Ha Alíz labdáinak a számát megszorozzuk Boldizsár labdáinak számával, akkor a kapott szám nagyobb, mint Csenge labdáinak a száma.

   Kinek hány labdája van?

2. Az ábrán látható szabályos ötszög kerületén pirossal megjelöltünk néhány pontot úgy, hogy minden oldalán pontosan három piros pont van.

   Összesen hány pontot jelölhettünk meg pirossal?
   Mutass példát az összes lehetőségre, és indokold, hogy ezeken kívül más lehetőség nincs.



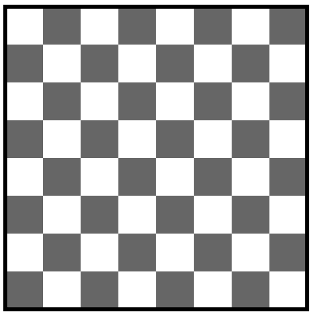
3. Egy dobókocka-szimulátor hét kis lámpa segítségével jeleníti meg a számokat az ábrán látható módon. Legkevesebb hány lámpakapcsolásra van szükség ahhoz, hogy az egyesből indulva az összes szám megjelenjen valamilyen sorrendben, majd újra az egyest lássuk?

4. Egy 3×3-as táblázatba beírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat, mindegyik számot pontosan egy mezőbe. Egy mezőt **kerek**nek nevezünk, ha a vele élszomszédos mezőkre írt számok összege 10.
   Legfeljebb hány kerek mező lehet a táblázatban?

6. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Egy robot egy 8×8-as sakktábla minden fehér mezőjére ráírta, hogy az a mező hány fekete mezővel szomszédos.



   a) Mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

   b) Ezt követően egy 80×80-as, sakktáblaszerűen kiszínezett négyzet mezőivel tette meg ugyanezt. Ezen a táblán mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

2. Hány olyan hatjegyű pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a 6-szorosának az első és az utolsó számjegye is 6-os?

3. Jelölje ,,A” azoknak a négyjegyű számoknak a számát, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám összegeként. Legyen ,,B” azoknak a tízjegyű számoknak a száma, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám szorzataként.
   Melyik a nagyobb, ,,A” vagy ,,B”?

4. Mókus Peti és Mókus Panni szeretnék feltölteni az éléskamrájukat télire. A kamrában dió és mogyoró is elhelyezhető. Ha csak diót raknak a kamrába, akkor abból 450 darab, ha csak mogyorót, akkor abból 720 darab fér el. A kamrában egyszerre dió és mogyoró is lehet, elfér benne például 225 dió és 360 mogyoró egyszerre, és ekkor a kamra teljesen tele van.

   Peti egy nap alatt vagy 12 diót, vagy 20 mogyorót tud gyűjteni, Panni pedig naponta vagy 10 diót, vagy 15 mogyorót. (Egy mókus egy napon belül csak egyféle eleséget gyűjthet.) Legkevesebb hány nap alatt tudják megtölteni az üres éléskamrát?

5. Zalán az írásbeli szorzást gyakorolja az anyukájával.

   a) Az anyukája mond neki egy számot és ennek a számnak kell kiszámítania a 3-szorosát, 4-szeresét, 5-szörösét és így tovább, egészen a 11-szereséig. Vagyis 9 szorzást kell minden esetben elvégeznie.

      Tud-e Zalán anyukája olyan pozitív egész számot mondani, amely esetén a kapott 9 szám első számjegyei mind különbözőek?

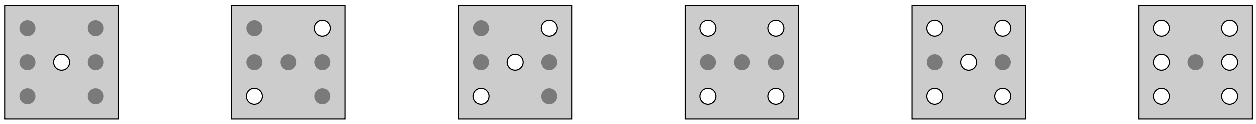
   b) Később Zalán anyukája kicsit módosította a feladatot, és azt kérte, hogy számítsa ki a szám 4-szeresét, 5-szörösét és így tovább, egészen a 12-szereséig. Vagyis ismét 9 szorzást kell minden esetben elvégeznie.

      Tud-e ebben az esetben Zalán anyukája olyan pozitív egész számot mondani, amelynél a kapott 9 szám első számjegyei mind különbözőek?

6. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Egy dobókocka-szimulátor hét kis lámpa segítségével jeleníti meg a számokat az ábrán látható módon. Legkevesebb hány lámpakapcsolásra van szükség ahhoz, hogy az egyesből indulva az összes szám megjelenjen valamilyen sorrendben, majd újra az egyest lássuk?



2. Egy szabályos 12-szög kerületén pirossal megjelöltem 2024 pontot úgy, hogy minden oldalán ugyanannyi piros pont van. A 12-szögnek hány csúcsát jelölhettem meg pirossal?

3. Egy 3×3-as táblázatba beírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat, mindegyik számot pontosan egy mezőbe. Egy mezőt **kerek**nek nevezünk, ha a vele élszomszédos mezőkre írt számok összege 10.
   Legfeljebb hány kerek mező lehet a táblázatban?

4. Van-e olyan hatszög, amelynek szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, mindegyik oldala milliméterben mérve egész hosszúságú, a kerülete 2024 mm, a területe pedig 2024 mm^2?

7. osztály, 1. nap **Országos döntő**

1. Jelölje ,,A” azoknak a négyjegyű számoknak a számát, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám összegeként. Legyen ,,B” azoknak a tízjegyű számoknak a száma, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám szorzataként.
Melyik a nagyobb, ,,A” vagy ,,B”?

2. Egy táblára Elemér felírt az $1, 2, 3, \dots, 2023$ számok közül néhányat. Minden szám legfeljebb egyszer szerepelt a táblán. Tudjuk, hogy a táblán lévő számok közül akárhányat választunk ki, a kiválasztott számok összege soha nem lesz pontosan 2024. Legfeljebb hány számot írhatott fel Elemér a táblára?

3. Az $ABCD$ téglalap AB és AD oldalára kifelé megrajzoljuk az ABF és ADE szabályos háromszögeket. Bizonyítsd be, hogy a CEF háromszög szabályos.

4. Ossz fel egy 10 egység oldalhosszúságú négyzetet hét darab egyenlő szárú, derékszögű háromszögre, amelyek területe növekvő sorrendben: 1, 2, 4, 9, 16, 18, 50 területegység.
A teljes pontszám eléréséhez elengendő megadni egy olyan ábrát, amelyről a felosztás egyértelműen leolvasható. Az ábrán jelezd azt is, hogy melyik háromszög területe mekkora.
Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes felosztás megtalálását.

5. Egy körasztal körül különböző életkorú emberek ülnek és a következő játékot játsszák: valamelyikük feláll, a két szomszédja egymással helyet cserél, majd az álló játékos visszaül a helyére.

   Azt szeretnék elérni, hogy mindenkinek a jobb oldalán nála idősebb ember üljön, kivéve a legidősebbet, akitől jobbra a legfiatalabb foglaljon helyet.

   Igaz-e, hogy el tudják érni a céljukat, akármilyen sorrendben is ültek le az elején, ha

   a) 10 b) 11

   ember ült kezdetben az asztal körül?

7. osztály, 2. nap **Országos döntő**

1. Anna, Bea, Cili és Dóra egy faluban laknak, mindegyiküknek egy téglalap alakú kertje van. A négy kert szélessége 12, 14, 16, illetve 18 méter valamilyen sorrendben, hosszuk pedig 40, 50, 60, illetve 70 méter valamilyen sorrendben. A lányok az alábbi **igaz** állításokat mondták a kertjükről:

Anna:	Az én kertem szélesebb, mint Dóra kertje.
Bea:	Az én kertem területe kevesebb, mint 1000 m^2.
Cili:	A kertem területe ugyanakkora, mint Dóra kertjének területe.
Dóra:	Bea kertje hosszabb, mint az én kertem.

   Add meg, hogy kinek a kertje milyen széles és milyen hosszú.

2. Szilvi felírt egy pozitív egész számot a papírjára, majd felírta a 3-szorosát is. Azt vette észre, hogy a kisebb szám jegyeinek összege éppen 3-szor akkora, mint a nagyobb szám jegyeinek az összege.

   a) Bizonyítsd be, hogy a kisebbik szám osztható 9-cel.

   b) Mutass példát ilyen számpárra.

3. Van-e olyan hatszög, amelynek szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, mindegyik oldala milliméterben mérve egész hosszúságú, a kerülete 2024 mm, a területe pedig 2024 mm^2?

4. Egy négyzetrácsos papírra rajzoltunk egy háromszöget, amelynek minden csúcsa rácspont. A háromszög területe egész számú rácsnégyzet területével egyezik meg.

   Bizonyítsd be, hogy van olyan oldala a háromszögnek, amelynek a felezőpontja is rácspont.

8. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Amikor a kapitány annyi idős volt, mint most a hajója, akkor a hajó 23 éves volt. Amikor a hajó annyi idős lesz, mint most a kapitány, akkor a kapitány 68 éves lesz. Hány éves most a kapitány?

2. Az $ABCD$ téglalap AB és AD oldalára kifelé megrajzoljuk az ABF és ADE szabályos háromszögeket. Bizonyítsd be, hogy a CEF háromszög szabályos.

3. Ossz fel egy 10 egység oldalhosszúságú négyzetet hét darab egyenlő szárú, derékszögű háromszögre, amelyek területe növekvő sorrendben: 1, 2, 4, 9, 16, 18, 50 területegység.
A teljes pontszám eléréséhez elengendő megadni egy olyan ábrát, amelyről a felosztás egyértelműen leolvasható. Az ábrán jelezd azt is, hogy melyik háromszög területe mekkora.
Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes felosztás megtalálását.

4. Fióna egy szabályos pénzérmét dobál, amelynek egyik oldala fej (F), a másik pedig írás (I). Minden dobássorozat után feljegyzi, hogy hány esetben volt FF, FI, IF és II két egymást követő dobás. Ha például a dobássorozata FFIFFFIIIFFI, akkor a feljegyzésében 4 FF, 3 FI, 2 IF és 2 II szerepel.
   a) Hány különböző olyan dobássorozat lehetséges, amelynél pontosan 3 FF, 4 FI, 2 IF és 2 II szerepel a feljegyzésében?
   b) Hány különböző olyan dobássorozat lehetséges, amelynél pontosan 4 FF, 3 FI, 2 IF és 2 II szerepel a feljegyzésében?

   Különbözőnek hívunk két dobássorozatot, ha azokban van olyan sorszámú dobás, ami a két sorozatban eltér.

5. Egy katonai ezred 999 katonája körben állva a kör közepe felé néz, az ezredes pedig a kör belsejében sétál körbe, végig az óramutató járásával megegyező irányban haladva. Először megáll egy katonánál, akinek azt mondja: ,,Hátra arc!”, mire ez a katona megfordul. Az ezredes ezután elsétál egy katona mellett, majd a következőnek újra ,,Hátra arc!”-ot vezényel, aki szintén megfordul. Ezután két katonát hagy ki, és a következőnek mondja a vezényszót, majd hármat hagy ki, és így tovább, mindig eggyel többet. Így folytatja egész addig, míg 998 katona mellett sétál el, majd utoljára, a 999. alkalommal is ,,Hátra arc!”-ot parancsol a következő katonának.

   Hány katona néz kifelé a körből az utolsó ,,Hátra arc!” elhangzása után?

8. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Szilvi felírt egy pozitív egész számot a papírjára, majd felírta a 3-szorosát is. Azt vette észre, hogy a kisebb szám jegyeinek összege éppen 3-szor akkora, mint a nagyobb szám jegyeinek az összege.
   a) Bizonyítsd be, hogy a kisebbik szám osztható 9-cel.
   b) Mutass példát ilyen számpárra.

2. Igaz-e, hogy minden 10-zel nem osztható pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amely ugyanolyan számjeggyel kezdődik, mint amilyennel végződik?

3. Egy négyzetrácsos papírra rajzoltunk egy háromszöget, amelynek minden csúcsa rácspont. A háromszög területe egész számú rácsnégyzet területével egyezik meg.

   Bizonyítsd be, hogy van olyan oldala a háromszögnek, amelynek a felezőpontja is rácspont.

4. Egy tornasorban n különböző magasságú ember áll, balról jobbra növekedve. Megkérhetünk négy szomszédos embert, hogy fordítsák meg a sorrendjüket (tehát ha A, B, C, D sorrendben álltak eddig, akkor a művelet után D, C, B, A sorrendben fognak állni).

   Elérhető-e ilyen négyes megfordítások egymásutánjával, hogy megint tornasorban legyenek, de most jobbról balra növekedve, ha

   a) $n = 9$; b) $n = 10$?

Megoldások

5. osztály | Megyei forduló

1. Néhány pozitív egész számot felírtam egy lapra (lehet, hogy egy szám többször is szerepel). A számok szorzata 24, míg az összegük legfeljebb 10.
Hány számot írhattam fel a lapra?
Minden lehetséges darabszámhoz mutass egy-egy példát, hogy mit írhattam a lapra.
Nem kell indokolnod, hogy más darabszám nem lehetséges.

Négyféle lehetséges darabszám van, de az egyes darabszámok bizonyos esetekben többféleképpen is megvalósíthatók:

- 2 szám: $(4, 6)$.
- 3 szám: $(2, 3, 4)$ vagy $(2, 2, 6)$
- 4 szám: $(2, 2, 2, 3)$ vagy $(1, 2, 3, 4)$.
- 5 szám: $(1, 2, 2, 2, 3)$.

2. Hét testvér (akik közt nincsenek ikrek) elment almát szedni. A legidősebb éppen kétszer annyi almát szedett, mint ahányat a legfiatalabb. Hazafele úton mindegyik testvér adott egy-egy almát az összes nála fiatalabb testvérének. Így mire hazaértek, az összes testvérnek ugyanannyi almája lett. Hány almát szedett a második legidősebb testvér?

A legidősebb testvér 6 almát ad a testvéreinek, a legfiatalabb pedig 6 almát kap. Mivel így ugyanannyi almájuk van a végén, míg az elején az idősebbnek 2-szer annyi volt, így a kezdetbeni különbségnek épp a legfiatalabbnál lévő almák számának kell lennie.

A különbség 12, tehát kezdetben a legfiatalabb testvérnél 12, a legidősebbnél 24 alma volt.

A végén tehát mindenkinél 18 alma van, így a második legidősebb testvérnél is. A második legidősebb testvér 5 almát adott és egyet kapott a testvéreitől, vagyis a végén 4-gyel volt kevesebb almája, mint amennyit szedett. A második legidősebb testvér tehát **22 almát szedett**.

Ezek alapján a 7 testvér kor szerint növekvő sorrendben $12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$ almát szedett.

Mire hazaértek mindenkinek a kosarában 18 alma volt.

3. Hullámzónak nevezünk egy pozitív egész számot, ha a tízesekre és ezresekre kerekített értéke is kisebb a számnál, de a százasokra kerekített értéke nagyobb a számnál.
   (a) Melyik a legkisebb hullámzó négyjegyű szám?
   (b) Hány hullámzó négyjegyű szám van?

Egy hullámzó szám utolsó, egyes helyiértéken álló számjegye $1, 2, 3$ vagy 4 lehet, mert ekkor lesz a tízesekre kerekített érték kisebb a számnál. (Nem lehet 0, mivel akkor a tízesekre kerekített szám egyenlő lenne az eredetivel.)

A tízes helyiértéken álló számjegy $5, 6, 7, 8$ vagy 9 lehet, mert ekkor lesz a százasokra kerekített érték nagyobb a számnál.

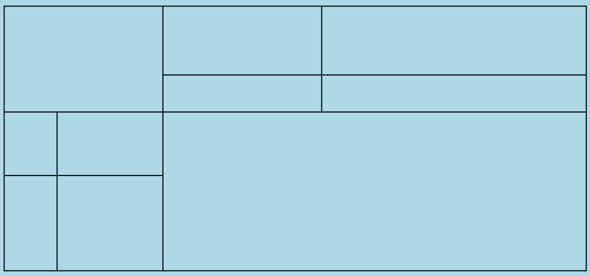
A százas helyiértéken álló számjegy $0, 1, 2, 3$ vagy 4 lehet, mert ekkor lesz az ezresekre kerekített érték kisebb a számnál. (Itt lehet 0 számjegy, mert ha az egyesek helyén nem 0 van, akkor az ezresre kerekített érték ebben az esetben is kisebb lesz.)

A szám első számjegye bármely nem 0 számjegy lehet.

(a) A fenti lehetőségek közül minden esetben a lehető legkisebbet választva azt kapjuk, hogy **1051 a legkisebb négyjegyű hullámzó szám**.

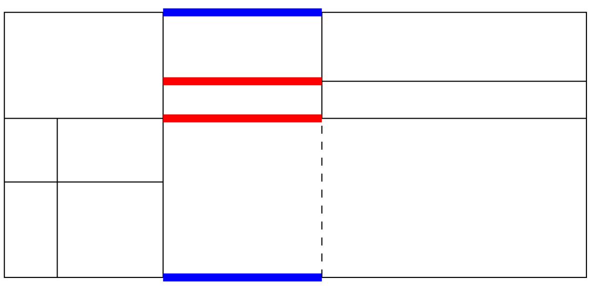
(b) A különböző helyiértékeken a számjegyeket egymástól függetlenül választhatjuk meg, így $9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 =$ **900 hullámzó négyjegyű szám van**.

4. Egy téglalapot az alábbi ábra szerint szétvágtunk 10 kisebb téglalapra.



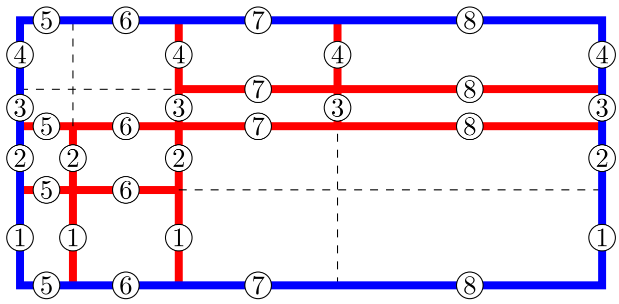
Tudjuk, hogy a 10 kisebb téglalap kerületének összege 6 egység.
Hány egység a nagy téglalap kerülete?
A kis téglalapok oldalainak hossza nem feltétlenül egész számú egység.

Az alábbi ábrán pirossal és kékkel jelölt négy szakasz hossza megegyezik, hiszen a szomszédos párok ugyanannak a téglalapnak a szemközti oldalai.



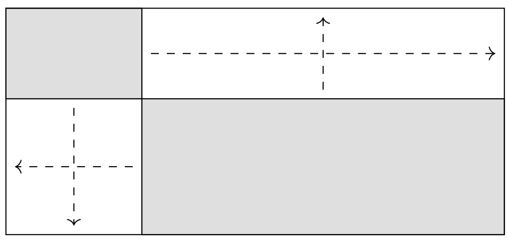
Amikor a nagy téglalap kerületét számítjuk ki, akkor a kék szakaszokat egyszer, a pirosakat egyszer sem számoljuk bele a kerületbe. Amikor a kisebb téglalapok kerületét számítjuk ki, akkor a kék szakaszokat egyszer, a piros szakaszokat pedig kétszer vesszük figyelembe, hiszen a kék szakaszok pontosan egy kisebb téglalap kerületéhez tartoznak, míg a piros szakaszok pontosan két kisebb téglalap kerületéhez.

A felosztás olyan, hogy minden olyan szakasszal, ami egy kisebb téglalap oldala, pontosan egy másik kisebb téglalap (az adott oldallal nem egyező) oldala párhuzamos, és a kerületen két megfelelő szakaszt találhatunk, ahogy azt az alábbi ábra mutatja (az azonos hosszúságú szakaszokat azonos számok jelölik):



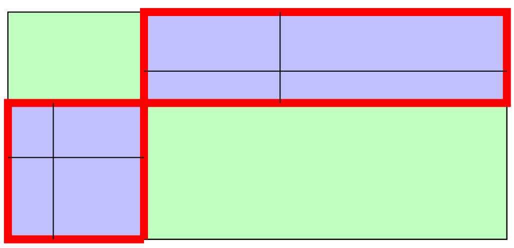
Vagyis, **a kis téglalapok kerületének összege** éppen háromszorosa a nagy téglalap kerületének, ami ebből következően **2 egység**.

2. megoldás. Ha egy téglalapot négy téglalapra osztunk az ábra szerint, akkor két átellenes kerületeinek összege megegyezik az eredeti téglalap kerületével, hiszen az ábrán jelölt mozgatásokkal a kis téglalapok oldalaiból megkaphatjuk az eredeti téglalap oldalait.



Mivel ez a másik két átellenes téglalapra is igaz, így ha mind a négy kis téglalap kerületét összegezzük, akkor az eredeti téglalap kerületének kétszeresét kapjuk.

Az alábbi ábrán látható nyolc kis kék téglalap kerületének összege tehát éppen kétszer akkora, mint a piros kerettel jelzett két téglalap kerületeinek összege, ami az előző állításunk szerint az eredeti téglalap kerületével egyezik meg. Hozzávéve a két zöld téglalap kerületének összegét, ami szintén az eredeti téglalap kerületével egyezik meg, azt kapjuk, hogy a tíz kis téglalap kerületeinek összege az eredeti téglalap kerületének éppen háromszorosa.



Ebből következően **az eredeti téglalap kerülete 2 egység**.

5. Bergengóciában a következő pénzérmék vannak forgalomban: 1, 2, 5, 10, 20 és 50 peták. Sára az ábrán látható 4×4-es táblázat minden mezőjére elhelyezett pontosan egy érmét.

	18	**23**		**95**
31				
32				
66				
27				

1	2
5	10
20	50

Ezután néhány sorhoz és oszlophoz odaírta, hogy mennyi az ottani érmék összértéke.
Mutass példát arra, hogy miként helyezhette el Sára az érméket.
A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyes elhelyezés megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes elrendezés megtalálását.

Az érmék ábrán látható elhelyezése esetén teljesülnek a feladatban megadott feltételek:

	18	**23**		**95**
31	5	1	5	20
32	2	20	5	5
66	10	1	5	50
27	1	1	5	20

Hogyan lehet megtalálni a megoldást?

A következőkben adunk egy módszert a fenti helyes elhelyezés megtalálására, és közben belátjuk azt is, hogy **nincs más helyes elhelyezés.**

Ha soronként összeadjuk az értékeket, akkor megkapjuk, hogy a táblázatban összesen

$$31 + 32 + 66 + 27 = 156 \text{ peták van.}$$

Ha ebből kivonjuk az első, második és negyedik oszlopban található petákok összegét, akkor megkapjuk, hogy $156 - 18 - 23 - 95 = 20$ peták van a harmadik oszlopban. Ez a 20 peták csak úgy jöhet ki 4 érméből, hogy mind a 4 mezőbe 5 petákosat teszünk.

Ezek után nézzük meg, hogy hogyan jöhetnek ki az összegek az egyes sorokban.

	18	**23**		**95**
31			5	
32			5	
66			5	
27			5	

Az első sorban csak úgy lehet a három hiányzó mező értéke 26, ha a $20, 5, 1$ számok szerepelnek valamilyen sorrendben.

A második sorban a 27 csak a $20, 5, 2$ számok esetén lehet az összeg, míg a harmadik sorban 61-et csak $50 + 10 + 1$ összegként kaphatjuk.

	18	**23**		**95**
31			5	
32			5	
66			5	
27	1	1	5	20

A negyedik sorban a 22 kijöhet $20+1+1$ és $10+10+2$ alakban is, ám a negyedik oszlopban a 95 csak úgy jöhet ki, hogy $50+20+20+5$, vagyis a jobb alsó sarokba csak 20-as kerülhet. Ebből pedig következik, hogy az alsó sor maradék két mezőjén két darab egyes szerepel.

Az első oszlopban a hiányzó 3 mező összege 17, ami csak $10 + 5 + 2$ alakban állhat elő, amiből az előző bekezdés alapján a 10-es csak a harmadik sorban lehet, a 2-es pedig a második sorban, így a bal felső sarokban csak 5-ös érme lehet.

	18	**23**		**95**
31	5		5	
32	2		5	
66	10		5	
27	1	1	5	20

Ekkor a jobb oszlop első sorában csak 20-as lehet, a második sorban csak az 5-ös, míg a harmadik sorban csak az 50-es.

	18	**23**		**95**
31	5	1	5	20
32	2	20	5	5
66	10	1	5	50
27	1	1	5	20

Ezek után egyértelműen kitölthető a második oszlop is.

6. osztály **Megyei forduló**

1. Hullámzónak nevezünk egy pozitív egész számot, ha a tízesekre és ezresekre kerekített értéke is kisebb a számnál, de a százasokra kerekített értéke nagyobb a számnál.
   a) Melyik a legkisebb hullámzó négyjegyű szám?
   b) Hány hullámzó négyjegyű szám van?

Egy hullámzó szám utolsó, egyes helyiértéken álló számjegye $1, 2, 3$ vagy 4 lehet, mert ekkor lesz a tízesekre kerekített érték kisebb a számnál. (Nem lehet 0, mivel akkor a tízesekre kerekített szám egyenlő lenne az eredetivel.)

A tízes helyiértéken álló számjegy $5, 6, 7, 8$ vagy 9 lehet, mert ekkor lesz a százasokra kerekített érték nagyobb a számnál.

A százas helyiértéken álló számjegy $0, 1, 2, 3$ vagy 4 lehet, mert ekkor lesz az ezresekre kerekített érték kisebb a számnál. (Itt lehet 0 számjegy, mert ha az egyesek helyén nem 0 van, akkor az ezresre kerekített érték ebben az esetben is kisebb lesz.)

A szám első számjegye bármely nem 0 számjegy lehet.

a) A fenti lehetőségek közül minden esetben a lehető legkisebbet választva azt kapjuk, hogy **1051 a legkisebb négyjegyű hullámzó szám**.

b) A különböző helyiértékeken a számjegyeket egymástól függetlenül választhatjuk meg, így $9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 =$ **900 hullámzó négyjegyű szám van**.

2. Egy csapatversenyen négy fős csapatok vettek részt. Az egyik csapatban Ági, Bori, Cili és Dóra azt a stratégiát folytatták, hogy minden feladatnak volt egy megoldója, a másik három gyerek pedig ellenőrizte a megoldást. Bori mindenki másnál többször, összesen nyolcszor ellenőrzött feladatot. Dóra viszont csak ötször – mindenki más ennél többször.
Ki hány feladatot oldott meg?

A feltételek alapján megállapíthatjuk, hogy Ági és Cili legalább 6 és legfeljebb 7 feladatot ellenőrizhetett.

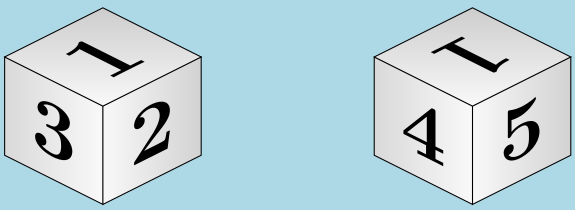
Mivel minden feladatot 3 ember ellenőrzött, ezért az ellenőrzések számának az összege osztható 3-mal.

Bori és Dóra összesen 13 ellenőrzést végzett el közösen. A fenti becslés alapján Ági és Cili pedig legalább 12-t és legfeljebb 14-et. Tehát a négyük által összesen elvégzett ellenőrzések száma legalább 25 és legfeljebb 27. Ebben a tartományban a 27 az egyetlen hárommal osztható szám, vagyis összesen 27 ellenőrzést végeztek el.

Mivel minden feladathoz 3 ellenőrzés tartozik, így az általuk megoldott feladatok száma 9.

Mivel Bori 8, Dóra 5, Ági és Cili pedig 7-7 megoldást ellenőrzött, míg a megoldott és az ellenőrzött feladatok száma minden lány esetében 9, ezért **Bori 1, Dóra 4, Ági és Cili pedig 2-2 feladatot oldott meg**.

3. Bergengócia játékgyárában csak olyan, 1-től 6-ig számozott dobókockát gyártanak, melyeken a számok elrendezése megegyezik a képen láthatóval (itt ugyanazt a kockát két irányból látjuk). Abban viszont különbözhetnek, hogy a számokat milyen színnel festik rá a kockára. Minden szám vagy zöld, vagy kék, vagy sárga, viszont két szomszédos lapra írt szám nem lehet azonos színű. Hányféle különböző dobókockát készíthetnek ebben a gyárban?



Számoljuk össze, hány olyan dobókocka létezik, amelyen az $\boxed{1}$ szám zölddel lett megfestve. Nyilvánvalóan ugyanennyi olyan lesz, amelyen az $\boxed{1}$ kék, illetve szintén ennyi, ahol sárga.

Ha az $\boxed{1}$ zöld, akkor a $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ nem lehetnek zöldek. Lehet a $\boxed{2}$ kék, de ekkor már biztos, hogy a $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$ sárga, emiatt az $\boxed{5}$ kék, viszont így a $\boxed{6}$-os már csak zöld lehet. Ha viszont a $\boxed{2}$ sárga, akkor hasonlóan megállapítható, hogy a $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$ kék, az $\boxed{5}$ sárga, a $\boxed{6}$ pedig zöld.

Mivel más nem lehetséges, csak két olyan kocka van, ahol $\boxed{1}$ zöld,
tehát összesen $3 \cdot 2 =$ **6 -féle különböző dobókockát gyártanak.**

2. megoldás A kocka két oldala csak akkor nem szomszédos, ha átellenes. Tehát két szám csak akkor lehet azonos színű, ha átellenes oldalon állnak. Tehát bármely színre igaz, hogy legfeljebb két olyan színű szám lehet a kockán. Így hat oldalt csak úgy tudunk kiszínezni három színnel, ha a szemközti párok mindig azonos színűek.

A dobókocka számai feloszthatók három átellenes párra: $\boxed{1}$ és $\boxed{6}$; $\boxed{2}$ és $\boxed{5}$; $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$.
Ha a különböző párok különböző színűek, akkor a kocka teljesíti a feltételeket.

Már csak az a kérdés, hogy hányféleképpen oszthatjuk ki a színeket a három átellenes oldalpár között. Tehát $3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **6-féle különböző kockát gyártanak**.

4. Bergengóciában a következő pénzérmék vannak forgalomban: 1, 2, 5, 10, 20 és 50 peták. Sára az ábrán látható 4×4-es táblázat minden mezőjére elhelyezett pontosan egy érmét.

	18	**23**		**95**
31				
32				
66				
27				

1 *2* *5* *10* *20* *50*

Ezután néhány sorhoz és oszlophoz odaírta, hogy mennyi az ottani érmék összértéke.
Mutass példát arra, hogy miként helyezhette el Sára az érméket.
A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyes elhelyezés megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes elrendezés megtalálását.

Az érmék ábrán látható elhelyezése esetén teljesülnek a feladatban megadott feltételek:

	18	**23**		**95**
31	5	1	5	20
32	2	20	5	5
66	10	1	5	50
27	1	1	5	20

Hogyan lehet megtalálni a megoldást?

A következőkben adunk egy módszert a fenti helyes elhelyezés megtalálására, és közben belátjuk azt is, hogy **nincs más helyes elhelyezés.**

Ha soronként összeadjuk az értékeket, akkor megkapjuk, hogy a táblázatban összesen

$$31 + 32 + 66 + 27 = 156 \text{ peták van.}$$

Ha ebből kivonjuk az első, második és negyedik oszlopban található petákok összegét, akkor megkapjuk, hogy $156 - 18 - 23 - 95 = 20$ peták van a harmadik oszlopban. Ez a 20 peták csak úgy jöhet ki 4 érméből, hogy mind a 4 mezőbe 5 petákosat teszünk.

Ezek után nézzük meg, hogy hogyan jöhetnek ki az összegek az egyes sorokban.

	18	**23**		**95**
31			5	
32			5	
66			5	
27			5	

Az első sorban csak úgy lehet a három hiányzó mező értéke 26, ha a $20, 5, 1$ számok szerepelnek valamilyen sorrendben.

A második sorban a 27 csak a $20, 5, 2$ számok esetén lehet az összeg, míg a harmadik sorban 61-et csak $50 + 10 + 1$ összegként kaphatjuk.

	18	**23**		**95**
31			5	
32			5	
66			5	
27	1	1	5	20

A negyedik sorban a 22 kijöhet $20+1+1$ és $10+10+2$ alakban is, ám a negyedik oszlopban a 95 csak úgy jöhet ki, hogy $50+20+20+5$, vagyis a jobb alsó sarokba csak 20-as kerülhet. Ebből pedig következik, hogy az alsó sor maradék két mezőjén két darab egyes szerepel.

Az első oszlopban a hiányzó 3 mező összege 17, ami csak $10+5+2$ alakban állhat elő, amiből az előző bekezdés alapján a 10-es csak a harmadik sorban lehet, a 2-es pedig a második sorban, így a bal felső sarokban csak 5-ös érme lehet.

	18	**23**		**95**
31	5		5	
32	2		5	
66	10		5	
27	1	1	5	20

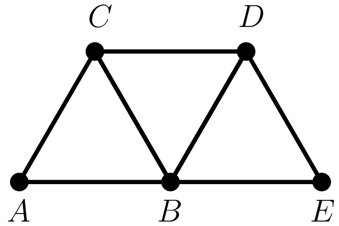
Ekkor a jobb oszlop első sorában csak 20-as lehet, a második sorban csak az 5-ös, míg a harmadik sorban csak az 50-es.

	18	**23**		**95**
31	5	1	5	20
32	2	20	5	5
66	10	1	5	50
27	1	1	5	20

Ezek után egyértelműen kitölthető a második oszlop is.

5. Panna rajzolt 5 különböző pontot egy papírlapra. A 10 pontpár közül legfeljebb hánynak a távolsága lehet pontosan 4 cm?

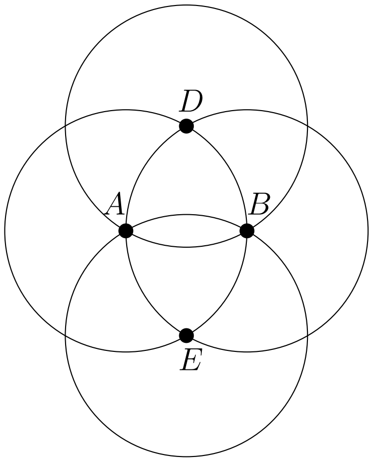
Első megoldás. Az ábrán látható módon megadható 5 pont úgy, hogy a közöttük fellépő távolságok közül 7 távolság is 4 cm legyen. A megrajzolt szakaszok hossza 4 cm (vagyis ABC, BCD és BDE szabályos háromszögek).



A következőkben bebizonyítjuk, hogy 7-nél több távolság nem lehet egyenlő.

Tegyük fel, hogy el lehet helyezni 5 pontot úgy, hogy 8 távolság is egyenlő legyen. Ez azt jelenti, hogy a 10 távolság közül legfeljebb 2 olyan van, ami nem 4 cm. Ez kétféleképpen lehetséges azt tekintve, hogy a legfeljebb két nem 4 cm hosszúságú szakasznak legfeljebb 3 vagy pontosan 4 végpontja van.

1. eset: a két szakasznak csak 3 végpontja van.
Ez azt jelenti, hogy az 5 pont között van 2 olyan, amelyektől az összes többi pont 4 cm távolságra van. Legyen az egyik pont A, a másik pedig B. Ez azt jelenti, hogy a maradék 3 pont rajta van az A és a B körüli 4 cm sugarú körön is.



Ez a két kör nem esik egybe, hiszen a középpontjaik távolsága is 4 cm. Ekkor azonban a két körnek pontosan 2 metszéspontja van, vagyis nem lehet a maradék három pont mindegyike mindkét körön rajta.

2. eset: a két szakasznak 4 végpontja van.
Ekkor az ötödik ponttól (A) mind a négy pont 4 cm távolságra van. Vagyis a 4 pont egy A középpontú körön helyezkedik el. Legyen a két nem 4 cm hosszúságú szakasz BC és DE. Vagyis BD és BE is 4 cm hosszúságú, vagyis D és E rajta vannak a B körüli 4 cm sugarú körön. Vagyis D és E az A, illetve a B pont körüli 4 cm sugarú körök metszéspontja.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy C-nek rajta kell lennie az D és E középpontú, 4 cm sugarú körön is, de ennek a két körnek a metszéspontja A és B, amikkel nem eshet egybe C.

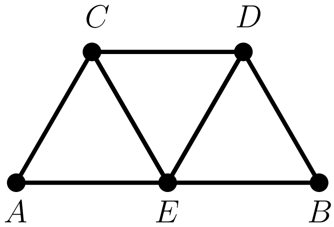
Összefoglalva: a 10 pontpár közül **legfeljebb 7-nek a távolsága lehet pontosan 4 cm**.

2. megoldás. Válasszunk ki Panna pontjai közül kettőt tetszőlegesen. Mivel legfeljebb két olyan pont van a síkon, amely mindkét kiválasztott ponttól 4 cm távolságra van (a megfelelő körök metszéspontjai), Panna további három pontja közül legalább egynek nem 4 cm a távolsága a kiválasztott pontok valamelyikétől.

Legyen most Panna pontjai közül A és B távolsága nem 4 cm. Ekkor az előző gondolatmenettel a többi három közül valamelyiknek a távolsága A-tól vagy B-től nem 4 cm. Legyen ez a pont C. Ha Panna fennmaradó két pontja D és E, akkor ezekre is alkalmazva az előző gondolatmenetet azt kapjuk, hogy valamelyik pont távolsága D-től vagy E-től nem 4 cm. Így biztosan van három különböző pontpár, amelyek távolsága nem 4 cm: 1. AB, 2. AC vagy BC, 3. egy D-t vagy E-t tartalmazó pontpár.

Tehát **a 10 pontpár közül legfeljebb 7-nek lehet a távolsága pontosan 4 cm.**

Ez meg is valósítható, például így:



Az ábrán AEC, ECD és BDE 4 cm oldalú szabályos háromszögek.

1. Quadrata hercegnő készített egy bűvös négyzetet (azaz egy olyan, különböző számokkal kitöltött 3×3-as táblázatot, amelyben ugyanannyit kapunk eredményül, akármelyik sorban, oszlopban vagy átlóban adjuk össze a benne szereplő három számot).

Az elkészült bűvös négyzetben két számot felcserélt, így kapta az ábrán látható táblázatot.
Meg lehet-e egyértelműen állapítani, hogy melyik két számot cserélte fel Quadrata hercegnő?

17	11	23
20	14	8
5	26	2

Egyértelműen meg lehet állapítani, melyik két számot cserélte ki Quadrata.

Számítsuk ki a módosított táblázatban a sorok és oszlopok összegét (az átlókra nem lesz szükségünk).

17	11	23	**51**
20	14	8	**42**
5	26	2	**33**
42	**51**	**33**	

Amikor Quadrata megcserélte a számokat, akkor a csere által érintett egyik mezőbe az eddiginél nagyobb szám került, tehát ennek a mezőnek a sorában és oszlopában is megnőtt az összeg. A csere által érintett másik mezőbe egy az eddiginél kisebb szám került, tehát ennek a mezőnek a sorában és oszlopában is csökkent az összeg. A harmadik sor és oszlop összege változatlan maradt.

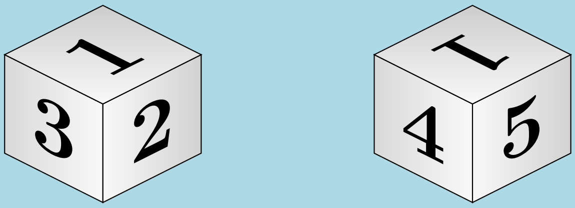
Tehát a csere által megnövelt értékű mezőnek a módosult táblázat legnagyobb összegű sorában és oszlopában kell lennie, ez a felső középső mező, amelyen a csere után a 11 áll. Hasonlóképpen, a csere által lecsökkent értékű mezőnek a módosult táblázat legkisebb összegű sorában és oszlopában kell lennie, ez a jobb alsó mező, amelyen a csere után a 2 áll.

Tehát **egyértelműen megállapítható, hogy a 2 és a 11 cseréjével jött létre a feladatban megadott táblázat.**

Megjegyzés.
A 2 és 11 számokat visszacserélve valóban bűvös négyzetet kapunk, hiszen így mind a nyolc vizsgált összeg 42.
Ennek ellenőrzése nélkül is teljes egy megoldás, hiszen a feladat szövege implikálja, hogy létezett egy bűvös négyzet, tehát legalább egy működő cserének kell lennie.

	17	2	23	**42**
	20	14	8	**42**
	5	26	11	**42**
42	**42**	**42**	**42**	**42**

2. Bergengócia játékgyárában csak olyan, 1-től 6-ig számozott dobókockát gyártanak, melyeken a számok elrendezése megegyezik a képen láthatóval (itt ugyanazt a kockát két irányból látjuk). Abban viszont különbözhetnek, hogy a számokat milyen színnel festik rá a kockára. Minden szám vagy zöld, vagy kék, vagy sárga, viszont két szomszédos lapra írt szám nem lehet azonos színű. Hányféle különböző dobókockát készíthetnek ebben a gyárban?



Számoljuk össze, hány olyan dobókocka létezik, amelyen az $\boxed{1}$ szám zölddel lett megfestve. Nyilvánvalóan ugyanennyi olyan lesz, amelyen az $\boxed{1}$ kék, illetve szintén ennyi, ahol sárga.

Ha az $\boxed{1}$ zöld, akkor a $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ nem lehetnek zöldek. Lehet a $\boxed{2}$ kék, de ekkor már biztos, hogy a $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$ sárga, emiatt az $\boxed{5}$ kék, viszont így a $\boxed{6}$-os már csak zöld lehet. Ha viszont a $\boxed{2}$ sárga, akkor hasonlóan megállapítható, hogy a $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$ kék, az $\boxed{5}$ sárga, a $\boxed{6}$ pedig zöld.

Mivel más nem lehetséges, csak két olyan kocka van, ahol $\boxed{1}$ zöld,
tehát összesen $3 \cdot 2 =$ **6 -féle különböző dobókockát gyártanak.**

Második megoldás. A kocka két oldala csak akkor nem szomszédos, ha átellenes. Tehát két szám csak akkor lehet azonos színű, ha átellenes oldalon állnak. Tehát bármely színre igaz, hogy legfeljebb két olyan színű szám lehet a kockán. Így hat oldalt csak úgy tudunk kiszínezni három színnel, ha a szemközti párok mindig azonos színűek.

A dobókocka számai feloszthatók három átellenes párra: $\boxed{1}$ és $\boxed{6}$; $\boxed{2}$ és $\boxed{5}$; $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$.
Ha a különböző párok különböző színűek, akkor a kocka teljesíti a feltételeket.

Már csak az a kérdés, hogy hányféleképpen oszthatjuk ki a színeket a három átellenes oldalpár között. Tehát $3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **6-féle különböző kockát gyártanak**.

3. Az első napon délben felírtuk egy táblára: $1, 2$. Ezután minden délben a következőt csináljuk: letöröljük a két táblán levő számot, és helyettük felírjuk a különbségüket (a nagyobból vonjuk ki a kisebbet) és az összegüket. Így például a második estén ez áll a táblán: $1, 3$; a harmadik estén $2, 4$ és így tovább.
Szerepelhet-e a táblán valaha 0-ra végződő szám?

Első megoldás. Írjuk fel az első néhány számpárt:

$$1,\ 2 \parallel 1,\ 3 \parallel 2,\ 4 \parallel 2,\ 6 \parallel 4,\ 8 \parallel 4,\ 12 \parallel 8,\ 16 \parallel 8,\ 24 \parallel 16,\ 32 \parallel 16,\ 46 \parallel 32,\ 64 \parallel \dots$$

A (2,4) és (32, 64) párban a kisebbik számok utolsó számjegye is megegyezik, és a nagyobbik számok utolsó számjegye is.

Az utolsó számjegyek azonban meghatározzák a következő különbség és összeg utolsó számjegyeit is, vagyis innentől kezdve ugyanazok az utolsó számjegyek fognak következni, amiket eddig kaptunk. (Például a következő számpár a (32, 96), amiknek ugyanazok az utolsó számjegyei mint a (2,6) számpárnak.)

Mivel eddig nem fordult elő 0 az egyesek helyiértékén, így **soha nem** is **fog előfordulni**.

Megjegyzés az első megoldáshoz. Az utolsó számjegyet vizsgáló megoldásoknál fontos, hogy odafigyeljünk a két szám sorrendjére – csak ezzel együtt határozzák meg egyértelműen a következő pár utolsó jegyeit. Ugyanis például a $(2, 6)$ pár után a $(4, 8)$ következik, míg a $(16, 32)$ pár után – ahol szintén 2 és 6 az utolsó számjegy – a $(16, 46)$ pár jön.

Második megoldás. Az első néhány napon a táblára kerülő számokat vizsgálva észrevehető, hogy

- minden második este két szomszédos kettőhatvány;
- a köztes napokon este pedig egy kettőhatvány és ennek háromszorosa szerepel a táblán.

Egyrészt, ez az első néhány este láthatóan teljesül (páratlanodik napokon lesz két kettőhatvány).

Másrészt, ha egy este teljesül a szabály, akkor ez öröklődik a következő estére is, hiszen:

- Ha egy páratlanadik este a táblán álló két szomszédos kettőhatvány x és $2x$, akkor ezek különbsége $2x - x = x$, összegük pedig $x + 2x = 3x$. Tehát másnap (párosadik napon) este is teljesülni fog a szabály.
- Ha egy párosadik este a táblán álló kettőhatvány x, akkor háromszorosa $3x$. Ezek különbsége $3x - x = 2x$ is kettőhatvány, összegük pedig $x + 3x = 4x$, az előbbi kettőhatvány kétszerese. Tehát másnap (párosadik napon) este is teljesülni fog a szabály.

A 0-ra végződő számok biztosan oszthatók 10-zel, de a kettőhatványok és ezek háromszorosai nem oszthatók 10-zel (mivel nincs bennük 5-ös prímtényező).

Ezért **soha nem fog 0-ra végződő szám szerepelni a táblán**.

4. Piroska és Bertalan azon gondolkodik, hogy az

$$\frac{1}{2024}, \frac{2}{2024}, \frac{3}{2024}, \ldots, \frac{2023}{2024}$$

törtek közt hány olyan van, amely nem egyszerűsíthető. Piroska szerint páros sok, Bertalan szerint páratlan sok ilyen tört van. Melyiküknek van igaza?

Legyen n pozitív egész, amelyre $1 \leq n \leq 1011$. Ekkor tekintsük a $t_1 = \frac{n}{2024}$ és a $t_2 = \frac{2024-n}{2024}$ törteket. Ha t_1 egyszerűsíthető, akkor az azt jelenti, hogy van olyan $d_1 > 1$ egész, amely közös osztója n-nek és 2024-nek. Ekkor azonban ez a d_1 osztja $(2024 - n)$-et is, hiszen a kisebbítendőt és a kivonandót is osztja. Ebből következik, hogy t_2 egyszerűsíthető d_1-gyel.

Ez fordítva is igaz, ha t_2 egyszerűsíthető, akkor $(2024 - n)$-nek és 2024-nek van egy $d_2 > 1$ közös osztója. Ez a d_2 akkor osztója a két szám különbségének is, azaz $2024-(2024-n) = n$-nek is.

Tehát a számok párokba állíthatók úgy, hogy bármely szám párja ugyanúgy viselkedik egyszerűsítés szempontjából, mint a szám maga. Egyedül a $\frac{1012}{2024}$-nek lesz a párja önmaga, de ez a szám egyszerűsíthető. Vagyis **Piroskának van igaza, a nem egyszerűsíthető törtek száma páros**.

Második megoldás. Az egyszerűsíthető törtek pontos száma is meghatározható a logikai szita módszerével.

Azok a törtek egyszerűsíthetők, amelyek számlálójának van 1-nél nagyobb közös osztója a 2024-gyel (számlálójuk nem relatív prím 2024-hez). 2024 pímtényezős felbontása $2^3 \cdot 11 \cdot 23$, így az $1, 2, \ldots, 2023$ számok között

- $[2023/2] = 1011$ db 2-vel osztható (páros)[1];
- $[2023/11] = 183$ db 11-gyel osztható;
- $[2023/23] = 87$ db 23-gyel osztható.

Az ilyen számlálójú törtek lesznek egyszerűsíthetők, de ez még nem jelenti azt, hogy $1011 + 183 + 87$ egyszerűsíthető tört, mivel többször számoltuk azokat, amelyek

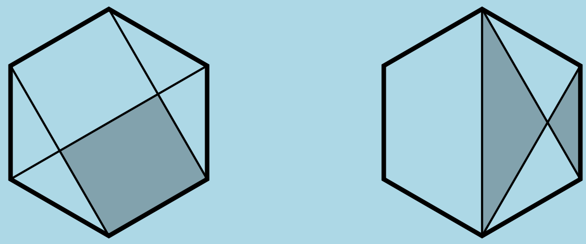
- 2-vel és 11-gyel is, azaz 22-vel oszthatók, ilyenből $[2023/22] = 91$ db van;
- 2-vel és 23-mal is, azaz 46-tal oszthatók, ilyenből $[2023/46] = 43$ db van;
- 11-gyel és 23-mal, azaz 253-tal oszthatók, ilyenből $[2023/253] = 7$ db van.

De az $(1011+183+87)-(91+43+7) = 1140$ sem adja meg az egyszerűsíthető törtek számát, hiszen azokat a számokat, amelyek 2-vel, 11-gyel és 23-mal is – ezek éppen a $2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$-tal osztható számok, így $[2023/506] = 3$ db van belőlük –, azokat 3-szor megszámoltuk, majd 3-szor levontuk. Így ezeket még egyszer hozzá kell számolnunk a végén, tehát összesen

$$(1011 + 183 + 87) - (91 + 43 + 7) + 3 = 1143 \text{ egyszerűsíthető van a törtek között.}$$

Így a nem egyszerűsíthető törtek száma $2023 - 1143 = 880$, tehát páros, azaz **Piroskának van igaza**.

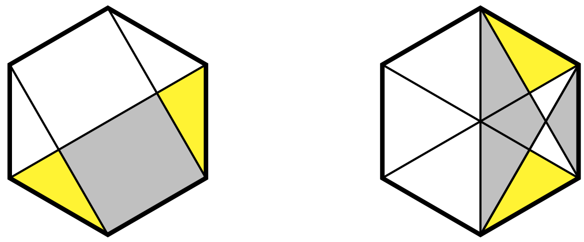
5. Az alábbi ábrákon két egybevágó szabályos hatszöget látsz, melyekben valamely átlók és oldalak mentén bizonyos részeket szürkére színeztünk. Melyik hatszögben színeztünk nagyobb területet szürkére?



A B

Az A_1 ábrán két kis háromszöget sárgára színeztem.

A B_1 ábrán a másik két főátló behúzása után színeztem sárgára két háromszöget.

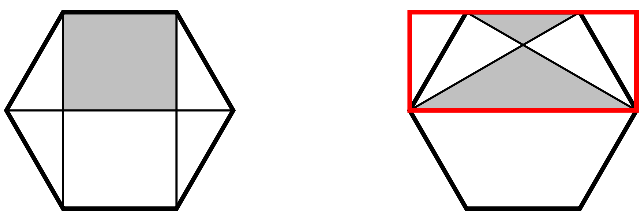


A_1 B_1

A négy sárgára színezett háromszög közül bármely kettő egybevágó. Így az A_1 ábrán a sárgára és a szürkére színezett rész területe pontosan a hatszög fele, míg a B_1 ábrán kevesebb, mint a fele lett.

Az egyenlő területű sárga részek levonása után azt kapjuk, hogy **az A hatszögben színeztünk nagyobb területrészt szürkére**.

Második megoldás. A könnyebb átláthatóság kedvéért forgassuk el a két hatszöget úgy, hogy a behúzott főátló vízszintes legyen, és a szürke terület a főátló felett helyezkedjen el.

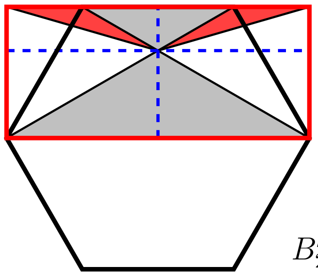


A_2 B_2

Közismert, hogy egy szabályos hatszög főátlója kétszer olyan hosszú, mint az oldala. Ezért a B_2 ábrára pirossal berajzolt téglalap területe éppen kétszerese az A_2 ábrára berajzolt téglalapnak, hiszen előbbi szélessége éppen kétszer akkora, míg a magasságuk megegyezik.

A B_2 ábrán a piros hatszög területének kevesebb, mint a fele van szürkére színezve.

Ennek belátáshoz, színezzünk pirosra még két háromszöget a B_2' ábrán látható módon.



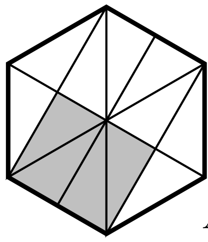
B_2'

A kék szaggatott vonalak négy olyan téglalapra vágják szét a piros téglalapot, melyek mindegyikére igaz, hogy a területének pont a fele van beszínezve.

Következésképpen, **az A ábrán színeztünk nagyobb területet szürkére**.

Megjegyzések a megoldáshoz.

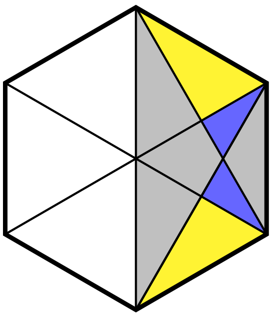
Az A ábrán a hatszög területének pontosan 1/3 része szürke. Ez többféleképpen belátható. Például, ha az A_3 ábrán látható módon behúzzuk az összes főátlót és még egy szemközti oldalpár felezőmerőlegesét, akkor 12 egybevágó háromszögre bontjuk a hatszöget, melyek közül 4 szürke.



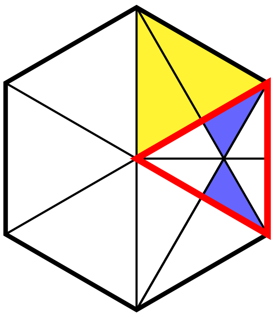
A_3

A B ábrán a hatszög területének 5/18 része szürke.

Ez is többféleképpen indokolható, egy példát mutatunk. A korábban már vizsgált B_1 ábrán színezzük kékre a hatszög jobb oldali feléből még hiányzó két kis háromszöget, így kapjuk a B_3 ábrát, amelyen összesen a hatszög területének fele van kiszínezve.



B_3



B_4

A B_4 ábrán pirossal keretezett szabályos háromszög területe a hatszögnek 1/6-a, ennek a két kék háromszög együtt 1/3-a – ez például abból következik, hogy a harmadik szimmetriatengelyét is behúzva 6 egybevágó darabra vágjuk szét a pirossal keretezett háromszöget, melyek közül 2 kék.

Így a két kék háromszög együtt a hatszög területének $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ része.

A két sárga együtt 1/6 rész (hiszen egymás mellé téve a pirossal keretezett háromszöggel egybevágó háromszöget alkotnak).

Így a B ábrán szürkére színezett rész területe a hatszögnek:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18} \text{ része.}$$

8. osztály Megyei forduló

1. Néhány testvér (akik közt nincsenek ikrek) elment almát szedni, mindegyikük a saját kosarába szedett almát. A legidősebb éppen kétszer annyi almát szedett, mint ahányat a legfiatalabb. Hazafelé úton mindegyikük (a legfiatalabbat leszámítva) adott egy-egy almát az összes nála fiatalabb testvérének. Így, mire hazaértek, minden testvér kosarában ugyanannyi alma volt. Hányan lehettek a testvérek, ha a második legidősebb 26 almát szedett?

Legyen a testvérek száma N. Ez azt jelenti, hogy a legidősebbnek $N-1$-gyel kevesebb alma volt a kosárában mire hazaért, a legfiatalabbnak pedig $N-1$-gyel több. Mivel ez a két szám megegyezik, ezért ez azt jelenti, hogy a legidősebb testvér $2N-2$ almával szedett többet, mint a legfiatalabb.

Ez a különbség azonban épp a legfiatalabb által szedett almák száma, hiszen a legidősebb kétszer annyit szedett, mint a legfiatalabb. Vagyis a legfiatalabb $2N-2$ darab almát szedett.

A legidősebb ennek kétszeresét, vagyis $4N-4$-et.

A második legidősebb kettővel szedett kevesebbet, mint a legidősebb, hiszen miután mindketten adtak a náluk fiatalabb testvéreiknek, a legidősebb adott neki egyet, így lett nekik egyenlő számú almájuk. Vagyis a második legidősebb $4N-6$ almát szedett.

Ha $4N-6=26$, akkor $4N=32$, vagyis $N=8$. Tehát **8 testvér ment el almát szedni**.

Ezek alapján a 8 testvér kor szerint növekvő sorrendben $14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28$ almát szedett. Mire hazaértek mindenkinek a kosarában 21 alma volt.

2. Az első napon délben felírtuk egy táblára: $1, 2$. Ezután minden délben a következőt csináljuk: letöröljük a két táblán levő számot, és helyettük felírjuk a különbségüket (a nagyobból vonjuk ki a kisebbet) és az összegüket. Így például a második estén ez áll a táblán: $1, 3$; a harmadik estén $2, 4$ és így tovább.
Szerepelhet-e a táblán valaha 0-ra végződő szám?

Első megoldás. Írjuk fel az első néhány számpárt:

$$1,\ 2 \parallel 1,\ 3 \parallel 2,\ 4 \parallel 2,\ 6 \parallel 4,\ 8 \parallel 4,\ 12 \parallel 8,\ 16 \parallel 8,\ 24 \parallel 16,\ 32 \parallel 16,\ 46 \parallel 32,\ 64 \parallel \ldots$$

A (2,4) és (32, 64) párban a kisebbik számok utolsó számjegye is megegyezik, és a nagyobbik számok utolsó számjegye is.

Az utolsó számjegyek azonban meghatározzák a következő különbség és összeg utolsó számjegyeit is, vagyis innentől kezdve ugyanazok az utolsó számjegyek fognak következni, amiket eddig kaptunk. (Például a következő számpár a (32, 96), amiknek ugyanazok az utolsó számjegyei mint a (2,6) számpárnak.)

Mivel eddig nem fordult elő 0 az egyesek helyiértékén, így **soha nem** is **fog előfordulni**.

Megjegyzés az első megoldáshoz. Az utolsó számjegyet vizsgáló megoldásoknál fontos, hogy odafigyeljünk a két szám sorrendjére – csak ezzel együtt határozzák meg egyértelműen a következő pár utolsó jegyeit. Ugyanis például a $(2, 6)$ pár után a $(4, 8)$ következik, míg a $(16, 32)$ pár után – ahol szintén 2 és 6 az utolsó számjegy – a $(16, 46)$ pár jön.

Második megoldás. Az első néhány napon a táblára kerülő számokat vizsgálva észrevehető, hogy

- minden második este két szomszédos kettőhatvány;
- a köztes napokon este pedig egy kettőhatvány és ennek háromszorosa szerepel a táblán.

Egyrészt, ez az első néhány este láthatóan teljesül (páratlanodik napokon lesz két kettőhatvány).

Másrészt, ha egy este teljesül a szabály, akkor ez öröklődik a következő estére is, hiszen:

- Ha egy páratlanadik este a táblán álló két szomszédos kettőhatvány x és $2x$, akkor ezek különbsége $2x - x = x$, összegük pedig $x + 2x = 3x$. Tehát másnap (párosadik napon) este is teljesülni fog a szabály.
- Ha egy párosadik este a táblán álló kettőhatvány x, akkor háromszorosa $3x$. Ezek különbsége $3x - x = 2x$ is kettőhatvány, összegük pedig $x + 3x = 4x$, az előbbi kettőhatvány kétszerese. Tehát másnap (párosadik napon) este is teljesülni fog a szabály.

A 0-ra végződő számok biztosan oszthatók 10-zel, de a kettőhatványok és ezek háromszorosai nem oszthatók 10-zel (mivel nincs bennük 5-ös prímtényező).

Ezért **soha nem fog** 0**-ra végződő szám szerepelni a táblán**.

3. Luca egy papírra növekvő sorrendben felírta azokat a háromjegyű számokat, melyeknek számjegyei különbözőek és csökkenő sorrendben állnak. Majd a papír hátoldalára az ugyanilyen tulajdonságú négyjegyű számokat sorolta fel, szintén növekvő sorrendben.

   a) Melyik szám szerepel a háromjegyűek között a hetedik helyen?

   b) Hányadik helyen szerepel a négyjegyűek között a 8642?

a) A háromjegyű számok közül az első hét növekvő sorrendben a következő:

$$210, 310, 320, 321, 410, 420, 421.$$

Tehát a hetedik szám Luca lapjának első oldalán a 421.

b) Vegyük észre, hogy ha adott négy különböző számjegy, akkor ez meghatároz pontosan egy számot, mégpedig azt, amelyben az adott jegyek csökkenő sorrendben követik egymást.

Nézzük meg először, hogy hány olyan szám van a lapon, amely kisebb, mint 8000. Ebben csak a $0, 1, 2, \ldots, 7$ számjegyeket lehet felhasználni. Tehát annyi ilyen szám van a lapon, ahányféleképpen a 8 számjegyből kiválaszthatunk 4-et. Ezek száma:

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70.$$

Nézzük meg, hogy hány olyan N szám van a lapon, amelyre igaz, hogy $8000 \leq N < 8600$. Ezeknek az első számjegye biztosan 8-as, a maradék 3 helyre pedig a $0, 1, 2, \ldots, 5$ számjegyek közül választhatunk. Tehát hat számjegy közül kell választanunk 3-at, vagyis az ilyen számok száma:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

Most nézzük meg, hogy hány olyan N szám van a lapon, amelyre igaz, hogy $8600 \leq N < 8640$. Ezeknek az első két számjegye biztosan 8-as és 6, a maradék 2 helyre pedig a $0, 1, 2, 3$ számjegyek közül választhatunk. Tehát négy számjegy közül kell választanunk 2-t, vagyis az ilyen számok száma:

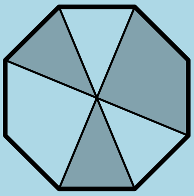
$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

Végül nézzük meg, hogy hány olyan szám van a listán, amely legalább 8460, de kisebb, mint 8642. Ezek a 8640 és a 8641.

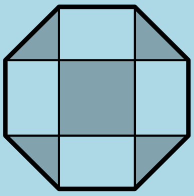
Összegezve: Luca lapjának hátoldalán $70 + 20 + 6 + 2 = 98$ olyan szám áll, amely kisebb, mint 8642.

Tehát a keresett szám a 99. helyen szerepel a lap hátoldalán.

4. Az alábbi ábrákon két egybevágó szabályos nyolcszöget látsz, melyekben valamely átlók és oldalak mentén bizonyos részeket szürkére színeztünk. Melyik nyolcszögben színeztünk nagyobb területet szürkére?



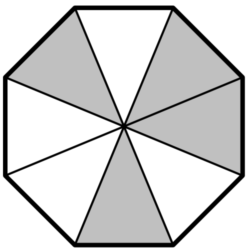
A



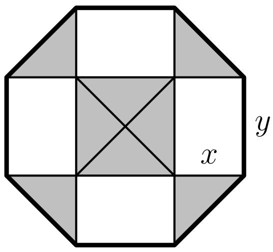
B

Az A ábrán a nyolc háromszög közül négy szürke, tehát a terület fele lett szürkére színezve.

Ezt beláthatjuk például úgy, hogy a négy főátlója nyolc egybevágó, azaz egyenlő területű háromszögre („pizza-szeletre") vágjuk a nyolcszöget. A nyolc háromszög közül négy, azaz valóban terület fele szürke



A



B

Az B ábrán rajzoljuk meg a középső szürke négyzet két átlóját. Így a középső négyzetet négy egybevágó, egyenlőszárú derékszögű háromszögre bontottuk. Ezek egybevágóak a nyolcszög kerületénél keletkező szürke háromszögekkel, hiszen az átfogójuk egyenlő a nyolcszög oldalával.

Tehát a szürke összterület egy ilyen szürke háromszög területének 8-szorosa. Két ilyen szürke háromszög az átfogójánál egy olyan négyzetet alkot, amelynek oldala x, átlója y (ahol y a nyolcszög oldalhosszúsága). A szürke részek összterülete így $4x^2$.

A fehéren maradó terület négy darab olyan téglalapból áll, amelyek oldalai x és y, tehát a szürke összterület: $4xy$.

Világos, hogy $x < y$, és így $4x^2 < 4xy$, azaz a B ábrán a szürke terület kevesebb, mint fehér. Tehát a B ábrán nyolcszög területének kevesebb, mint a fele szürke.

Azt kaptuk, hogy **az A ábrán színeztünk nagyobb területet szürkére.**

Megjegyzés. Könnyen kiszámítható, hogy $y = \sqrt{2}x$, de az arány pontos értékére nincs szükségünk a megoldáshoz.

Ha a nyolcszög oldalát (a fenti megoldásban y-t) választjuk 1 egységnek, akkor a B ábrán a fehéren maradó téglalapok területe egyenként $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a szürke egyenlőszárú derékszögű háromszögek területe egyenként 1/4. Így a szürke terület aránya a B ábrán

$$\frac{2}{2\sqrt{2}+2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \approx 0{,}414.$$

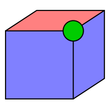
5. Bergengócia játékgyárában csupa azonos méretű kiskockát gyártanak. A kiskockák mindegyik lapját pirosra vagy kékre festik, majd szétválogatva ládákba pakolják őket. Az A jelű ládában lévő kiskockák 3 lapja piros és 3 lapja kék, a B jelű ládában lévőknek 4 lapja piros és 2 lapja kék, a C jelű ládában lévőknek 2 lapja piros és 4 lapja kék.
Ernő és Fanni egy-egy olyan 2×2×2-es nagy kockát szeretnének építeni, amelynek semelyik lapján sincs kétféle szín.

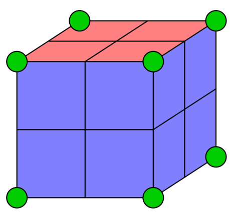
a) Ernő kivett 8 kiskockát az A jelű ládából. Igaz-e, hogy ezekből **biztosan** meg lehet építeni egy fenti tulajdonságú nagy kockát?

b) Fanni kivett összesen 8 kiskockát a B és C jelű ládákból. Igaz-e, hogy ezekből **biztosan** meg lehet építeni a fenti tulajdonságú nagy kockát?

a) Ha egy kiskockának 3 piros és 3 kék lapja van, akkor van olyan csúcsa, amelyben 1 piros és 2 kék lap találkozik. Hiszen biztosan kell, hogy legyen két kék lap, amelyek élszomszédosak, nevezzük ezeket X és Y lapnak. Két olyan lap van, amely X-szel és Y-nal is szomszédos, ezek közül legalább az egyik piros (hiszen ha mindkettő kék lenne, akkor már négy kék lapja lenne a kockának).

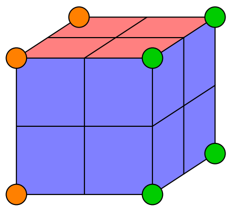
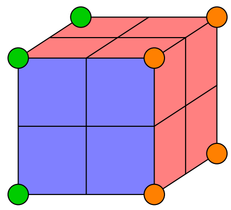
Mindegyik kiskockán keressünk tehát egy olyan csúcsot, amelyben két kék és egy piros lap találkozik, és ezt a csúcsot színezzük zöldre. A kiskockákat úgy forgatva építsük össze, hogy mindig a zöld csúcsok essenek a $2 \times 2 \times 2$-es kocka csúcsaiba, és a zöld csúcsban találkozó oldalak közül a vízszintesen álló lap piros legyen, míg a két függőlegesen álló lap kék. Így a kapott nagy kocka két vízszintes (alsó és felső) lapja teljesen piros lesz, míg a négy függőleges lapja teljesen kék.





Tehát **biztosan meg lehet építeni a fenti tulajdonságú nagy kockát**.

Megjegyzés az (a) részhez. Egy alternatív konstrukció vázlata: ha egy kiskockának három 3 piros és 3 kék lapja van, akkor van olyan csúcsa, amelyben 2 piros és 1 kék lap találkozik. Négy kiskockán keressünk egy ilyen csúcsot, és színezzük narancsárgára. A többi kiskockán pedig egy-egy zöld csúcsot rajzoljunk meg (ahol 2 kék és 1 piros lap találkozik). Ekkor az ábrákon látható módon össze lehet építeni belőlük egy olyan nagy kockát, amelynek 3 lapja teljesen kék és 3 lapja teljesen piros.

b) Egy kiskocka két átellenes lapja közül pontosan egy látható az összeépített $2 \times 2 \times 2$-es kocka felületén.

Ha egy kiskockán 4 piros és 2 kék lap van úgy, hogy a 2 kék lap átellenes (nevezzük az ilyet P_0 típusú kockának), akkor ez biztosan 2 piros és 1 kék kisnégyzettel járul hozzá a nagy kocka felületéhez.

Hasonlóképpen, ha egy kiskockán 4 kék és 2 piros lap van úgy, hogy a 2 piros lap átellenes (az ilyet nevezzük K_0 típusú kockának), akkor ez biztosan 2 kék és 1 piros kisnégyzettel járul hozzá a nagy kocka felületéhez.

Ezért ha Fanni 5 darab P_0 típusú kiskockát vett ki a B jelű ládából és 3 darab K_0 típusú kiskockát a C jelű ládából, akkor összesen $5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 13$ piros kisnégyzet és $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 11$ kék kisnégyzet fogja alkotni a nagy kocka felületét. Így semmiképp nem lehet egyszínű a nagy kocka mindegyik lapja, hiszen a piros kisnégyzetek számának 4-gyel oszthatónak kellene lennie a felületen, mivel a nagy kocka mindegyik lapja 4 darab kisnégyzetből áll össze.

Tehát **nem biztos, hogy meg lehet építeni a fenti tulajdonságú nagy kockát**.

1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a 4-szeresének az első és az utolsó számjegye is 4-es?

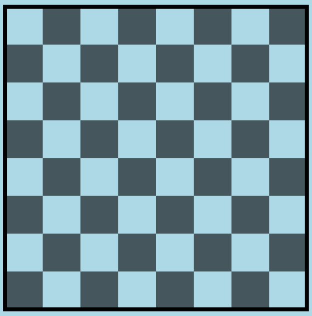
Minden négyjegyű szám kisebb, mint 10000, ezért a négyszerese kisebb, mint 40000. Tehát, ha egy négyjegyű szám négyszerese 4-es számjeggyel kezdődik, akkor az 4000 és 4999 között van.

Mivel $\frac{4000}{4} = 1000$, valamint $\frac{4999}{4} = 1249\frac{3}{4}$, ezért a kiinduló számunk legalább 1000, legfeljebb 1249 lehet.

Ezek közül csak azok lesznek jók, amiknek a négyszerese négyesre végződik, ez pedig a szám utolsó számjegyén múlik. Mégpedig úgy, hogy ha a szám utolsó jegye 1 vagy 6, akkor a négyszeresének utolsó számjegye 4 lesz, egyébként pedig nem.

Ez azt jelenti, hogy 1000 és 1249 között – ebből a 250 darab egymást követő számból – minden ötödik megfelelő. Vagyis 50 olyan szám van, amely megfelel a feladat feltételeinek.

2. Egy robot egy 8×8-as sakktábla minden fehér mezőjére ráírta, hogy az a mező hány fekete mezővel szomszédos.



a) Mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

b) Ezt követően egy 80×80-as, sakktáblaszerűen kiszínezett négyzet mezőivel tette meg ugyanezt. Ezen a táblán mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

A fehér mezőkbe csak 2, 3, vagy 4 kerülhet, hiszen ennyi fekete mezővel lehetnek szomszédosak a fehér mezők. Számoljuk össze, hogy melyik szám hányszor szerepel a táblán.

2-es csak a két fehér sarokmezőbe kerül. 3-as a sakktábla széleinél lesz, összesen 12 mezőben. Mivel 32 fehér mező van, ebből 14 mezőbe írt a robot 2-t vagy 3-at, a maradék 18 mezőbe kerül 4-es.

Így a beírt számok összege
$$2 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 112.$$

A második feladatrészben hasonlóan gondolkozhatunk. 2-es itt is csak a két fehér sarokmezőben lesz. A két sarkot leszámítva minden szélen 78 mező van, ezeknek a fele fehér, tehát minden szélen 39 fehér mező van,

vagyis összesen $4 \cdot 39 = 156$ olyan mező lesz, amibe a robot a 3-as számot írta.

A négyzetben $\frac{80\cdot 80}{2} = 3200$ fehér mező van, ebből már 158 mezőbe került szám, a maradék 3042 mezőbe kerül 4-es.

Így a beírt számok összege ebben az esetben

$$2 \cdot 2 + 156 \cdot 3 + 3042 \cdot 4 = 12640.$$

3. Boribon és Annipanni felváltva mondanak számokat. Először Annipanni mond egy pozitív egész számot. Boribonnak mindig az a feladata, hogy az Annipanni által utoljára mondott számot felbontsa tetszőlegesen két pozitív egész szám összegére, s ezt a két számot mondja ki. Annipanni ezután a Boribon által mondott két szám szorzatát mondja. Ezt folytatják, amíg kedvük tartja.
Ha Annipanni először 24-et mondott, akkor lehetséges-e, hogy egyszer a 2024-et is kimondja?

Vegyük észre, hogy ha Boribon bármikor az Annipanni által mondott számot úgy bontja fel két szám összegére, hogy az egyik az 1, akkor a kapott számok szorzataként Annipanni éppen eggyel kisebb számot fog mondani, mint azelőtt.

Tehát, ha sikerül egyszer Annipanninak 2024-nél nagyobb számot mondania, akkor onnan biztosan megoldható, hogy a 2024-et is kimondja.

Erre számtalan különböző megoldás készíthető, egyet szemléltet az alábbi táblázat:

Annipanni	24		140		4000		3999		3998	...
Boribon		10, 14		100, 40		1, 3999		1, 3998		...

Tehát lehetséges, hogy Annipanni kimondja a 2024-et

4. Április 1-jén reggel egyetlen 0 állt egy táblán. Ezután minden nap délben annyit adtunk hozzá a táblán lévő számhoz, vagy vontunk ki belőle, ahányadika volt éppen, majd az így kapott eredményt írtuk a táblán szereplő szám helyére. (Tehát április 1-jén este vagy 1, vagy -1 állt a táblán.)

a) Állhatott-e április 10-én este a táblán a 22?

b) Állhatott-e április 10-én este a táblán a -37?

Tegyük fel, hogy minden nap kivonunk a táblán szereplő számból. Alább látjuk, hogy hogyan változott napról napra a táblára írt szám.

$$0 \xrightarrow{-} (-1) \xrightarrow{-} (-3) \xrightarrow{-} (-6) \xrightarrow{-} (-10) \xrightarrow{-} (-15) \xrightarrow{-} (-21) \xrightarrow{-} (-28) \xrightarrow{-} (-36) \xrightarrow{-} (-45) \xrightarrow{-} (-55)$$

Ebben az esetben tehát április 10-én este a -55 szerepelne. Ha egy adott napon a kivonás helyett hozzáadtunk volna, azáltal a következő érték az adott szám kétszeresével nő, majd emiatt innentől kezdve mindegyik, tehát a -55 helyett is egy páros számmal növelt értéket kapnánk. Mivel egy páratlan számhoz párosat hozzáadva mindig páratlan számot kapunk, ez azt jelenti, hogy a táblán a 10. estén csak páratlan szám szerepelhet. Vagyis a 22 nem állhatott a táblán április 10-én este.

Ahhoz, hogy a -37-et kapjuk, 18-cal kell növelni az előbb vizsgált összeget. Vagyis, ha a kilencedik napon a 9-et nem kivonjuk, hanem hozzáadjuk az aktuális számhoz, akkor végül éppen -37 lesz a táblán április 10-én este. Ez tehát lehetséges, ahogy alább is láthatjuk.

$$0 \xrightarrow{-} (-1) \xrightarrow{-} (-3) \xrightarrow{-} (-6) \xrightarrow{-} (-10) \xrightarrow{-} (-15) \xrightarrow{-} (-21) \xrightarrow{-} (-28) \xrightarrow{-} (-36) \xrightarrow{+} (-27) \xrightarrow{-} (-37)$$

Megjegyzés. Természetesen más módon is megkaphatjuk a -37-et, mindössze arra kell figyelni, hogy 9 legyen azon napok sorszámának összege, melyeken a kivonás helyett hozzáadást végzünk. Így további hét megoldás adódik.

$$0 \xrightarrow{+} 1 \xrightarrow{-} (-1) \xrightarrow{-} (-4) \xrightarrow{-} (-8) \xrightarrow{-} (-13) \xrightarrow{-} (-19) \xrightarrow{-} (-26) \xrightarrow{+} (-18) \xrightarrow{-} (-27) \xrightarrow{-} (-37)$$

$$0 \xrightarrow{-} (-1) \xrightarrow{+} 1 \xrightarrow{-} (-2) \xrightarrow{-} (-6) \xrightarrow{-} (-11) \xrightarrow{-} (-17) \xrightarrow{+} (-10) \xrightarrow{-} (-18) \xrightarrow{-} (-27) \xrightarrow{-} (-37)$$

$$0 \xrightarrow{-} (-1) \xrightarrow{-} (-3) \xrightarrow{+} 0 \xrightarrow{-} (-4) \xrightarrow{-} (-9) \xrightarrow{+} (-3) \xrightarrow{-} (-10) \xrightarrow{-} (-18) \xrightarrow{-} (-27) \xrightarrow{-} (-37)$$

$$0 \xrightarrow{-} (-1) \xrightarrow{-} (-3) \xrightarrow{-} (-6) \xrightarrow{+} (-2) \xrightarrow{+} 3 \xrightarrow{-} (-3) \xrightarrow{-} (-10) \xrightarrow{-} (-18) \xrightarrow{-} (-27) \xrightarrow{-} (-37)$$

$$0 \xrightarrow{+} 1 \xrightarrow{+} 3 \xrightarrow{-} 0 \xrightarrow{-} (-4) \xrightarrow{-} (-9) \xrightarrow{+} (-3) \xrightarrow{-} (-10) \xrightarrow{-} (-18) \xrightarrow{-} (-27) \xrightarrow{-} (-37)$$

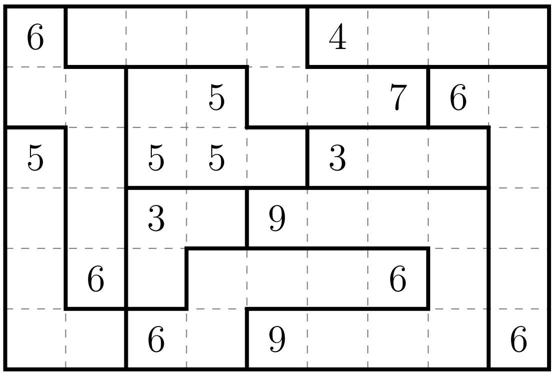
$$0 \xrightarrow{+} 1 \xrightarrow{-} (-1) \xrightarrow{+} 2 \xrightarrow{-} (-2) \xrightarrow{+} 3 \xrightarrow{-} (-3) \xrightarrow{-} (-10) \xrightarrow{-} (-18) \xrightarrow{-} (-27) \xrightarrow{-} (-37)$$

$$0 \xrightarrow{-} (-1) \xrightarrow{+} 1 \xrightarrow{+} 4 \xrightarrow{+} 8 \xrightarrow{-} 3 \xrightarrow{-} (-3) \xrightarrow{-} (-10) \xrightarrow{-} (-18) \xrightarrow{-} (-27) \xrightarrow{-} (-37)$$

5. Az alábbi ábrán egy földterület térképét látjuk, rácsvonalakkal mezőkre bontva. Ábel azt a feladatot kapta, hogy a rácsvonalak mentén ossza fel kerítésekkel a földterületet úgy, hogy a számmal jelzett helyekről pontosan annyi mezőt lehessen kerítés átlépése nélkül elérni (a számot tartalmazó mezőt is beleértve), mint amennyi az adott mezőre van írva. A kerítések által határolt területek mindegyikében szerepelnie kell legalább egy számnak.
Hová építheti Ábel a kerítéseket? Készíts ábrát.

6					4			
			5			7	6	
5		5	5		3			
		3		9				
	6					6		
		6		9				6

A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyes rajz megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi gondolatok leírásáért, amelyek segítik egy helyes rajz megtalálását.



Megjegyzés.

Látható, hogy a két 3-as nem lehet egy területen, így lesz két különböző 3-as terület. Ezenkívül a bal felső sarokban és az alsó sorban lévő két hatos egyike sem lehet azonos területen, így lesz legalább három darab 6 méretű terület. Ezek alapján kell lennie legalább

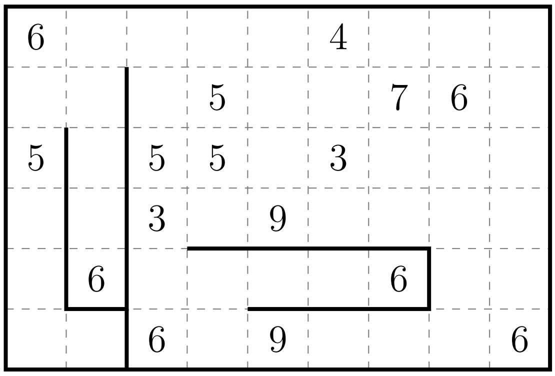
$$3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 6 + 7 + 9 = 49$$

területnek.

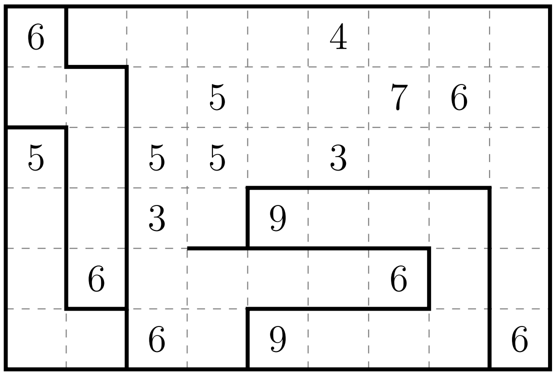
Összesen 54 terület van, ami csak úgy jön ki, ha az 5-ös területből is kettő van.

Vagyis ebből az következik, hogy három 6-os terület van. Mivel semelyik három 6-os nem kerülhet egy területre, így mindhárom 6-os területen 2-2 hatosnak kell lennie. Az első oszlopban lévő 6-os csak a második oszlopban lévő 6-ossal lehet együtt. Így a harmadik oszlopban lévő 6-osnak a hetedik oszlopban lévő 6-ossal lesz együtt.

Ezek alapján be tudjuk húzni az alábbi vonalakat.



A bal oldali 5-ösnek egy 5 méretű területen kell lennie, illetve a két kilencesnek is azonos területen kell lennie, így még további vonalakat tudunk behúzni.



Végül látható, hogy a második oszlop legfelső mezőjéhez csak a 7-es terület tud elérni. Ezek után már lépésenként behúzható a többi vonal is.

5. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Öt gyerek beszélget a labdáikról. Minden gyereknek legalább egy és legfeljebb öt labdája van, továbbá semelyik két gyereknek nincs ugyanannyi labdája. Az alábbi **igaz** állításokat mondják:

Alíz:	Több labdám van, mint Boldizsárnak.
Boldizsár:	Nem két labdám van.
Csenge:	Annyi labdám van, mint Alíznak és Elemérnek összesen.
Dorka:	Szeretem a labdákat.
Elemér:	Ha Alíz labdáinak a számát megszorozzuk Boldizsár labdáinak számával, akkor a kapott szám nagyobb, mint Csenge labdáinak a száma.

Kinek hány labdája van?

Mivel Csengének annyi labdája van, mint Alíznak és Elemérnek összesen, így Csengének több labdája van, mint Alíznak.

Ha Boldizsárnak csak 1 labdája lenne, akkor az előző megfigyelés alapján, nem lehetne igaz Elemér állítása, így Boldizsárnak nem egy labdája van.

Mivel Alíznak több labdája van, mint Boldizsárnak, Csengének pedig több labdája, mint Alíznak, Csengének pedig legfeljebb öt labdája van, így Boldizsárnak legfeljebb három labdája lehet.

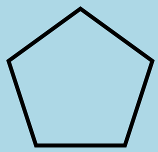
Mivel Boldizsárnak nem lehet két labdája, így neki csak három labdája lehet.

Ekkor Alíznak négy, Csengének öt labdája van.

Csenge állítás miatt a maradék két ember közül Elemérnek van egy labdája, Dorkának pedig két labdája.

2. Az ábrán látható szabályos ötszög kerületén pirossal megjelöltünk néhány pontot úgy, hogy minden oldalán pontosan három piros pont van.

Összesen hány pontot jelölhettünk meg pirossal?
Mutass példát az összes lehetőségre, és indokold, hogy ezeken kívül más lehetőség nincs.

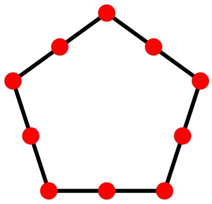


Számoljuk meg a piros pontokat oldalanként: $5 \cdot 3 = 15$. Ha minden piros pontot pontosan egyszer számolunk így, akkor megkapjuk a piros pontok maximális számát, ami 15.

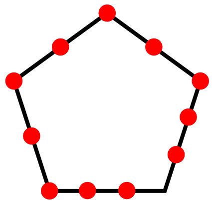
Ha egy piros pont csúcsra esik, akkor azt az előző számítással kétszer számoltuk meg, vagyis a piros pontok valódi száma annyival kevesebb 15-nél, ahány csúcs piros. Mivel legfeljebb 5 csúcs lehet piros, így legalább $15 - 5 = 10$ piros pontra van szükség.

Vagyis 10, 11, 12, 13, 14 vagy 15 pontot jelölhettem meg pirossal.

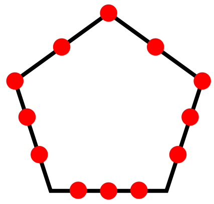
Mindegyik esetre mutatunk egy-egy példát:



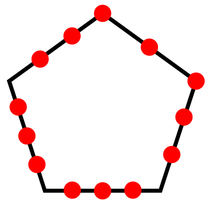
10 piros pont



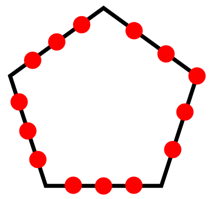
11 piros pont



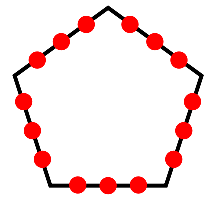
12 piros pont



13 piros pont

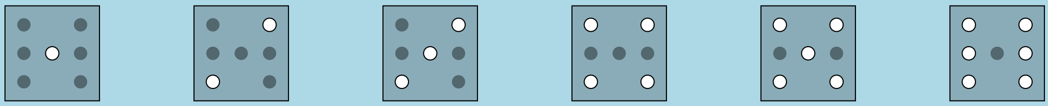


14 piros pont



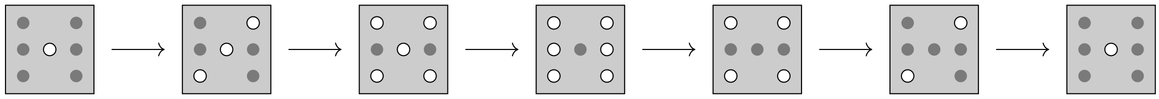
15 piros pont

3. Egy dobókocka-szimulátor hét kis lámpa segítségével jeleníti meg a számokat az ábrán látható módon. Legkevesebb hány lámpakapcsolásra van szükség ahhoz, hogy az egyesből indulva az összes szám megjelenjen valamilyen sorrendben, majd újra az egyest lássuk?



Ha kezdetben az 1-esnek megfelelően csak a középső lámpa világít, majd valamikor elérjük a 6-ost, ahol csak a középső lámpa nem világít, akkor ehhez mind a hét lámpát legalább egyszer kell kapcsolni. Ugyanígy mind a hét lámpát kell kapcsolni legalább egyszer, míg a 6-os állásból visszatérünk az 1-esbe. Ez azt jelenti, hogy biztosan szükségünk lesz legalább 14 kapcsolásra.

Megmutatjuk, hogy lehetséges is ennyivel. Például az alábbi sorrend nem igényel 14-nél több kapcsolást.



4. Egy 3×3-as táblázatba beírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat, mindegyik számot pontosan egy mezőbe. Egy mezőt **kerek**nek nevezünk, ha a vele élszomszédos mezőkre írt számok összege 10.
Legfeljebb hány kerek mező lehet a táblázatban?

Jelöljük betűkkel a négyzetbe írt számokat az alábbi módon, és színezzük is meg a mezőket.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A és E nem lehet egyszerre kerek, mert akkor $B + D$ és $B + D + F + H$ is 10 lenne, vagyis $F + H = 0$ lenne, ami lehetetlen. Ugyanígy E és G sem lehet kerek egyszerre.

A és G sem lehet kerek egyszerre, mert akkor $B + D$ és $D + H$ is 10 lenne, amiből következik, hogy $B = H$, ami szintén lehetetlen. (Így a három sárga mezőn álló szám közül legfeljebb egy lehet kerek.)

Ugyanígy kapjuk, hogy C és I (a két fehér mezőn álló szám) sem lehet kerek egyszerre.

Ha B és F (a két piros mezőn lévő szám) is kerek lenne, akkor $A + C + E$ és $C + E + I$ is 10 lenne, vagyis A és I egyenlő lenne, ami lehetetlen. Hasonlóan kapjuk, hogy D és H (a két kék mezőn lévő szám) sem lehet kerek egyszerre.

Ezzel beláttuk, hogy az azonos színnel jelölt számok közül legfeljebb egy lehet kerek. Mivel négy színt használtunk, ezért legfeljebb 4 kerek szám lehet a táblázatban.

Az pedig elérhető, hogy 4 mező legyen kerek:

0	2	1
8	4	**3**
6	7	**5**

Megjegyzés. Hogyan lehet megtalálni a konstrukciót?

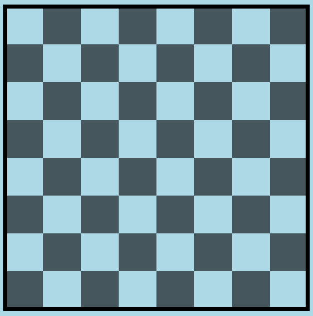
Látható, hogy ha A kerek, akkor C nem lehet az, így I-nek kellene kereknek lennie. Ugyanígy, ha D kerek, akkor B nem lehet kerek, csak F. Próbáljuk elérni, hogy ez a 4 mező (A, D, F, I) legyen kerek.

Írjuk fel a kerek mezők szomszédait:

$$(B + D) + (F + H) + (A + E + G) + (C + E + I) = 10 + 10 + 10 + 10 = 40.$$

Ebben az összegben minden szám 1-szer szerepel az E kivételével, ami viszont kétszer. A táblázatban a számok összege 36, így $E = 40 - 36 = 4$. Vagyis $A + G = C + I = 6$. Ez pedig a megmaradó számokból csak a 0-6-ra és az 1-5-re teljesül. Ezután a maradék számokból is tudunk két párt képezni, amiknek az összege 10. (A 2-8 és a 3-7.)

1. Egy robot egy 8×8-as sakktábla minden fehér mezőjére ráírta, hogy az a mező hány fekete mezővel szomszédos.



(a) Mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

(b) Ezt követően egy 80×80-as, sakktáblaszerűen kiszínezett négyzet mezőivel tette meg ugyanezt. Ezen a táblán mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

A fehér mezőkbe csak 2, 3, vagy 4 kerülhet, hiszen ennyi fekete mezővel lehetnek szomszédosak a fehér mezők. Számoljuk össze, hogy melyik szám hányszor szerepel a táblán.

2-es csak a két fehér sarokmezőbe kerül. 3-as a sakktábla széleinél lesz, összesen 12 mezőben. Mivel 32 fehér mező van, ebből 14 mezőbe írt a robot 2-t vagy 3-at, a maradék 18 mezőbe kerül 4-es.

Így a beírt számok összege

$$2 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 112.$$

A második feladatrészben hasonlóan gondolkozhatunk. 2-es itt is csak a két fehér sarokmezőben lesz. A két sarkot leszámítva minden szélen 78 mező van, ezeknek a fele fehér, tehát minden szélen 39 fehér mező van,

vagyis összesen $4 \cdot 39 = 156$ olyan mező lesz, amibe a robot a 3-as számot írta.

A négyzetben $\frac{80 \cdot 80}{2} = 3200$ fehér mező van, ebből már 158 mezőbe került szám, a maradék 3042 mezőbe kerül 4-es.

Így a beírt számok összege ebben az esetben

$$2 \cdot 2 + 156 \cdot 3 + 3042 \cdot 4 = 12640.$$

2. Hány olyan hatjegyű pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a 6-szorosának az első és az utolsó számjegye is 6-os?

Minden hatjegyű szám kisebb, mint 1000000, ezért a hatszorosa kisebb, mint 6000000. Tehát, ha egy hatjegyű szám hatszorosa 6-os számjeggyel kezdődik, akkor az 600000 és 699999 között van.

Mivel $\frac{600000}{6} = 100000$, valamint $\frac{699999}{6} = 116666\frac{1}{2}$, ezért a kiinduló számunk legalább 100000, legfeljebb 116666 lehet.

Ezek közül csak azok lesznek jók, amiknek a hatszorosa hatosra végződik, ez pedig a szám utolsó számjegyén múlik. Mégpedig úgy, hogy ha a szám utolsó jegye 1 vagy 6, akkor a hatszorosának utolsó számjegye 6 lesz, egyébként pedig nem.

Ez azt jelenti, hogy 100000 és 116666 között – ebből a 16667 darab egymást követő számból – minden ötödik megfelelő. Vagyis 3334 olyan szám van, mely megfelel a feladat feltételeinek.

3. Jelölje ,,A” azoknak a négyjegyű számoknak a számát, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám összegeként. Legyen ,,B” azoknak a tízjegyű számoknak a száma, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám szorzataként.
Melyik a nagyobb, ,,A” vagy ,,B”?

A vizsgált négyjegyű számokból van több, azaz

$$A > B.$$

Ennek belátásához kiszámítjuk A pontos értékét, majd belátjuk, hogy B ennél kevesebb.

Egyrészt $332+333+334 = 999$ még háromjegyű, de $333+334+335 = 1002$ már négyjegyű. Másrészt $3332 + 3333 + 3334 = 9999$ még négyjegyű, de $3333 + 3334 + 3335 = 10\,002$ már ötjegyű.

Tehát pontosan akkor lesz három egymást követő pozitív egész szám összege négyjegyű, ha a legkisebb összeadandó legalább 333 de legfeljebb 3332.

Ilyen egész számból $3332 - 333 + 1 = 3000$ db van, tehát $A = 3000$.

Most becsüljük meg B-t. A legkisebb alkalmas szorzatot keresve megállapíthatjuk, hogy: $999 \cdot 1000 \cdot 1001 = 999\,999\,000$ még kilencjegyű, de $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 = 1\,003\,002\,000$ már tízjegyű.

Ha $B \geq A = 3000$ lenne, akkor a $3999 \cdot 4000 \cdot 4001$ szorzatnak még tízjegyűnek kellene lennie (itt $3999 = 1000 + 3000 - 1$, így kaptuk ezt a számhármast). Azonban

$$3999 \cdot 4000 \cdot 4001 > 3000 \cdot 3000 \cdot 3000 = 27\,000\,000\,000,$$

tehát a $3999 \cdot 4000 \cdot 4001$ szorzat (legalább) 11-jegyű.

Ezzel beláttuk, hogy $A > B$.

Megjegyzés. Számológéppel (vagy sok türelemmel) meghatározható a legnagyobb alkalmas szorzat is: $2153 \cdot 2154 \cdot 2155 = 9\ 993\ 946\ 110$ még tízjegyű; míg $2154 \cdot 2155 \cdot 2156 = 10\ 007\ 871\ 720$ már 11-jegyű. (Segíthet a $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}1544$ közelítő érték.) Tehát $B = 2153 - 1000 + 1 = 2154$.

4. Mókus Peti és Mókus Panni szeretnék feltölteni az éléskamrájukat télire. A kamrában dió és mogyoró is elhelyezhető. Ha csak diót raknak a kamrába, akkor abból 450 darab, ha csak mogyorót, akkor abból 720 darab fér el. A kamrában egyszerre dió és mogyoró is lehet, elfér benne például 225 dió és 360 mogyoró egyszerre, és ekkor a kamra teljesen tele van.
Peti egy nap alatt vagy 12 diót, vagy 20 mogyorót tud gyűjteni, Panni pedig naponta vagy 10 diót, vagy 15 mogyorót. (Egy mókus egy napon belül csak egyféle eleséget gyűjthet.) Legkevesebb hány nap alatt tudják megtölteni az üres éléskamrát?

Ha Mókus Peti egyedül töltené meg a kamrát, akkor csak diót gyűjtve $\frac{450}{12} = 37{,}5$ napra lenne szüksége, ha csak mogyorót gyűjt, akkor $\frac{720}{20} = 36$ nap alatt elkészül. Ez azt jelenti, hogy arányaiban lassabban halad, ha diót gyűjt, mint ha mogyorót, vagyis akkor lenne kész a leghamarabb, ha minden nap mogyorót gyűjt. Ha Mókus Panni is gyűjtöget, Petinek akkor is érdemesebb mindig mogyorót gyűjtenie, hiszen azzal ő nagyobb részét tölti meg az éléskamrának.

Ugyanezt vizsgálva Mókus Panni esetében azt kapjuk, hogy dióval $\frac{450}{10} = 45$ nap, míg mogyoróval $\frac{720}{15} = 48$ nap lenne egyedül megtöltenie a kamrát, tehát Panni gyorsabban halad, ha csak diót gyűjt.

Mivel Peti minden nap a kamra $\frac{1}{36}$ részét, Panni pedig az $\frac{1}{45}$-ét tudja megtölteni, így együtt minden nap a kamrának $\frac{1}{36} + \frac{1}{45} = \frac{5}{180} + \frac{4}{180} = \frac{9}{180} = \frac{1}{20}$ részét töltik meg legfeljebb. Tehát legkevesebb 20 napra van szüségük az éléskamra feltöltéséhez, és ez meg is valósul, ha Peti minden nap mogyorót, Panni minden nap diót gyűjt.

5. Zalán az írásbeli szorzást gyakorolja az anyukájával.

a) Az anyukája mond neki egy számot és ennek a számnak kell kiszámítania a 3-szorosát, 4-szeresét, 5-szörösét és így tovább, egészen a 11-szereséig. Vagyis 9 szorzást kell minden esetben elvégeznie.

Tud-e Zalán anyukája olyan pozitív egész számot mondani, amely esetén a kapott 9 szám első számjegyei mind különbözőek?

b) Később Zalán anyukája kicsit módosította a feladatot, és azt kérte, hogy számítsa ki a szám 4-szeresét, 5-szörösét és így tovább, egészen a 12-szereséig. Vagyis ismét 9 szorzást kell minden esetben elvégeznie.

Tud-e ebben az esetben Zalán anyukája olyan pozitív egész számot mondani, amelynél a kapott 9 szám első számjegyei mind különbözőek?

a) Ha Zalán anyukája a 91-et mondja, akkor a szorzások eredményei rendre 273, 364, 455, 546, 637, 728, 819, 910 illetve 1001. Az első számjegyek különbözőek, a válasz tehát igen.

b) Megmutatjuk, hogy ebben az esetben nem lehetséges a feltételnek megfelelő szám mondása. Vegyük észre, hogy az elvégzett szorzások eredményei között a legnagyobb éppen háromszorosa a legkisebbnek (hiszen a legnagyobb egy pozitív egész 12-szerese, míg a legkisebb ugyanannak a pozitív egésznek a 4-szerese). Azt fogjuk igazolni, hogy egy pozitív egész szám (jelöljük n-nel) és a háromszorosa $(3 \cdot n)$ között nem tud előfordulni mind a 9 kezdőszámjegy.

A számjegyek számától függetlenül, ha n 1-essel kezdődik, akkor a háromszorosa ugyanannyi számjegyből fog állni, és kezdő számjegye csak 3, 4 vagy 5 lehet. Ebben az esetben tehát az n és $3 \cdot n$ számok között csak az 1, 2, 3, 4, 5 fordulhat elő első számjegyként.

Ha n első számjegye 2, akkor a háromszorosa ugyannyi számjegyből áll, mint n, és első jegye kisebb lesz, mint 9. Tehát itt sem fordulhat elő mind a 9 féle kezdőszámjegy.

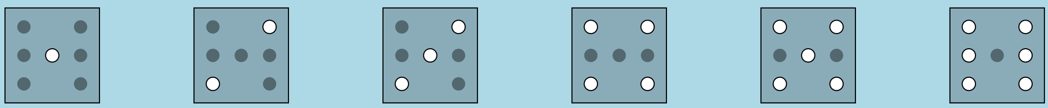
Ha n kezdő számjegye 3, 4 vagy 5, akkor a háromszorosa már állhat eggyel több számjegyből, vagyis megjelenhet az 1-es kezdő számjegyként az n és $3 \cdot n$ számok között valahol, de a 2-es már nem, hiszen a legnagyobb 5-össel kezdődő szám háromszorosa is még 1-essel kezdődik. Ezekben az esetekben a 2-es nem szerepelhet a többszörösök első számjegyei között.

Ha n első számjegye 6, 7, 8 vagy 9, akkor szerepelhet a 2 is $3 \cdot n$ kezdő számjegyeként, de a 3 már nem (a 4 és az 5 sem). Ezekben az esetekben tehát n és $3 \cdot n$ között egy olyan sem lesz, ami 3-mal, 4-gyel vagy 5-tel kezdődne.

Ezzel beláttuk, hogy bármilyen (pozitív egész) számot mond is Zalán anyukája, a kapott szorzatok között nem fordulhat elő mind a 9 féle kezdőszámjegy.

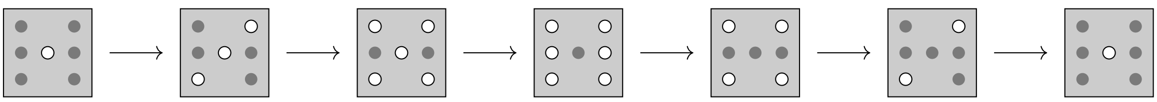
6. osztály, 2. nap **Országos döntő**

1. Egy dobókocka-szimulátor hét kis lámpa segítségével jeleníti meg a számokat az ábrán látható módon. Legkevesebb hány lámpakapcsolásra van szükség ahhoz, hogy az egyesből indulva az összes szám megjelenjen valamilyen sorrendben, majd újra az egyest lássuk?



Ha kezdetben az 1-esnek megfelelően csak a középső lámpa világít, majd valamikor elérjük a 6-ost, ahol csak a középső lámpa nem világít, akkor ehhez mind a hét lámpát legalább egyszer kell kapcsolni. Ugyanígy mind a hét lámpát kell kapcsolni legalább egyszer, míg a 6-os állásból visszatérünk az 1-esbe. Ez azt jelenti, hogy biztosan szükségünk lesz legalább 14 kapcsolásra.

Megmutatjuk, hogy lehetséges is ennyivel. Például az alábbi sorrend nem igényel 14-nél több kapcsolást.



2. Egy szabályos 12-szög kerületén pirossal megjelöltem 2024 pontot úgy, hogy minden oldalán ugyanannyi piros pont van. A 12-szögnek hány csúcsát jelölhettem meg pirossal?

Számoljuk össze külön-külön mind a 12 oldalra, hogy hány piros pont van rajta, majd ezt a 12 számot adjuk össze, ezt az összeget nevezzük S-nek.

Mivel mind a 12 oldalon ugyanannyi pont van, így persze ugyanazt a számot adjuk össze 12-szer, tehát S osztható 12-vel.

Így minden piros pontot egyszer számoltunk meg, kivéve a csúcsokba eső piros pontokat, amelyeket két oldalnál is megszámoltunk.

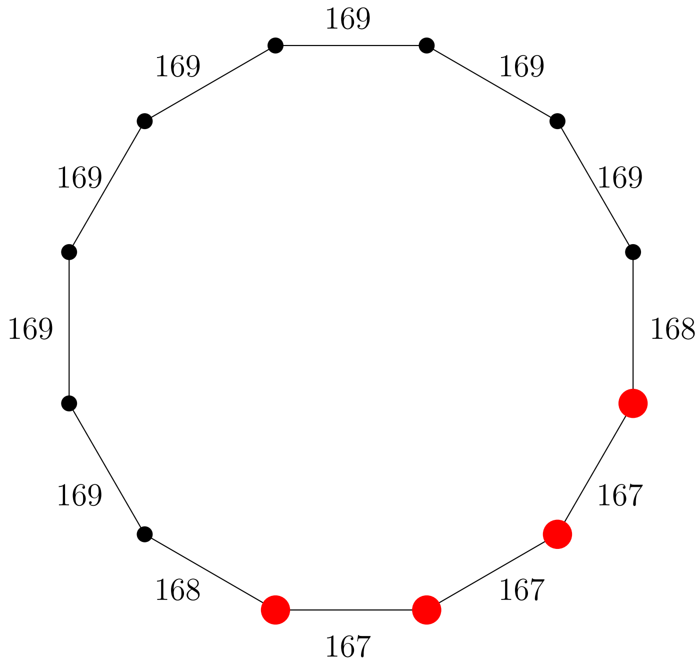
Azaz S éppen annyival több 2024-nél, mint ahány pirossal megjelölt csúcs van.

Mivel összesen 12 csúcs van, ezért S legfeljebb 2036 lehet.

Mint korábban megállapítottuk, S-nek oszthatónak kell lennie 12-vel, márpedig a $2024, 2025, \ldots, 2036$ számok közt egyetlen 12-vel osztható van, a 2028. Tehát S csak 2028 lehet, ami 4-gyel több a 2024-nél.

Tehát biztos, hogy 4 csúcsot jelöltem meg pirossal.

Konstrukció, amelyben 4 csúcs piros, és a számok azt jelzik, hogy az adott oldal belsejében hány piros pont van:



3. Egy 3×3-as táblázatba beírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat, mindegyik számot pontosan egy mezőbe. Egy mezőt **kerek**nek nevezünk, ha a vele élszomszédos mezőkre írt számok összege 10.
Legfeljebb hány kerek mező lehet a táblázatban?

Jelöljük betűkkel a négyzetbe írt számokat az alábbi módon, és színezzük is meg a mezőket.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A és E nem lehet egyszerre kerek, mert akkor $B + D$ és $B + D + F + H$ is 10 lenne, vagyis $F + H = 0$ lenne, ami lehetetlen. Ugyanígy E és G sem lehet kerek egyszerre.

A és G sem lehet kerek egyszerre, mert akkor $B + D$ és $D + H$ is 10 lenne, amiből következik, hogy $B = H$, ami szintén lehetetlen. (Így a három sárga mezőn álló szám közül legfeljebb egy lehet kerek.)

Ugyanígy kapjuk, hogy C és I (a két fehér mezőn álló szám) sem lehet kerek egyszerre.

Ha B és F (a két piros mezőn lévő szám) is kerek lenne, akkor $A + C + E$ és $C + E + I$ is 10 lenne, vagyis A és I egyenlő lenne, ami lehetetlen. Hasonlóan kapjuk, hogy D és H (a két kék mezőn lévő szám) sem lehet kerek egyszerre.

Ezzel beláttuk, hogy az azonos színnel jelölt számok közül legfeljebb egy lehet kerek. Mivel négy színt használtunk, ezért legfeljebb 4 kerek szám lehet a táblázatban.

Az pedig elérhető, hogy 4 mező legyen kerek:

0	2	1
8	4	**3**
6	7	**5**

Megjegyzés. Hogyan lehet megtalálni a konstrukciót?

Látható, hogy ha A kerek, akkor C nem lehet az, így I-nek kellene kereknek lennie. Ugyanígy, ha D kerek, akkor B nem lehet kerek, csak F. Próbáljuk elérni, hogy ez a 4 mező (A, D, F, I) legyen kerek.

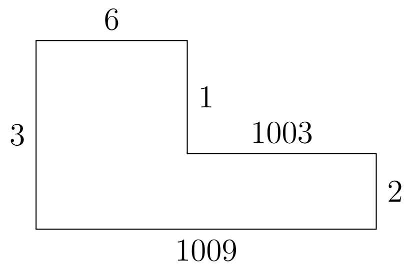
Írjuk fel a kerek mezők szomszédait:

$$(B + D) + (F + H) + (A + E + G) + (C + E + I) = 10 + 10 + 10 + 10 = 40.$$

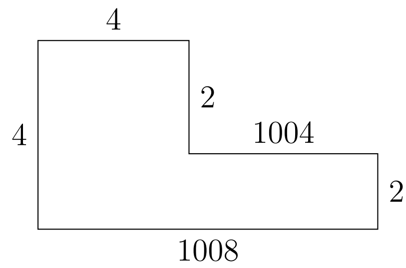
Ebben az összegben minden szám 1-szer szerepel az E kivételével, ami viszont kétszer. A táblázatban a számok összege 36, így $E = 40 - 36 = 4$. Vagyis $A + G = C + I = 6$. Ez pedig a megmaradó számokból csak a 0-6-ra és az 1-5-re teljesül. Ezután a maradék számokból is tudunk két párt képezni, amiknek az összege 10. (A 2-8 és a 3-7.)

4. Van-e olyan hatszög, amelynek szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, mindegyik oldala milliméterben mérve egész hosszúságú, a kerülete 2024 mm, a területe pedig 2024 mm^2?

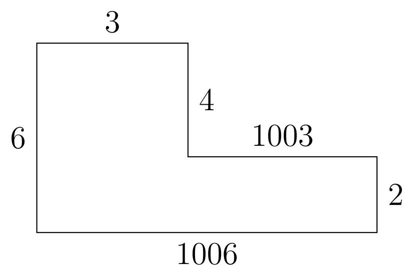
Van. Az alábbi hatszögek bármelyike megfelelő. (Az ábrákon az oldalhosszakat milliméterben adtuk meg.)



$K = 2024$ mm
$T = 3027 - 1003 = 2024$ mm^2

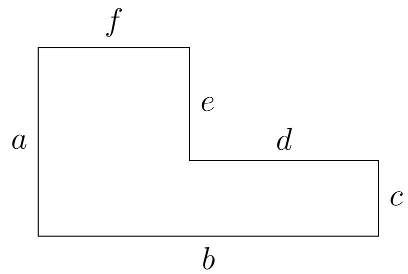


$K = 2024$ mm
$T = 4032 - 2008 = 2024$ mm^2



$K = 2024$ mm
$T = 6036 - 4012 = 2024$ mm^2

Megjegyzés. Nem nehéz meggondolni, hogy ha egy hatszög szomszédos oldalai merőlegesek, az lényegében csak ilyen szerkezetű lehet:



Az a, b, c, d, e, f oldalhosszakra teljesülnie kell az $a = c + e$ és $b = d + f$ egyenlőségeknek.

A hatszög kerülete $K = a + b + c + d + e + f = 2a + 2b = 2(a + b)$.

A hatszög területe pedig egyszerűen felírható $T = ab - de$ alakban.

Elegendő tehát találnunk olyan $a > e$ és $b > d$ pozitív egészeket, amelyekre

$$a + b = 1012 \qquad \text{és} \qquad ab - de = 2024.$$

Megmutatható, hogy ezeknek a feltételeknek csak a fenti három megoldás tesz eleget.

7. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Jelölje ,,A” azoknak a négyjegyű számoknak a számát, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám összegeként. Legyen ,,B” azoknak a tízjegyű számoknak a száma, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám szorzataként.
Melyik a nagyobb, ,,A” vagy ,,B”?

A vizsgált négyjegyű számokból van több, azaz

$$A > B.$$

Ennek belátásához kiszámítjuk A pontos értékét, majd belátjuk, hogy B ennél kevesebb.

Egyrészt $332+333+334=999$ még háromjegyű, de $333+334+335=1002$ már négyjegyű. Másrészt $3332+3333+3334=9999$ még négyjegyű, de $3333+3334+3335=10\,002$ már ötjegyű.

Tehát pontosan akkor lesz három egymást követő pozitív egész szám összege négyjegyű, ha a legkisebb összeadandó legalább 333 de legfeljebb 3332.

Ilyen egész számból $3332-333+1=3000$ db van, tehát $A=3000$.

Most becsüljük meg B-t. A legkisebb alkalmas szorzatot keresve megállapíthatjuk, hogy: $999\cdot 1000\cdot 1001=999\,999\,000$ még kilencjegyű, de $1000\cdot 1001\cdot 1002=1\,003\,002\,000$ már tízjegyű.

Ha $B\ge A=3000$ lenne, akkor a $3999\cdot 4000\cdot 4001$ szorzatnak még tízjegyűnek kellene lennie (itt $3999=1000+3000-1$, így kaptuk ezt a számhármast). Azonban

$$3999\cdot 4000\cdot 4001 > 3000\cdot 3000\cdot 3000 = 27\,000\,000\,000,$$

tehát a $3999\cdot 4000\cdot 4001$ szorzat (legalább) 11-jegyű.

Ezzel beláttuk, hogy $A > B$.

Megjegyzés. Számológéppel (vagy sok türelemmel) meghatározható a legnagyobb alkalmas szorzat is: $2153\cdot 2154\cdot 2155 = 9\ 993\ 946\ 110$ még tízjegyű; míg $2154\cdot 2155\cdot 2156 = 10\ 007\ 871\ 720$ már 11-jegyű. (Segíthet a $\sqrt[3]{10}\approx 2{,}1544$ közelítő érték.) Tehát $B = 2153-1000+1=2154$.

2. Egy táblára Elemér felírt az $1,2,3,\ldots,2023$ számok közül néhányat. Minden szám legfeljebb egyszer szerepelt a táblán. Tudjuk, hogy a táblán lévő számok közül akárhányat választunk ki, a kiválasztott számok összege soha nem lesz pontosan 2024. Legfeljebb hány számot írhatott fel Elemér a táblára?

Vegyük a következő számokat: $1012, 1013, 1014, \ldots, 2022, 2023$. Ha ezek a számok vannak a táblán, akkor nincs olyan összeg, amely 2024-et adna, hiszen az elképzelhető legkisebb összeg is már nagyobb 2024-nél: $1012+1013=2025$.

Ez 1012 darab szám, tehát ennyit felírhatott Elemér a táblára.

Lássuk be, hogy 1012 számnál többet nem írhatott fel. Tekintsük az alábbi csoportokat:

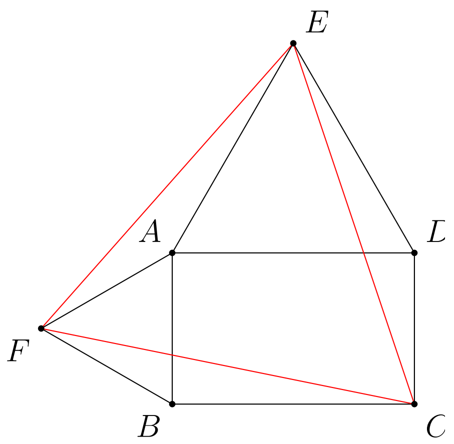
$$(1,2023),(2,2022),(3,2021),\ldots,(1011,1013),(1012).$$

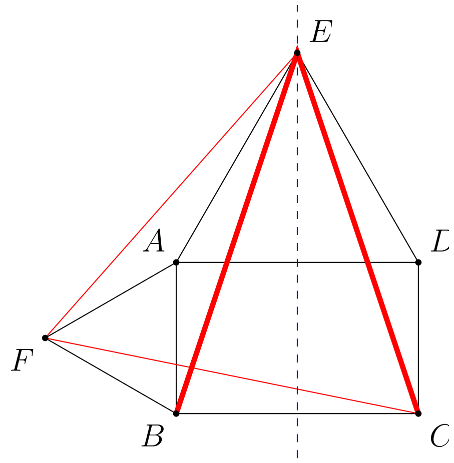
(Egy kivételével minden csoportban két szám van, és minden szám benne van pontosan egy csoportban.)

Ez összesen 1012 csoport. Ha tehát a táblán 1012-nél több szám lenne, akkor legalább az egyik csoportból két szám is a táblán lenne a skatulyaelv miatt. Ez azonban lehetetlen, hiszen ha egy csoportból veszünk két számot, akkor azok összege éppen 2024.

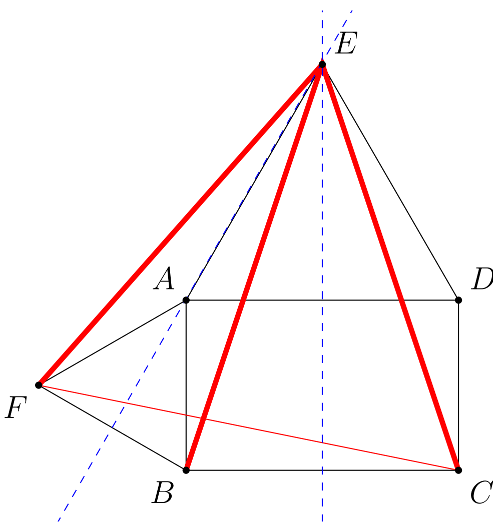
3. Az $ABCD$ téglalap AB és AD oldalára kifelé megrajzoljuk az ABF és ADE szabályos háromszögeket. Bizonyítsd be, hogy a CEF háromszög szabályos.

Első megoldás. Készítsünk ábrát.





A BC szakasz felezőmerőlegese egyben az AD felezőmerőlegese is, ezért átmegy az E ponton. Ezért $BE = CE$, hiszen ez a két szakasz egymás képe a fenti felezőmerőlegesre tükrözve.



Másrészt vegyük észre, hogy FB felezőmerőlegese és az AE egyenes egybeesik.
Ezt például így láthatjuk be: Legyen FB felezőpontja G. Ekkor az ABF szabályos háromszögben az AG egyszerre felezőmerőleges és szögfelező, ezért $GAB\sphericalangle = 30°$. Világos, hogy $BAD\sphericalangle = 90°$ és $DAE\sphericalangle = 60°$, tehát:

$$\begin{aligned} GAE\sphericalangle &= GAB\sphericalangle + BAD\sphericalangle + DAE\sphericalangle \\ &= 30° + 90° + 60° = 180°. \end{aligned}$$

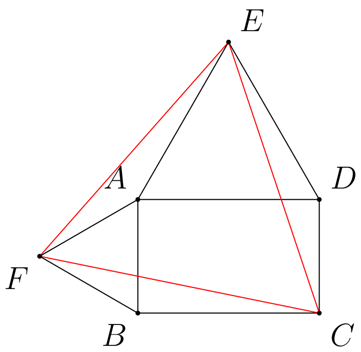
Tehát a GA és az AE szakasz egyenesszöget zár be, így tartóegyeneseik egybeesnek.
Ebből az következik, hogy $EF = EB$, hiszen egymás képei az AE egyenesre tükrözve.

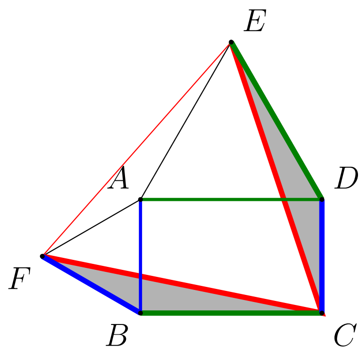
Azt kaptuk tehát, hogy $EC = EB = EF$, amiből nekünk az a fontos, hogy $EC = EF$.

Ugyanilyen módszerrel belátható, hogy $FC = FD$ (ehhez az AB felezőmerőlegesére tükrözünk), illetve $FD = FE$ (ehhez az FA egyenesre – egyben DE felezőmerőlegesére – tükrözünk). Következésképpen $FC = FE$.

Összefoglalva: a CEF háromszögben $EC = FE = FC$, tehát valóban szabályos.

Második megoldás. Készítsünk ábrát.





Vegyük észre, hogy FBC és CDE háromszögek egybevágók, hiszen

$$BC = AD = DE, \text{ illetve } FB = BA = CD;$$

a két megegyező oldal által bezárt szög pedig:

$$CBF\sphericalangle = CBA\sphericalangle + ABF\sphericalangle = 90^\circ + 60^\circ = ADC\sphericalangle + EDA\sphericalangle = EDC\sphericalangle.$$

Következésképpen $FC = CE$ (azaz CEF egyenlő szárú).

Elegendő belátnunk, hogy $ECF\sphericalangle = 60^\circ$, ebből következik, hogy FCE háromszög szabályos.

Világos, hogy $ECF\sphericalangle = DCB\sphericalangle - (DCE\sphericalangle + FCB\sphericalangle)$.

Az FBC és CDE háromszögek egybevágósága miatt $DCE\sphericalangle = BFC\sphericalangle$, azaz

$$DCE\sphericalangle + FCB\sphericalangle = BFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle = 30^\circ,$$

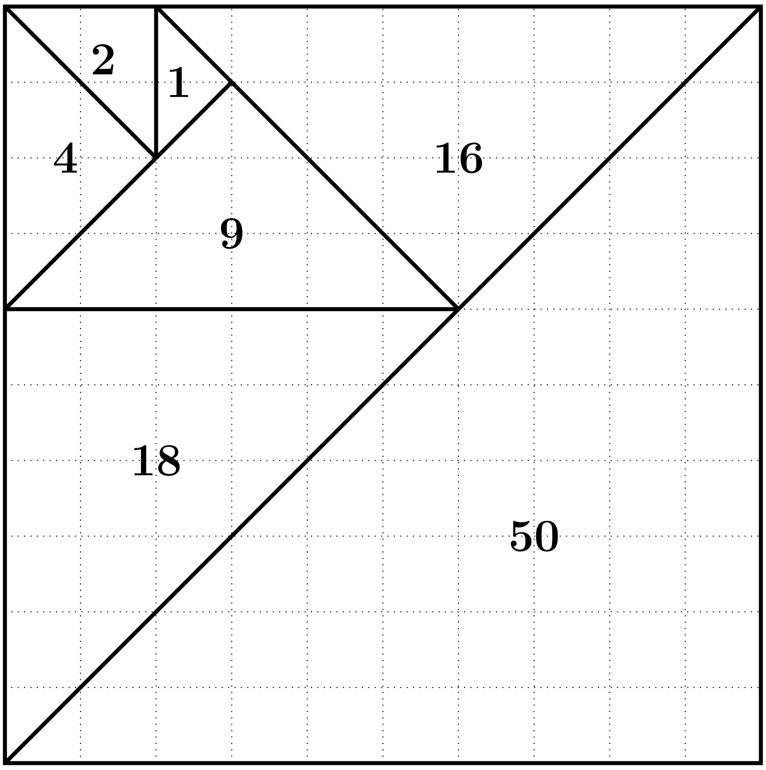
hiszen $BFC\sphericalangle$ és $FCB\sphericalangle$ két belső szöge az FBC háromszögnek, melynek harmadik belső szögéről ($CBF\sphericalangle$) már megállapítottuk, hogy 150°.

Összegezve a fentieket éppen azt kapjuk, amit szerettünk volna belátni:

$$ECF\sphericalangle = DCB\sphericalangle - (BFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

4. Ossz fel egy 10 egység oldalhosszúságú négyzetet hét darab egyenlő szárú, derékszögű háromszögre, amelyek területe növekvő sorrendben: 1, 2, 4, 9, 16, 18, 50 területegység.
A teljes pontszám eléréséhez elengendő megadni egy olyan ábrát, amelyről a felosztás egyértelműen leolvasható. Az ábrán jelezd azt is, hogy melyik háromszög területe mekkora. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes felosztás megtalálását.

A helyes felosztás:



Megjegyzés. Az 50 területű háromszög az egész négyzet területének felét fedi le – ez csak úgy lehet, ha a négyzet egyik átlója megegyezik az átfogójával.

A 2, 18 és 50 területű háromszögek befogói egész hosszúságúak, rendre: 2, 6, 10.

Az 1, 4, 9 és 16 területű háromszögeknek viszont az átfogói lesznek egész hosszúságúak, rendre: 2, 4, 6 és 8.

Ebből megsejthetjük, hogy ha egy a 10×10-es négyzetünket egy négyzetrácson helyezzük el, akkor a jó felosztásban a 2, 18 és 50 területű háromszögeknek a befogói lesznek párhuzamosak a rácsvonalakkal; míg a többi darabnál az átfogó lesz valamelyik rácsvonallal párhuzamos.

5. Egy kerasztal körül különböző életkorú emberek ülnek és a következő játékot játsszák: valamelyikük feláll, a két szomszédja egymással helyet cserél, majd az álló játékos visszaül a helyére.
Azt szeretnék elérni, hogy mindenkinek a jobb oldalán nála idősebb ember üljön, kivéve a legidősebbet, akitől jobbra a legfiatalabb foglaljon helyet.
Igaz-e, hogy el tudják érni a céljukat, akármilyen sorrendben is ültek le az elején, ha

a) 10 b) 11

ember ült kezdetben az asztal körül?

a) Számozzuk meg sorban a székeket 1-től 10-ig. Minden ember, aki átül valamelyik másik helyre, akkor 2-vel kisebb vagy nagyobb sorszámú helyre (vagy ha átlépi az 1-es és 10-es szék közti vonalat, akkor 8-cal kisebb vagy nagyobb sorszámú helyre) fog átülni. Mivel a hely sorszáma mindig páros sokkal változik, így aki kezdetben páros sorszámú széken ült, az végig páros sorszámún fog, aki kezdetben páratlanon, az végig páratlanon fog ülni.

   Ha kezdetben a legidősebb és a legfiatalabb is páros sorszámú székre ült, akkor ők végig páros széken lesznek, vagyis soha nem tudnak egymás mellé ülni, így ekkor nem tudják elérni a céljukat.

b) Számozzuk meg sorban a székeket 1-től 11-ig. Minden ember, aki átül valamelyik másik helyre, akkor 2-vel kisebb vagy nagyobb sorszámú helyre (vagy ha átlépi az 1-es és 11-es szék közti vonalat, akkor 9-cel kisebb vagy nagyobb sorszámú helyre) fog átülni.

   Rendezzük át a székeket a következő sorrendbe: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10. Megfigyelhető, hogy ebben a sorrendben pontosan azok a székpárok vannak egymás mellett, amik közt az előző elrendezés szerint lehetett helyet cserélni. Vagyis ha tartjuk az előző elrendezés szerinti cserélgetések szabályait, akkor most a szomszédos székek közti emberek tudnak majd helyet cserélni.

   Elsőként cseréljük meg páronként az embereket úgy, hogy a legfiatalabb kerüljön az 1-es székre. Ezután az 1-es széket nem használva cseréljük a 3-as székre a harmadik legfiatalabb embert, majd az 5-ös székre az ötödik legfiatalabbat, és így tovább, minden székre cseréljük be az adott sorszámnak megfelelő korú embert.

   Ha mindenki a helyére került, akkor a székeket az eredeti sorrend szerint visszarendezve a feltételeknek megfelelő sorrendet fogunk kapni, vagyis ekkor minden esetben el tudják érni a céljukat.

1. Anna, Bea, Cili és Dóra egy faluban laknak, mindegyiküknek egy téglalap alakú kertje van. A négy kert szélessége 12, 14, 16, illetve 18 méter valamilyen sorrendben, hosszuk pedig 40, 50, 60, illetve 70 méter valamilyen sorrendben. A lányok az alábbi **igaz** állításokat mondták a kertjükről:

Anna: Az én kertem szélesebb, mint Dóra kertje.
Bea: Az én kertem területe kevesebb, mint 1000 m^2.
Cili: A kertem területe ugyanakkora, mint Dóra kertjének területe.
Dóra: Bea kertje hosszabb, mint az én kertem.

Add meg, hogy kinek a kertje milyen széles és milyen hosszú.

Nézzük meg, hogy milyen méretűek lehetnek a kertek:

	12 m	14 m	16 m	18 m
40 m	480 m^2	560 m^2	640 m^2	720 m^2
50 m	600 m^2	700 m^2	800 m^2	900 m^2
60 m	720 m^2	840 m^2	960 m^2	1080 m^2
70 m	840 m^2	980 m^2	1120 m^2	1260 m^2

A lehetséges méretek közül csak a 720 m^2 és a 840 m^2 szerepel kétszer.

Ha Cilinek és Dórának 840 m^2-es a kertjük, akkor Dóra kertjének a hossza 60 vagy 70 méter, Bea kertjének hossza pedig 40 vagy 50 méter, így Dóra állítása nem lehet igaz.

Így csak az lehet, hogy Cili és Dóra kertje is 720 m^2. Vagyis egyikük kertje 40 méter hosszú és 18 méter széles, míg a másik kertje 60 méter hosszú és 12 méter széles.

Mivel Anna kertje szélesebb Dóráénál, így Dóra kertje a 60 méter hosszú és 12 méter széles, Cili kertje pedig 40 méter hosszú és 18 méter széles.

Mivel Bea kertje hosszabb Dóráénál, így az ő kertje 70 méter hosszú.

Mivel Bea kertje kisebb, mint 1000 m^2, így az ő kertje 14 méter széles.

Kizárásos alapon Anna kertje lesz 50 méter hosszú és 16 méter széles.

2. Szilvi felírt egy pozitív egész számot a papírjára, majd felírta a 3-szorosát is. Azt vette észre, hogy a kisebb szám jegyeinek összege éppen 3-szor akkora, mint a nagyobb szám jegyeinek az összege.

a) Bizonyítsd be, hogy a kisebbik szám osztható 9-cel.

b) Mutass példát ilyen számpárra.

A nagyobb szám osztható 3-mal, így számjegyeinek összege is osztható 3-mal.

Ennek háromszorosa így osztható lesz 9-cel.

Ez éppen a kisebb szám jegyeinek összege, tehát ez is osztható 9-cel.

Így a kisebb szám is osztható 9-cel.

Ilyen számpárra sok példa van. Néhány ezek közül: $(6777, 20331)$, $(26667, 80001)$, $(7037037; 21111111)$.

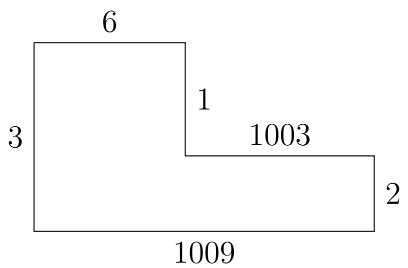
Megjegyzés. Hogyan lehet egy ilyen számpárt találni?

A nagyobb szám is osztható 9-cel, azaz a számjegyek összege legalább kilenc, így a kisebb szám számjegyeinek összege legalább 27. Próbáljuk meg elérni, hogy a nagyobb szám számjegyeinek összege 9, a kisebbé 27 legyen. Keressünk olyan számokat, aminél a számjegyek összege sokat csökken, ha megszorozzuk hárommal.

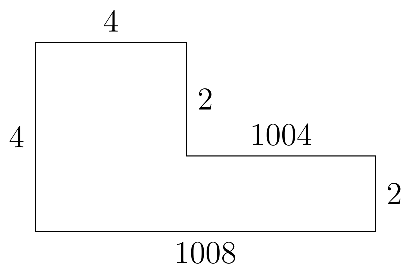
Egyjegyű számok közül a 7 ilyen, mivel a háromszorosa 21. A szám végén az 1-es mindenképpen megmarad, de a tízesek helyén a 2-es 0-vá alakítható, ha egy 6-ost írunk a 7-es elé, mivel a 67 háromszorosa 201. Hasonló módon írjunk még két 6-os a szám elejére, ekkor a 6667 háromszorosa 20001. Ahhoz, hogy 27 legyen az összeg, még egy 2-est kell a szám elejére írni, és ekkor a szám háromszorosa 80001, aminek a számjegyeinek összege 9. (Ez itt tűnhet szerencsének, hogy pont 9 lett az összeg, de az itt segített, hogy a szám 9-cel osztható, így a számjegyek összege 9 vagy 18 lehetett, viszont a 18-tól még messze voltunk, így várható volt, hogy a 9-et fogjuk megkapni.)

3. Van-e olyan hatszög, amelynek szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, mindegyik oldala milliméterben mérve egész hosszúságú, a kerülete 2024 mm, a területe pedig 2024 mm^2?

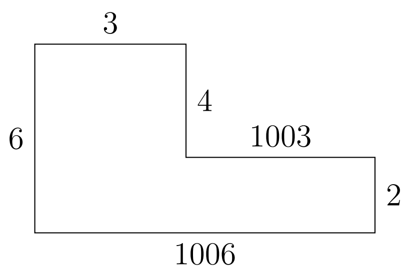
Van. Az alábbi hatszögek bármelyike megfelelő. (Az ábrákon az oldalhosszakat milliméterben adtuk meg.)



$K = 2024$ mm
$T = 3027 - 1003 = 2024$ mm^2

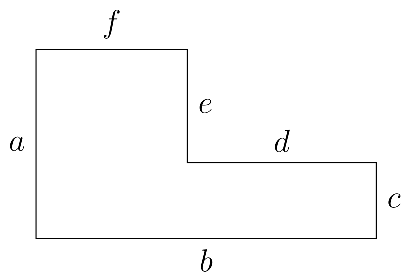


$K = 2024$ mm
$T = 4032 - 2008 = 2024$ mm^2



$K = 2024$ mm
$T = 6036 - 4012 = 2024$ mm^2

Megjegyzés. Nem nehéz meggondolni, hogy ha egy hatszög szomszédos oldalai merőlegesek, az lényegében csak ilyen szerkezetű lehet:



Az a, b, c, d, e, f oldalhosszakra teljesülnie kell az $a = c + e$ és $b = d + f$ egyenlőségeknek.

A hatszög kerülete $K = a + b + c + d + e + f = 2a + 2b = 2(a + b)$.

A hatszög területe pedig egyszerűen felírható $T = ab - de$ alakban.

Elegendő tehát találnunk olyan $a > e$ és $b > d$ pozitív egészeket, amelyekre

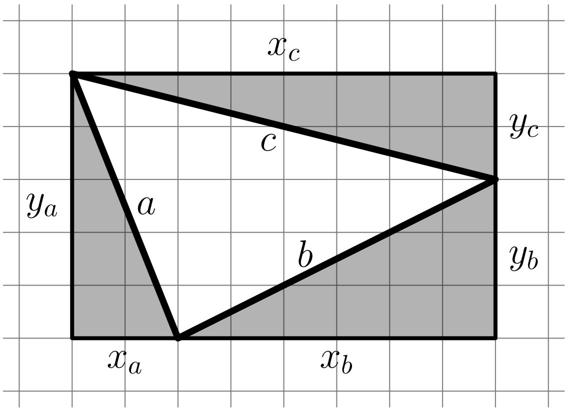
$$a + b = 1012 \quad \text{és} \quad ab - de = 2024.$$

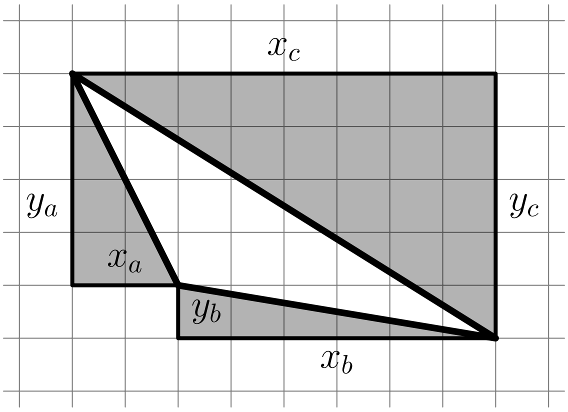
Megmutatható, hogy ezeknek a feltételeknek csak a fenti három megoldás tesz eleget.

4. Egy négyzetrácsos papírra rajzoltunk egy háromszöget, amelynek minden csúcsa rácspont. A háromszög területe egész számú rácsnégyzet területével egyezik meg. Bizonyítsd be, hogy van olyan oldala a háromszögnek, amelynek a felezőpontja is rácspont.

A megoldás során a rácsvonalakkal párhuzamos egyeneseket vízszintesnek, illetve függőlegesnek nevezzük. A hosszúságokat és a területeket minden esetben a négyzetrács egységei szerint mérjük.

A háromszög mindegyik oldalára kifelé rajzoljunk egy olyan derékszögű háromszöget, amelyiknek befogói párhuzamosak a négyzetrács vonalaival. Ezeket a háromszögeket színezzük szürkére.





Az a oldalra rajzolt háromszög vízszintes befogójának hosszát jelölje x_a, függőleges befogójának hosszát y_a; hasonlóan definiáljuk x_b, y_b, x_c, y_c értékeket. (Ha a háromszög valamelyik oldala párhuzamos a rácsvonalakkal, akkor tekintsük úgy, hogy a háromszög egyik befogója és így a háromszög területe is 0. Ha pl. a vízszintes, akkor x_a megegyezik a hosszával, míg $y_a = 0$.)

A befogók hosszának összege egy rácsnégyzetekből álló sokszög kerületét adja, amely biztosan páros szám. (A sokszög lehet téglalap vagy hatszög.) Így az x_a+y_a, x_b+y_b, x_c+y_c összegek közül vagy egy páros és kettő páratlan, vagy mind a három páros.

Ha a páros összegek közül valamelyiket két páros szám ad, akkor a megfelelő oldal felezőpontja rácspont, így készen vagyunk. (Például ha x_a és y_a is páros, akkor az a oldal felezőpontja rácspont.)

Ha minden páros összeget két páratlan szám ad, akkor ezek szorzata is páratlan. Ezzel szemben ha két egész szám összege páratlan, akkor a szorzatuk páros. Tehát az x_ay_a, x_by_b, x_cy_c szorzatok közül egy páratlan és kettő páros, vagy mind a három páratlan. Így az

$$\frac{x_ay_a+x_by_b+x_cy_c}{2}=\frac{x_ay_a}{2}+\frac{x_by_b}{2}+\frac{x_cy_c}{2}$$

mennyiség egy páratlan szám fele. Ez éppen a derékszögű háromszögek területének összege, amely tehát ebben az esetben nem egész szám.

Mivel a négy háromszög egyesítéseként kapott sokszög egész számú rácsnégyzetből áll, a területe egész. Az eredeti háromszög területe is egész, tehát a derékszögű háromszögek összterülete is egész. Így az előző eset nem állhat fenn. Ezzel az állítást beláttuk.

8. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Amikor a kapitány annyi idős volt, mint most a hajója, akkor a hajó 23 éves volt. Amikor a hajó annyi idős lesz, mint most a kapitány, akkor a kapitány 68 éves lesz. Hány éves most a kapitány?

Első megoldás. A korábbi időpont és a mostani között ugyanannyi idő telik el, mint a mostani és a későbbi között: ez az időtartam megegyezik a kapitány és a hajó életkorának különbségével.

Így ha a hajó korához a korábbi időpontban (23 év) hozzáadjuk ennek a különbségnek a háromszorosát, akkor megkapjuk a kapitány korát a későbbi időpontban (68 év). Ezért ez a különbség $(68-23):3=15$ év.

Tehát régen a kapitány $23+15=38$ éves volt (ugyanennyi most a hajó), most pedig $38+15=53$ éves.

Második megoldás. Jelöljük a kapitány életkorát K-val, a hajó életkorát H-val.

Az első mondat alapján, a kapitány $K-H$ éve volt annyi idős, mint a hajója, tehát a hajó $K-H$ éve volt 23 éves. Ezt úgy írharjuk fel, hogy $H-(K-H)=23$, vagyis $2H-K=23$.

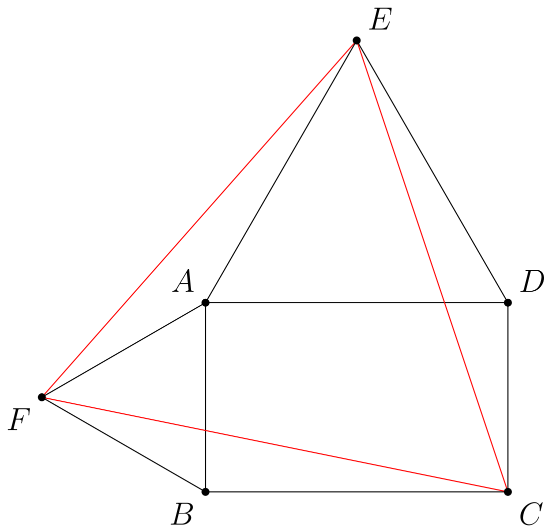
A második mondat alapján, a hajó $K-H$ év múlva lesz annyi idős, mint a kapitány, így a kapitány $K-H$ év múlva lesz 68 éves. Ezt úgy írhatjuk fel, hogy $K+(K-H)=68$, azaz $2K-H=68$.

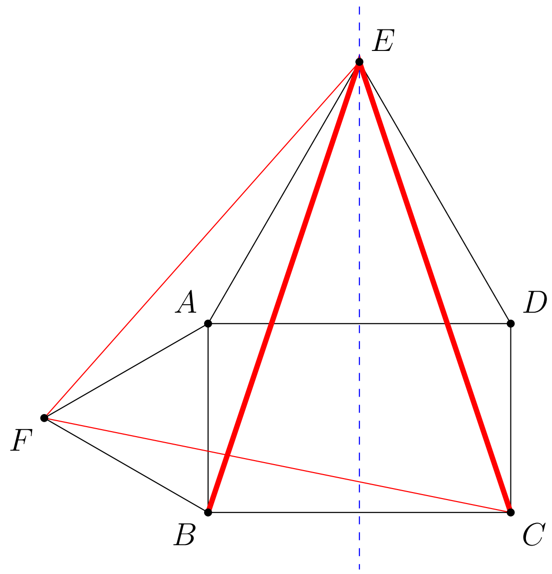
Az első egyenlet átírható úgy, hogy $K=2H-23$. A K-t behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $2(2H-23)-H=68$, azaz $3H=114$, vagyis a hajó 38 éves.

Ezt visszahelyettesítve a $K=2H-23$ egyenletbe megkapjuk, hogy a kapitány 53 éves.

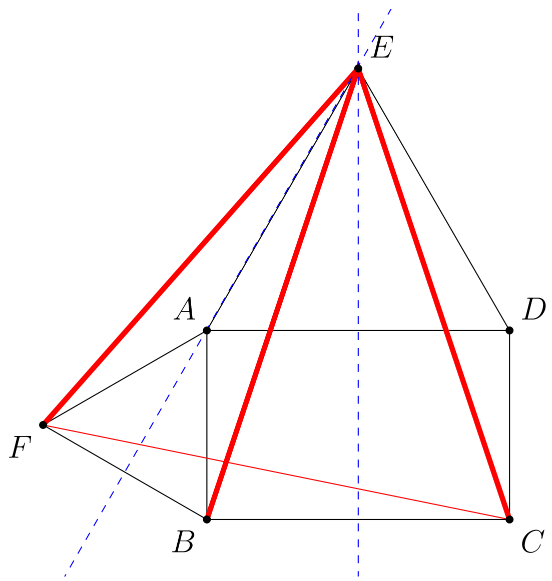
2. Az $ABCD$ téglalap AB és AD oldalára kifelé megrajzoljuk az ABF és ADE szabályos háromszögeket. Bizonyítsd be, hogy a CEF háromszög szabályos.

Első megoldás. Készítsünk ábrát.





A BC szakasz felezőmerőlegese egyben az AD felezőmerőlegese is, ezért átmegy az E ponton. Ezért $BE = CE$, hiszen ez a két szakasz egymás képe a fenti felezőmerőlegesre tükrözve.



Másrészt vegyük észre, hogy FB felezőmerőlegese és az AE egyenes egybeesik.

Ezt például így láthatjuk be:
Legyen FB felezőpontja G. Ekkor az ABF szabályos háromszögben az AG egyszerre felezőmerőleges és szögfelező, ezért $GAB\sphericalangle = 30°$. Világos, hogy $BAD\sphericalangle = 90°$ és $DAE\sphericalangle = 60°$, tehát:

$$\begin{aligned} GAE\sphericalangle &= GAB\sphericalangle + BAD\sphericalangle + DAE\sphericalangle \\ &= 30° + 90° + 60° = 180°. \end{aligned}$$

Tehát a GA és az AE szakasz egyenesszöget zár be, így tartóegyeneseik egybeesnek.

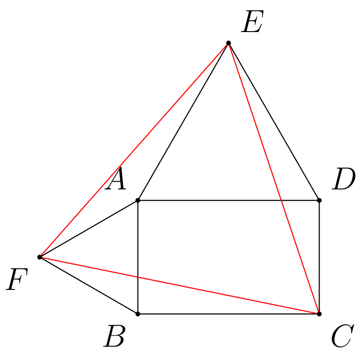
Ebből az következik, hogy $EF = EB$, hiszen egymás képei az AE egyenesre tükrözve.

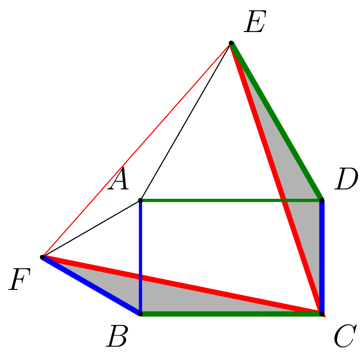
Azt kaptuk tehát, hogy $EC = EB = EF$, amiből nekünk az a fontos, hogy $EC = EF$.

Ugyanilyen módszerrel belátható, hogy $FC = FD$ (ehhez az AB felezőmerőlegesére tükrözünk), illetve $FD = FE$ (ehhez az FA egyenesre – egyben DE felezőmerőlegesére – tükrözünk). Következésképpen $FC = FE$.

Összefoglalva: a CEF háromszögben $EC = FE = FC$, tehát valóban szabályos.

Második megoldás. Készítsünk ábrát.





Vegyük észre, hogy FBC és CDE háromszögek egybevágók, hiszen

$$BC = AD = DE, \text{ illetve } FB = BA = CD;$$

a két megegyező oldal által bezárt szög pedig:

$$CBF\sphericalangle = CBA\sphericalangle + ABF\sphericalangle = 90° + 60° = ADC\sphericalangle + EDA\sphericalangle = EDC\sphericalangle.$$

Következésképpen $FC = CE$ (azaz CEF egyenlő szárú).

Elegendő belátnunk, hogy $ECF\sphericalangle = 60°$, ebből következik, hogy FCE háromszög szabályos.

Világos, hogy $ECF\sphericalangle = DCB\sphericalangle - (DCE\sphericalangle + FCB\sphericalangle)$.

Az FBC és CDE háromszögek egybevágósága miatt $DCE\sphericalangle = BFC\sphericalangle$, azaz

$$DCE\sphericalangle + FCB\sphericalangle = BFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle = 30°,$$

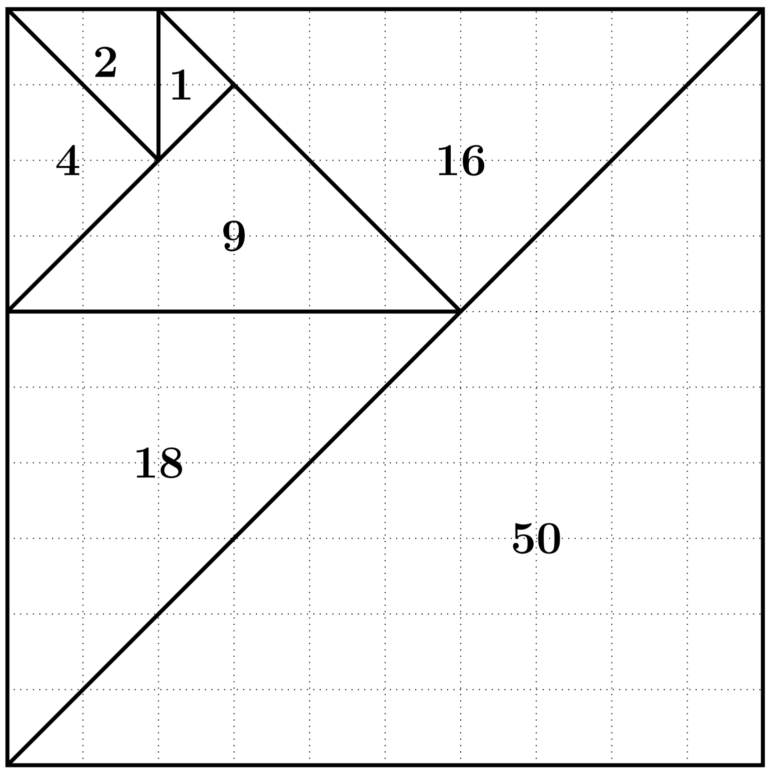
hiszen $BFC\sphericalangle$ és $FCB\sphericalangle$ két belső szöge az FBC háromszögnek, melynek harmadik belső szögéről ($CBF\sphericalangle$) már megállapítottuk, hogy 150°.

Összegezve a fentieket éppen azt kapjuk, amit szerettünk volna belátni:

$$ECF\sphericalangle = DCB\sphericalangle - (BFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle) = 90° - 30° = 60°.$$

3. Ossz fel egy 10 egység oldalhosszúságú négyzetet hét darab egyenlő szárú, derékszögű háromszögre, amelyek területe növekvő sorrendben: 1, 2, 4, 9, 16, 18, 50 területegység.
A teljes pontszám eléréséhez elengendő megadni egy olyan ábrát, amelyről a felosztás egyértelműen leolvasható. Az ábrán jelezd azt is, hogy melyik háromszög területe mekkora. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes felosztás megtalálását.

A helyes felosztás:



Megjegyzés. Az 50 területű háromszög az egész négyzet területének felét fedi le – ez csak úgy lehet, ha a négyzet egyik átlója megegyezik az átfogójával.

A 2, 18 és 50 területű háromszögek befogói egész hosszúságúak, rendre: 2, 6, 10.

Az 1, 4, 9 és 16 területű háromszögeknek viszont az átfogói lesznek egész hosszúságúak, rendre: 2, 4, 6 és 8.

Ebből megsejthetjük, hogy ha egy a 10×10-es négyzetünket egy négyzetrácson helyezzük el, akkor a jó felosztásban a 2, 18 és 50 területű háromszögeknek a befogói lesznek párhuzamosak a rácsvonalakkal; míg a többi darabnál az átfogó lesz valamelyik rácsvonallal párhuzamos.

4. Fióna egy szabályos pénzérmét dobál, amelynek egyik oldala fej (F), a másik pedig írás (I).
Minden dobássorozat után feljegyzi, hogy hány esetben volt FF, FI, IF és II két egymást követő dobás. Ha például a dobássorozata FFIFFFIIIFFI, akkor a feljegyzésében 4 FF, 3 FI, 2 IF és 2 II szerepel.

a) Hány különböző olyan dobássorozat lehetséges, amelynél pontosan 3 FF, 4 FI, 2 IF és 2 II szerepel a feljegyzésében?
b) Hány különböző olyan dobássorozat lehetséges, amelynél pontosan 4 FF, 3 FI, 2 IF és 2 II szerepel a feljegyzésében?

Különbözőnek hívunk két dobássorozatot, ha azokban van olyan sorszámú dobás, ami a két sorozatban eltér.

Első megoldás. a) Első lépésként nézzük meg, hogy hogyan alakulhatnak a sorozatban az FI-k és az IF-k száma. Vegyük észre, hogy ha a sorozatban szerepel az FI, akkor a következő FI csak akkor lehet, ha a kettő között van IF is a sorozatban, mivel az FI után ahhoz, hogy újra FI legyen kell ismét egy F, viszont az első I betűk utáni F-nél lesz majd egy IF is.

Ez alapján, ha vesszük a 4 FI-t, akkor bármely kettő közt kell lennie egy IF-nek, vagyis legalább 3 IF-nek kéne lennie, azaz ilyen dobássorozat nem létezik.

b) A sorozatban 3 FI van. Az előző részből kiindulva kell lennie egy IF-nek az első és második FI, valamint a második és a harmadik FI közt is.

Ezenkívül a sorozatban még FF és II sorozatok vannak, tehát a sorozat az alábbi módon fog kinézni: $\underbrace{F\dots F}_{a\text{ db}}\underbrace{I\dots I}_{b\text{ db}}\underbrace{F\dots F}_{c\text{ db}}\underbrace{I\dots I}_{d\text{ db}}\underbrace{F\dots F}_{e\text{ db}}\underbrace{I\dots I}_{f\text{ db}}$, ahol az azonos betűkből álló blokkok hossza legalább 1.

Ha van egy k hosszú F-ekből álló blokk, akkor abban $k-1$ darab FF pár van. Tehát ahhoz, hogy a három blokkban összesen 4 FF legyen, az kell, hogy $a+c+e=7$ legyen. Erre a következő lehetőségek vannak: 5+1+1 (3 lehetőség), 4+2+1 (6 lehetőség), 3+3+1 (3 lehetőség), 3+2+2 (3 lehetőség), ami összesen 15 lehetőség.

Hasonló módon, ahhoz, hogy két II legyen, a $b+d+f=5$-nek kell lennie. Erre az alábbi lehetőségek vannak: 3+1+1 (3 lehetőség), 2+2+1 (3 lehetőség), ami összesen 6 lehetőség.

Mivel az F- és I-blokkok méretei egymástól függetlenek, így a felbontások minden párosítása egy-egy jó megoldást fog adni, így összesen $15\cdot 6=90$ lehetőség van.

Második megoldás. a) Az FI blokkokban szereplő 4 db F dobáson kívül kell lennie még 3 F-nek, amivel az FF blokkok kezdődnek. Az FI blokkokban szereplő 4 db I dobáson kívül pedig lennie kell még 2 I-nek, amivel az II blokkok végződnek. Ez összesen 13 dobás (7 F és 6 I) lenne, így összesen 12 blokk szerepelne a feljegyzésben, de csak $3+4+2+2=11$ szerepel. Tehát ilyen dobássorozat nem létezik.

b) Most is 11 blokk van a feljegyzésben, így a sorozat 12 dobásból áll.

Az FI blokkokban szereplő 3 db F dobáson kívül kell lennie még 4 F-nek, amivel az FF blokkok kezdődnek. Az FI blokkokban szereplő 3 db I dobáson kívül pedig lennie kell még 2 I-nek, amivel az II blokkok végződnek. Ez 7 db F és 5 db I, így minden dobást megkaptunk, ezért a sorozat F-fel kezdődik és I-vel végződik.

A 7 db F közül az utolsót biztosan, és még két korábbit I követ. Ezeket $\frac{6\cdot 5}{2}=15$-féleképp választhatjuk ki. Az 5 db I közül az első, és még két további előtt F van. Ezeket $\frac{4\cdot 3}{2}=6$-féleképp választhatjuk ki. Ezzel egyértelműen megadtunk egy dobássorozatot, hiszen tudjuk, hogy hányadik F után jönnek I-k, és hányadik I kezd egy újabb I-s blokkot. A dobássorozatok száma tehát $15\cdot 6=90$.

5. Egy katonai ezred 999 katonája körben állva a kör közepe felé néz, az ezredes pedig a kör belsejében sétál körbe, végig az óramutató járásával megegyező irányban haladva. Először megáll egy katonánál, akinek azt mondja: ,,Hátra arc!", mire ez a katona megfordul. Az ezredes ezután elsétál egy katona mellett, majd a következőnek újra ,,Hátra arc!"-ot vezényel, aki szintén megfordul. Ezután két katonát hagy ki, és a következőnek mondja a vezényszót, majd hármat hagy ki, és így tovább, mindig eggyel többet. Így folytatja egész addig, míg 998 katona mellett sétál el, majd utoljára, a 999. alkalommal is ,,Hátra arc!"-ot parancsol a következő katonának.
Hány katona néz kifelé a körből az utolsó ,,Hátra arc!" elhangzása után?

Számozzuk meg a körben lévő embereket 1-től 999-ig, az 1-es legyen az, akinek először parancsol az ezredes. Ekkor a harmadiknak parancsol másodjára, a hatodiknak harmadjára stb.

Vagyis az $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ összeg 999-es maradékának megfelelő sorszámú katona kapja az n. parancsot a megfordulásra. (Kivéve ha az összeg osztható 999-cel, mert akkor a 999-es.)

Vegyük észre, hogy

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n^2+n-k^2-k}{2}=\frac{(n-k)(n+k+1)}{2}.$$

Ha $n+k=998$, akkor $n-k$ is páros, vagyis $\frac{n-k}{2}$ egész. Emiatt azonban $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}$ osztható 999-cel, hiszen ilyenkor $\frac{n-k}{2}$ egész, $n+k+1$ pedig 999. Vagyis az n-edik és k-adik parancs ugyanannak a katonának szól, hiszen ekkor a két összeg 999-es maradéka megegyezik.

Tehát az 1. és 997., a 2. és 996. stb., és a 498. és 500. parancs ugyanannak a katonának szól, vagyis ezek a parancsok együttesen nem fordítanak kifelé katonát.

Marad a 499., 998. és 999. parancs. A 998. és a 999. parancs is ugyanannak a katonának szól, hiszen a végén egy teljes kört tesz meg az ezredes, mielőtt kiadja a 999. parancsot.

Tehát csak az az egy katona néz kifelé, akinek a 499. parancsot adta az ezredes.

8. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Szilvi felírt egy pozitív egész számot a papírjára, majd felírta a 3-szorosát is. Azt vette észre, hogy a kisebb szám jegyeinek összege éppen 3-szor akkora, mint a nagyobb szám jegyeinek az összege.

   a) Bizonyítsd be, hogy a kisebbik szám osztható 9-cel.

   b) Mutass példát ilyen számpárra.

A nagyobb szám osztható 3-mal, így számjegyeinek összege is osztható 3-mal.

Ennek háromszorosa így osztható lesz 9-cel.

Ez éppen a kisebb szám jegyeinek összege, tehát ez is osztható 9-cel.

Így a kisebb szám is osztható 9-cel.

Ilyen számpárra sok példa van. Néhány ezek közül: $(6777, 20331)$, $(26667, 80001)$, $(7037037; 21111111)$.

Megjegyzés. Hogyan lehet egy ilyen számpárt találni?

A nagyobb szám is osztható 9-cel, azaz a számjegyek összege legalább kilenc, így a kisebb szám számjegyeinek összege legalább 27. Próbáljuk meg elérni, hogy a nagyobb szám számjegyeinek összege 9, a kisebbé 27 legyen. Keressünk olyan számokat, aminél a számjegyek összege sokat csökken, ha megszorozzuk hárommal.

Egyjegyű számok közül a 7 ilyen, mivel a háromszorosa 21. A szám végén az 1-es mindenképpen megmarad, de a tízesek helyén a 2-es 0-vá alakítható, ha egy 6-ost írunk a 7-es elé, mivel a 67 háromszorosa 201. Hasonló módon írjunk még két 6-os a szám elejére, ekkor a 6667 háromszorosa 20001. Ahhoz, hogy 27 legyen az összeg, még egy 2-est kell a szám elejére írni, és ekkor a szám háromszorosa 80001, aminek a számjegyeinek összege 9. (Ez itt tűnhet szerencsének, hogy pont 9 lett az összeg, de az itt segített, hogy a szám 9-cel osztható, így a számjegyek összege 9 vagy 18 lehetett, viszont a 18-tól még messze voltunk, így várható volt, hogy a 9-et fogjuk megkapni.)

2. Igaz-e, hogy minden 10-zel nem osztható pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amely ugyanolyan számjeggyel kezdődik, mint amilyennel végződik?

Első megoldás. A 0 minden pozitív egésznek többszöröse, és 0-val kezdődik, 0-val végződik.

*A feladat kitűzésekor a szerzők az alábbi kérdésre gondoltak: igaz-e, hogy minden 10-zel nem osztható pozitív egész számnak van olyan **pozitív** többszöröse, amely ugyanolyan számjeggyel kezdődik, mint amilyennel végződik? Ekkor is igen a válasz, a továbbiakban ezt bizonyítjuk.*

Legyen n egy 10-zel nem osztható szám. Tekintsük az $n, 11n, 21n, 31n, \ldots$ sorozatot. Ennek tagjai mind ugyanarra az $A \neq 0$ számjegyre végződnek.

Legyen k olyan egész, amelyre $10^k > 10n$. Ekkor $A \cdot 10^k$ és $(A+1) \cdot 10^k$ közé esik biztosan egy B tagja a sorozatnak, hiszen a sorozat szomszédos tagjainak különbsége $10n$, viszont $A \cdot 10^k$ és $(A+1) \cdot 10^k$ különbsége 10^k, ami nagyobb $10n$-nél.

Ez a B szám n többszöröse, továbbá első és utolsó jegye is A.

Második megoldás. Legyen n egy tetszőleges pozitív egész szám, amelynek utolsó számjegye nem 0. Az alábbiakban mutatunk egy lehetséges módszert az n egy ilyen többszörösének legyártására.

Jelölje n utolsó számjegyét A, ami a feltevésünk szerint nem 0.

Először keressük meg n egy olyan többszörösét, amely A számjeggyel kezdődik. Legyen továbbá n számjegyeinek száma k, ekkor

$$10^k = \overline{1\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ db}}} > n.$$

Ezért $\overline{A\underbrace{00\ldots00}_{k\text{ db}}}$-től kezdve $\overline{A\underbrace{99\ldots99}_{k\text{ db}}}$-ig (azaz $A\cdot 10^k$-tól kezdve $\left(A\cdot 10^k + 10^k - 1\right)$-ig) találunk több, mint n darab egymást követő számot, melyek mindegyike A-val kezdődik. Ezek között biztosan van legalább egy n-nel osztható, ezt jelölje b.

Tehát b egy A számjeggyel kezdődő, n-nel osztható szám.

Írjunk b végére k darab 0-t, azaz szorozzuk meg 10^k-nal, majd a kapott számhoz adjuk hozzá n-t, így kapjuk a c számot (azaz $c = b\cdot 10^k + n$).

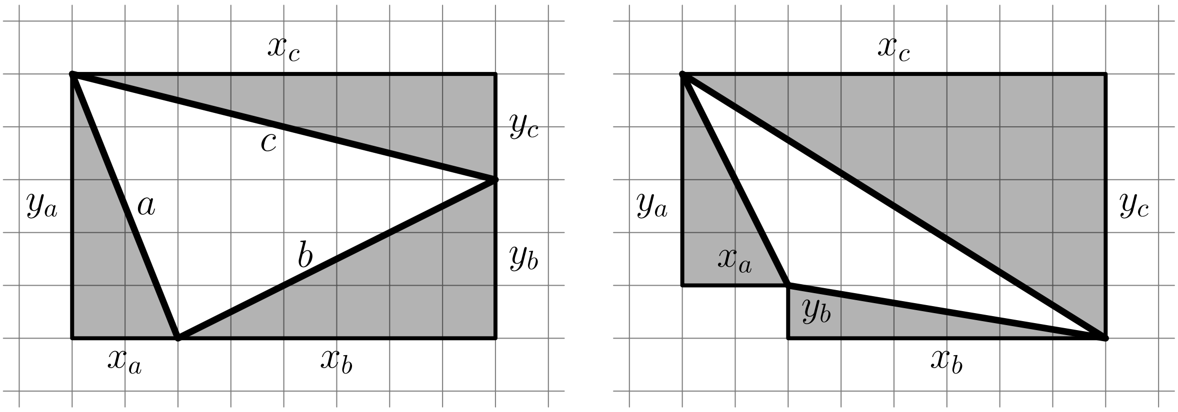
Belátjuk, hogy az így kapott c szám teljesíti a feladatban megfogalmazott elvárásokat.

- c osztható n-nel, hiszen b osztható n-nel,
  és ez megmarad a 0-k végére írásánál és az n hozzáadásánál is.
- c első számjegye A.
  Ugyanis $b\cdot 10^k$ utolsó k számjegye mind 0, ezért a k-jegyű n szám hozzáadása csak az utolsó k számjegyen változtathat. Azaz c első számjegye megegyezik b első számjegyével.
- c utolsó számjegye szintén A, hiszen $b\cdot 10^k$ utolsó számjegye 0,
  ezért c utolsó számjegye megegyezik n utolsó számjegyével.

3. Egy négyzetrácsos papírra rajzoltunk egy háromszöget, amelynek minden csúcsa rácspont. A háromszög területe egész számú rácsnégyzet területével egyezik meg.
Bizonyítsd be, hogy van olyan oldala a háromszögnek, amelynek a felezőpontja is rácspont.

A megoldás során a rácsvonalakkal párhuzamos egyeneseket vízszintesnek, illetve függőlegesnek nevezzük. A hosszúságokat és a területeket minden esetben a négyzetrács egységei szerint mérjük.

A háromszög mindegyik oldalára kifelé rajzoljunk egy olyan derékszögű háromszöget, amelyiknek befogói párhuzamosak a négyzetrács vonalaival. Ezeket a háromszögeket színezzük szürkére.



Az a oldalra rajzolt háromszög vízszintes befogójának hosszát jelölje x_a, függőleges befogójának hosszát y_a; hasonlóan definiáljuk x_b, y_b, x_c, y_c értékeket. (Ha a háromszög valamelyik oldala párhuzamos a rácsvonalakkal, akkor tekintsük úgy, hogy a háromszög egyik befogója és így a háromszög területe is 0. Ha pl. a vízszintes, akkor x_a megegyezik a hosszával, míg $y_a = 0$.)

A befogók hosszának összege egy rácsnégyzetekből álló sokszög kerületét adja, amely biztosan páros szám. (A sokszög lehet téglalap vagy hatszög.) Így az $x_a + y_a$, $x_b + y_b$, $x_c + y_c$ összegek közül vagy egy páros és kettő páratlan, vagy mind a három páros.

Ha a páros összegek közül valamelyiket két páros szám ad, akkor a megfelelő oldal felezőpontja rácspont, így készen vagyunk. (Például ha x_a és y_a is páros, akkor az a oldal felezőpontja rácspont.)

Ha minden páros összeget két páratlan szám ad, akkor ezek szorzata is páratlan. Ezzel szemben ha két egész szám összege páratlan, akkor a szorzatuk páros. Tehát az $x_a y_a$, $x_b y_b$, $x_c y_c$ szorzatok közül egy páratlan és kettő páros, vagy mind a három páratlan. Így az

$$\frac{x_a y_a + x_b y_b + x_c y_c}{2} = \frac{x_a y_a}{2} + \frac{x_b y_b}{2} + \frac{x_c y_c}{2}$$

mennyiség egy páratlan szám fele. Ez éppen a derékszögű háromszögek területének összege, amely tehát ebben az esetben nem egész szám.

Mivel a négy háromszög egyesítéseként kapott sokszög egész számú rácsnégyzetből áll, a területe egész. Az eredeti háromszög területe is egész, tehát a derékszögű háromszögek összterülete is egész. Így az előző eset nem állhat fenn. Ezzel az állítást beláttuk.

4. Egy tornasorban n különböző magasságú ember áll, balról jobbra növekedve. Megkérhetünk négy szomszédos embert, hogy fordítsák meg a sorrendjüket (tehát ha A, B, C, D sorrendben álltak eddig, akkor a művelet után D, C, B, A sorrendben fognak állni).
Elérhető-e ilyen négyes megfordítások egymásutánjával, hogy megint tornasorban legyenek, de most jobbról balra növekedve, ha

a) $n = 9$; b) $n = 10$?

a) Elérhető ilyen cserékkel:

$ABCDE(FGHI) \to ABCD(EIHG)F \to ABC(DGHI)EF \to (ABCI)HGDEF \to$
$I(CBAH)GDEF \to IH(ABCG)DEF \to IHGCB(ADEF) \to IHGC(BFED)A \to$
$IHG(CDEF)BA \to IHGFEDCBA$

b) Nézzük meg, hogy hány olyan emberpár van, aminél a bal oldali ember a magasabb. Kezdetben 0 ilyen pár van, és az a célunk, hogy a végére minden ilyen legyen, azaz $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ ilyen pár legyen.

Egy lépésben 4 ember sorrendje fordul meg, azaz $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ pár cserélődik meg.

Ha a csere előtt a 4 ember 6 párja x esetben magasabb a bal oldali ember, akkor a csere után $6 - x$ esetben lesz az. Látható, hogy ha x páros, akkor $6 - x$ is páros, ha x páratlan, akkor $6 - x$ is páratlan.

Mivel minden lépésben páros sokkal tud változni az ilyen párok száma, így nem érhető el az, hogy a végén páratlan sok ilyen pár legyen.