

Tartalom


XLVII. verseny 2017–2018.	2
Feladatok	2
Megyei forduló	2
Országos döntő	8
Megoldások	20
Megyei forduló	20
Országos döntő	34
XLVIII. verseny 2018–2019.	64
Feladatok	64
Megyei forduló	64
Országos döntő	68
Megoldások	76
Megyei forduló	76
Országos döntő	90
XLIX. verseny 2019–2020.	113
Feladatok	113
Megyei forduló	113
Országos döntő	118
Megoldások	124
Megyei forduló	124
Országos döntő	141
L. verseny 2020–2021.	162
Feladatok	162
Megyei forduló	162
Országos döntő	169
Megoldások	173
Megyei forduló	173
Országos döntő	190

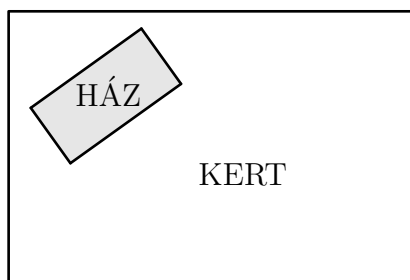
XLVII. verseny 2017–2018.



Feladatok

5. osztály

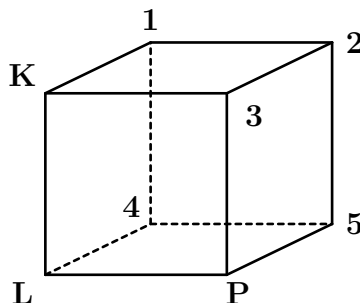
Megyei forduló

1. Egy téglalap alakú kertben egy téglalap alapterületű ház épül az ábrán látható módon. A kert hosszabb oldala a ház hosszabb oldalának 3-szorosa, a kert rövidebb oldala a ház rövidebb oldalának négyszerese. A maradék területet parkosítják. Hányszorosa lesz a parkosított terület a ház területének? 



2. A Noé bárkája című játékban Oroszlán (O), Panda (P), Víziló (V), Zsiráf (Zs), Zebra (Z) és Kenguru (K) utaznak a bárkán egymás mögött egyesével ülve. Minden ülésen kétféleképp ülhetnek: menetirány szerint előre, vagy háttal. Két állat pontosan akkor tud beszélgetni, ha egymás mögött ülnek és egymás felé fordulnak, azaz az előrébb ülő hátrafelé fordul. (Ha nem akar beszélgetni, attól azért ülhet háttal is, de beszélgetni csak egymás felé fordulva lehet.) Tudjuk a következőket:
- 1) Oroszlán az első, és háttal ül;
 - 2) Zebra előrébb ül, mint Panda;
 - 3) Zsiráf és Panda beszélgetnek a bárkában;
 - 4) Víziló előre néz;
 - 5) Víziló a harmadik, és Kenguru után ül.
- Hányféle ülésrend lehetséges? (Két ülésrend különböző, ha legalább egy állat másutt, vagy más irányba nézve ül.) 
3. Zsófi kiszámolta két négyjegyű szám különbségét, és eredményül 2018-at kapott. Ezután összeadta a két négyjegyű számban szereplő nyolc darab számjegyet. Lehet-e az így kapott összeg
- a) 6-nál kevesebb
 - b) 33
 - c) 66? 

4. Egy kocka csúcsait kiszíneztük egy-egy színnel az alábbiak közül: piros, sárga, zöld, kék, fekete, lila. Tudjuk, hogy ha két csúcs azonos színű lett, akkor azokat összeköti a kocka valamelyik éle.



Egy hangya elindult a kocka egyik csúcsából, majd mindig az élek mentén haladva sétált a szomszédos csúcsok között. Az út során ilyen színű csúcsokon ment sorban: kék, lila, piros, zöld, fekete, kék, sárga, lila, piros, sárga, fekete, kék, kék. A kiinduló kék csúcsot **K**-val, a másodiknak érintett lila csúcsot **L**-lel, az utána meglátogatott piros csúcsot **P**-vel jelöltük az ábrán. Hogyan színezhettük ki a többi (számozott) csúcsot? →

5. Pisti és Sárika a következő játékot játsszák: egy 3×3 -as tábla mezőibe felváltva írják be az egész számokat 1-től 9-ig. Sárika célja az, hogy az összes szám beírása után
- a négy sarokmezőben lévő számok összege,
 - a négy oldalmezőben lévő számok összege,
 - az egyik átlóban lévő számok összege, és
 - a másik átlóban lévő számok összege

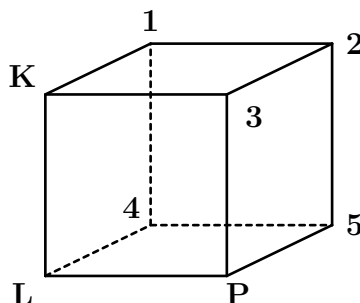
mind ugyanannyi legyen. Pisti célja, hogy ezt megakadályozza, de mivel érzi, hogy Sárika nagyon nehéz célt tűzött ki, annyi engedményt tesz, hogy Sárika döntheti el, melyikük kezdjen. Kitalálhat-e Sárika olyan stratégiát, mellyel bizonyosan legyőzi Pistit? →

6. osztály

Megyei forduló


- Hány olyan 4-jegyű szám van, melyben nincs 0 számjegy, a számjegyek összege 11, és minden számjegye osztható a nála kisebb számjegyekkel? →
- A Noé bárkája című játékban Oroszlán (O), Panda (P), Víziló (V), Zsiráf (Zs), Zebra (Z) és Kenguru (K) utaznak a bárkán egymás mögött egyesével ülve. Minden ülésen kétféleképp ülhetnek: menetirány szerint előre, vagy háttal. Két állat pontosan akkor tud beszélgetni, ha egymás mögött ülnek és egymás felé fordulnak, azaz az előrébb ülő hátrafelé fordul. (Ha nem akar beszélgetni, attól azért ülhet háttal is, de beszélgetni csak egymás felé fordulva lehet.) Tudjuk a következőket:
 - Panda és Zebra nem szomszédos Oroszlánnal;
 - Zsiráf előzi Vízilót-t és Pandát;
 - Zsiráf és Kenguru, valamint Víziló és Oroszlán beszélgetnek egymással;
 - Zebra legalább egy állatot lát a többiek közül;
 - Zsiráf, Víziló és Panda menetiránynak háttal ülnek.
 Hányféle ülésrend lehetséges? (Két ülésrend különböző, ha legalább egy állat másutt, vagy más irányba nézve ül.) →
- András, Béla és Csaba futóversenyeket rendeznek. Minden verseny után, az utolsó helyezett megduplázza az első helyezett pénzét. Kezdetben Andrásnak 55, Bélának 30, Csabának pedig 35 forintja volt. Hány versenyt rendeztek legalább, ha a végén mindenkinek ugyanannyi pénze lett? (A versenyek ideje alatt senki se kapott máshonnan pénzt, illetve senki se költött közben a pénzből.) →
- Egy kocka csúcsait kiszíneztük egy-egy színnel az alábbiak közül: piros, sárga, zöld, kék, fekete, lila. Tudjuk, hogy ha két csúcs azonos színű lett, akkor azokat összeköti a kocka valamelyik éle.

Egy hangya elindult a kocka egyik csúcsából, majd mindig az élek mentén haladva sétált a szomszédos csúcsok között. Az út során ilyen színű csúcsokon ment sorban: kék, lila, piros, zöld, fekete, kék, sárga, lila, piros, sárga, fekete, kék, kék. A kiinduló kék csúcsot **K**-val, a másodiknak érintett lila csúcsot **L**-vel, az utána meglátogatott piros csúcsot **P**-vel jelöltük az ábrán. Hogyan színezhettük ki a többi (számozott) csúcsot?








- Pisti és Sárika a következő játékot játsszák: egy 3×3 -as tábla mezőibe felváltva írják be az egész számokat 1-től 9-ig. Sárika célja az, hogy az összes szám beírása után
 - a négy sarokmezőben lévő számok összege,

- a négy oldalmezőben lévő számok összege,
- az egyik átlóban lévő számok összege, és
- a másik átlóban lévő számok összege

mind ugyanannyi legyen. Pisti célja, hogy ezt megakadályozza, de mivel érzi, hogy Sárika nagyon nehéz célt tűzött ki, annyi engedményt tesz, hogy Sárika döntheti el, melyikük kezdjen. Kitalálhat-e Sárika olyan stratégiát, mellyel bizonyosan legyőzi Pistit? 




7. osztály

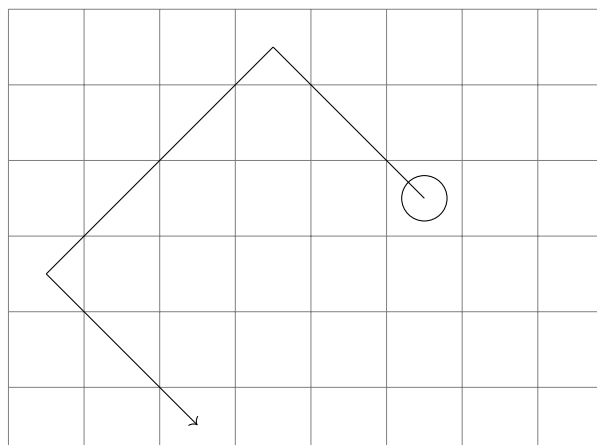
Megyei forduló



1. Pisti és Sárika a következő játékot játsszák: egy 3×3 -as tábla mezőibe felváltva írják be az egész számokat 1-től 9-ig. Sárika célja az, hogy az összes szám beírása után
 - a négy sarokmezőben lévő számok összege,
 - a négy oldalmezőben lévő számok összege,
 - az egyik átlóban lévő számok összege, és
 - a másik átlóban lévő számok összegemind ugyanannyi legyen. Pisti célja, hogy ezt megakadályozza, de mivel érzi, hogy Sárika nagyon nehéz célt tűzött ki, annyi engedményt tesz, hogy Sárika döntheti el, melyikük kezdjen. Kitalálhat-e Sárika olyan stratégiát, mellyel bizonyosan legyőzi Pistit? 
2. András, Béla és Csaba futóversenyeket rendeznek. Minden verseny után, az utolsó helyezett megduplázza az első helyezett pénzét. Kezdetben Andrásnak 55, Bélának 30, Csabának pedig 35 forintja volt. Hány versenyt rendeztek legalább, ha a végén mindenkinek ugyanannyi pénze lett? (A versenyek ideje alatt senki se kapott máshonnan pénzt, illetve senki se költött közben a pénzből.) 
3. Vegyük azokat a pozitív egész számokat, amelyekben a számjegyek összege 2018, továbbá az összes számjegyre igaz az, hogy osztható a szám nála kisebb számjegyeivel. Vegyük most az ilyen számok közül azokat, amelyek a lehető legtöbb különböző számjegyből állnak. Hány jegyű az utóbbi típusú számok közül a legkisebb? 
4. Egy vízilabda-mérkőzést izgalmasnak mondunk, ha a meccs során egyik csapat sem vezetett egy gólnál nagyobb különbséggel. Egy alkalommal a Magyarország–Szerbia mérkőzésen összesen 11 gól esett. Hányféle sorrendben eshettek a gólok, ha a meccs izgalmas volt? (Két sorrend különböző, ha van olyan sorszámú gól, amit nem ugyanaz a csapat szerzett az egyik sorrendben, mint a másikban.) 
5. Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben az ábécé szomszédos betűi szomszédos csúcsokat jelölnek. A hatszög AC átlójának felezőpontja G , CE átlójának felezőpontja H , AD átlójának felezőpontja I . Hányadrésze az $ABCHIG$ hatszög területe az $ABCDEF$ hatszög területének? (A szabályos hatszög minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.) 

8. osztály

Megyei forduló

- Hány különböző módon lehet felírni az 1024-et két pozitív négyzetszám összegeként? (Az összeadás sorrendje nem számít.) 
- Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben az ábécé szomszédos betűi szomszédos csúcsokat jelölnek. A hatszög AC átlójának felezőpontja G , CE átlójának felezőpontja H , AD átlójának felezőpontja I . Hányadrésze az $ABCHIG$ hatszög területe az $ABCDEF$ hatszög területének? (A szabályos hatszög minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.) 
- Egy 10×100 -as négyzetrács egy mezőjén egy futó áll. A futó a sakk szabályai szerint mozog átlós irányban, a tábla szélén egy biliárdgolyóhoz hasonlóan visszapattan. Van-e olyan mező, ahonnan indulva a futó be tud járni 500 mezőt? 



- Adott az ABC háromszög síkjában, a háromszögön kívül egy P pont. Mutassuk meg, hogy lehet találni olyan Q pontot az ABC háromszög belsejében vagy kerületén, amelyre $AQ + BQ + CQ < AP + BP + CP$. 
- Egy vízilabda-mérkőzést izgalmasnak mondunk, ha a meccs során egyik csapat sem vezetett két gólnál nagyobb különbséggel. Egy alkalommal a Magyarország–Szerbia mérkőzésen összesen 11 gól esett. Hányféle sorrendben eshettek a gólok, ha a meccs izgalmas volt? (Két sorrend különböző, ha van olyan sorszámú gól, amit nem ugyanaz a csapat szerzett az egyik sorrendben, mint a másikban.) 

5. osztály, 1. nap


Országos döntő

1. Anita, Viola, Szilárd és Dénes 4 különböző emeleten laknak egy 10 emeletes épületben: mindegyikük a 7., 8., 9., 10. emeletek valamelyikén. Amikor kérdeztem őket, ki melyiken lakik, Dénes válasz nélkül elfutott, a többiek pedig kicsit megtréfáltak. Ezeket állították:


Anita: „Én a hetediken, Dénes a nyolcadikon.”

Viola: „Én a kilencediken, Anita a nyolcadikon.”

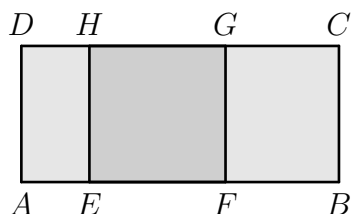
Szilárd: „Én a nyolcadikon, Viola a tizediken.”

Rémült arcomat látva nevetgélve hozzátették, mindegyiküknek pontosan az egyik kijelentése igaz. Vajon ki melyik emeleten lakik? 

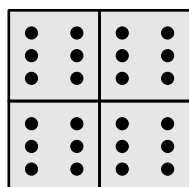
2. Van egy piros és egy zöld korongunk. A piros korong egyik oldalára a 2000 számot írtuk. A piros korong másik oldalára, és a zöld korong mindkét oldalára írhatunk egy-egy pozitív egész számot. Az a célunk, hogy a korongokat különböző oldalukkal az asztallapra helyezve, a felül látható két számot összeadva kaphassunk 2016-ot, 2017-et, 2018-at, illetve 2019-et is.

Milyen számokat írhatunk a korongok oldalaira? Adj meg minél több lehetőséget, és igazold, hogy a kívánt összegek megkaphatók! (Nincs szükség annak indoklására, hogy az általad felírt lehetőségeken kívül nincs több.) 

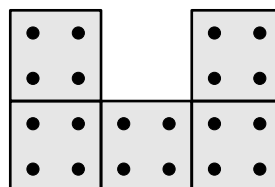
3. Az $ABCD$ téglalap AB oldalán felvettük az E és F pontokat, CD oldalán pedig a G és H pontokat az ábra szerint. Tudjuk, hogy $EFGH$ négyszög egy négyzet, valamint azt, hogy az AF szakasz 63 cm, a CH szakasz 77 cm hosszú. Mennyi az $ABCD$ téglalap kerülete?



4. Tökéletesen egyforma szabályos dobókockákból építettünk egy nem feltétlen összefüggő építményt. (A szabályos dobókockán a szemközti lapokon mindig összesen 7 pötty van.) Az ábra mutatja, hogy mit látunk belőle oldalról, illetve előlről nézve.



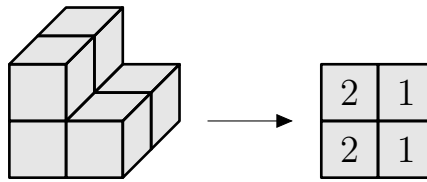
Építményünk oldalról



Építményünk előlről

Tudjuk azt is, hogy az építmény a lehető legkevesebb kocka felhasználásával építettük meg.

- a) Adj meg egy lehetséges alaprajzot, és írd bele a mezőkbe, hogy ott hány kocka van egymáson, hasonlóan az alábbi ábrához!



Egy másik építmény és a hozzá tartozó alaprajz

- b) A lehető legkevesebb dobókockából elkészített építményünk üvegasztalon áll. Alulról, felülről, előlről, hátulról, bal oldalról és jobb oldalról nézve egyaránt igaz, hogy az éppen látható lapok mindegyikén ugyanannyi pötty van. Hány pötty látható ebből a 6 irányból összesen?



5. Egy 4×4 -es táblázatot az itt látható módon kitöltöttünk számokkal. A táblázat bal felső sarkából indulva lépkedhetünk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:

- mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
- egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
- a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie.

9	10	4	8
12	6	16	2
5	7	1	14
15	13	11	3

Legfeljebb mennyi lehet a séta során bejárt mezőkre írt számok összege?



5. osztály, 2. nap

Országos döntő



1. Van 10 különböző számkártyánk 0-tól 9-ig. 5 gyerek (Anna, Bea, Cili, Dóra, Enikő) mindegyike húz két-két kártyát, majd összeilleszti egy-egy kétjegyű számmá. Ezután a következő igaz mondatok hangzanak el:

Anna: „Az én számom osztható 26-tal.”


Bea: „Az én számom osztható 20-szal.”

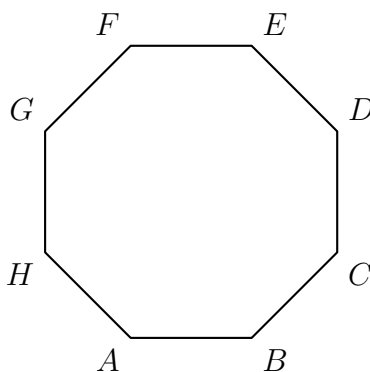
Cili: „Az én számom osztható 16-tal.”


Dóra: „Az én számom osztható 28-cal.”

- a) Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható 12-vel?
- b) Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható 13-mal? 
2. Töltsd ki az ábrán látható kilenc mezőt az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok mindegyikének egyszeri felhasználásával úgy, hogy a sorokban és az oszlopokban is a megadott eredményt adják a műveletsorok! Írd le azt is, hogyan határoztad meg a számokat! 

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{cc} \square & \times & \square \\ - & & \times \end{array} \right) / \begin{array}{c} \square \\ + \end{array} = 2 \\ \left(\begin{array}{cc} \square & + & \square \\ + & & \times \end{array} \right) / \begin{array}{c} \square \\ + \end{array} = 1 \\ \left(\begin{array}{cc} \square & - & \square \\ = & & = \end{array} \right) \times \begin{array}{c} \square \\ = \\ 22 \end{array} = 21 \\ \begin{array}{ccc} 8 & 48 & \end{array} \end{array}$$

3. Az ábrán látható szabályos nyolcszög csúcsai közül szeretnék kiválasztani hármat úgy, hogy közülük semelyik kettő ne legyen szomszédos, és semelyik kettő ne legyen átellenes. Hány különböző kiválasztás lehetséges? (Két kiválasztás különböző, ha van olyan csúcs, ami az egyikben szerepel, de a másikban nem.) 

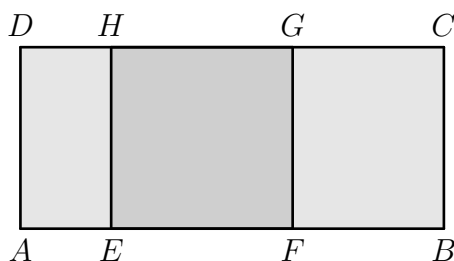


4. Adott egy négyzet. Dorina beszínezte a négyzet síkjában azokat a pontokat, amelyek távolsága a négyzet középpontjától legfeljebb akkora, mint a távolsága a négyzet legközelebbi csúcsától. Hányad része a Dorina által beszínezett terület a négyzet területének? 

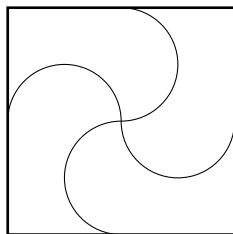
6. osztály, 1. nap

Országos döntő

- Egy számot emelkedőnek nevezünk, ha balról jobbra olvasva minden számjegye nagyobb az előtte állónál. (Például a 36 és a 257 emelkedő számok.) Hány olyan négyjegyű emelkedő szám van, amelyet 5-tel megszorozva emelkedő számot kapunk? →
- Rita, Sára és Tamara egy körasztal körül ülnek, előttük egy-egy kupac kavics (nem feltétlen egyforma kupacok). Mindhárman egyszerre a saját kupacuk egyharmadát a tőlük jobbra ülőnek, egyharmadát a tőlük balra ülőnek átadják, a többit megtartják. (Ezt mindhárman pontosan meg tudják tenni.) Megmondható-e, hogy most melyikük előtt hány db kavics van, ha csak azt tudjuk, hogy az asztalon összesen 876 db kavics hever? →
- Az $ABCD$ téglalap AB oldalán felvettük az E és F pontokat, CD oldalán pedig a G és H pontokat az ábra szerint. Tudjuk, hogy $EFGH$ négyszög egy négyzet, valamint azt, hogy az AF szakasz 63 cm, a CH szakasz 77 cm hosszú. Mennyi az $ABCD$ téglalap kerülete? →



- Anna játékkészletében az ábrán látható mintájú színes lapok szerepelnek. A négy egybevágó tartomány mindegyike a kék, sárga, zöld vagy piros színek valamelyikével van színezve. A készletben csak olyan lapok vannak, aminél két tartomány különböző színű, ha van közös határvonala. Hány különböző lapot tartalmazhat legfeljebb Anna készlete? (A forgatással egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek.) →



- Egy 4×4 -es táblázatot az itt látható módon kitöltöttünk számokkal. A táblázat bal felső sarkából indulva lépkedhetünk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:

9	10	4	8
12	6	16	2
5	7	1	14
15	13	11	3

- mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
- egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
- a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie.

Legfeljebb mennyi lehet a séta során bejárt mezőkre írt számok összege? →

6. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Van 10 különböző számkártyánk 0-tól 9-ig. 5 gyerek (Anna, Bea, Cili, Dóra, Enikő) mindegyike húz két-két kártyát, majd összeszorozza a két számot. Ezután a következő igaz mondatok hangzanak el:

Anna: „Az én számom osztható 26-tal.”

Bea: „Az én számom osztható 20-szal.”

Cili: „Az én számom osztható 27-tel.”

Dóra: „Az én számom osztható 28-cal.”


a) Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható 12-vel?


b) Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható 18-cal? 

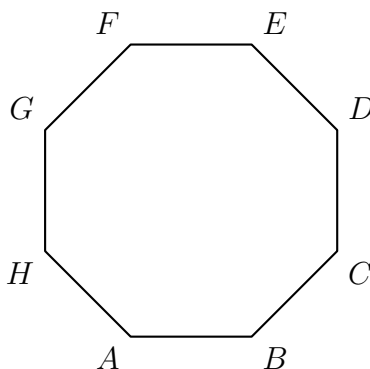
2. Az alább látható táblázatot az következő szabályoknak megfelelően kell kitölteni.

- Bármelyik mezőbe az 1-től 9-ig az egész számok valamelyikét írhatod.
- Egy oszlopban, ill. egy sorban legfeljebb egyszer használhatsz fel egy számot. (A táblázatban, akár többször is.)
- A sorok mellett, ill. az oszlopok fölött az abban a sorban, ill. oszlopban szereplő számok összegét adtuk meg.

	23	21	7
20			
18			
13			

Mutasd meg, hogy csak egy kitöltés lehetséges! 

3. Az ábrán látható szabályos nyolcszög csúcsai közül szeretnénk kiválasztani hármat úgy, hogy közülük semelyik kettő ne legyen szomszédos, és semelyik kettő ne legyen átellenes. Hány különböző kiválasztás lehetséges? (Két kiválasztás különböző, ha van olyan csúcs, ami az egyikben szerepel, de a másikban nem.) 



4. Sára a következő játékot találta ki. Egy füzetlap első sorába felírt egy pozitív egészekből álló számsort. Ezután a következő sorba az előző sor minden száma helyett leírta növekvő sorrendben 1-től az adott számig az összes pozitív egészt. Majd ugyanezzel a módszerrel képezte a második sor számaiból a harmadik sor számait, és így tovább. Ha például az egyik sorban az

$$5, 1, 2, 3, 2$$

számsor szerepel, akkor a következő sorba az

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2$$

számsort írta.

Hány számot írt Sára a 6. sorba, ha az első sorba az 1, 2, 3, 4, 5 számsort írta?



7. osztály, 1. nap

Országos döntő

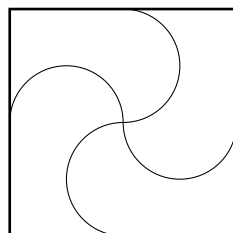
1. Adott egy 90 egység területű nagy téglalap. Szeretnénk az oldalakkal párhuzamos vágásokkal felosztani kilenc kisebb téglalagra úgy, hogy a kapott téglalapok közül a bal felső területe 1 egység, a jobb felsőé 3, a bal alsóé 9, a középsőé pedig 10 egység legyen.

1		3
	10	
9		

Mutasd meg, hogy a nagy téglalap alakjától függetlenül mindig van ilyen felosztás, és add meg a hiányzó öt kis téglalap területének egy-egy lehetséges értékét! (Nem kell megkeresni az összes lehetséges felosztást.)




2. Egy számot emelkedőnek nevezünk, ha balról jobbra olvasva minden számjegye nagyobb az előtte állónál. (Például a 36 és a 2579 emelkedő számok.) Hány olyan háromjegyű emelkedő szám van, amelynek az ötszöröse **nem** emelkedő szám?
3. Anna játékkészletében az ábrán látható mintájú színes lapok szerepelnek. A négy egybevágó tartomány mindegyike a kék, sárga, zöld vagy piros színek valamelyikével van színezve. A készletben csak olyan lapok vannak, aminél két tartomány különböző színű, ha van közös határvonala. Hány különböző lapot tartalmazhat legfeljebb Anna készlete? (A forgatással egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek.)

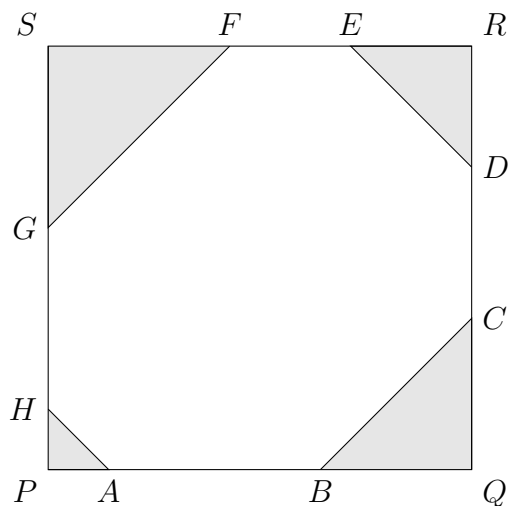


4. Egy 8×8 -as táblázat mezőit kitöltjük az 1-től 64-ig terjedő pozitív egész számokkal úgy, hogy minden szám pontosan egy mezőben szerepel. Ezután a táblázat bal felső sarkából indulva sétálunk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:
- mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
 - egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
 - a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie.

A séta során érintett mezőkön (beleértve a kiinduló- és az utolsó mezőt is) lévő számokat összeadjuk. Az összes lehetséges kitöltést és azokon az összes lehetséges sétát tekintve mennyi ennek az összegnek a legnagyobb lehetséges értéke?



5. A $PQRS$ négyzetből a sarkainál levágtuk a PAH , QCB , RED , SGF egyenlő szárú háromszögeket az ábra szerint, így egy nyolcszöget kaptunk. Bizonyítsd be, hogy az $ACEG$ és a $BDFH$ négyszög területe egyenlő. 




7. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Tekintsük azokat a hatjegyű számokat, amelyekben nincs 0 számjegy, és minden számjegyük osztható azzal a számmal, ahányadik helyen áll. (Balról jobbra olvasva, tehát az egyesek helyén álló számjegy a hatodik.)

a) Összesen hány ilyen hatjegyű szám van?

b) Ezek között hány olyan van, amelyben nincs két egyforma számjegy? 


2. Vegyük az egész számokat 1001-től 2000-ig, és mindegyiknek keressük meg a legnagyobb páratlan osztóját. Mennyi az így kapott 1000 darab szám összege? 

3. Sára a következő játékot találta ki. Egy füzetlap első sorába felírt egy pozitív egészekből álló számsort. Ezután a következő sorba az előző sor minden száma helyett leírta növekvő sorrendben 1-től az adott számig az összes pozitív egészt. Majd ugyanezzel a módszerrel képezte a második sor számaiból a harmadik sor számait, és így tovább. Ha például az egyik sorban az

$$5, 1, 2, 3, 2$$


számsor szerepel, akkor a következő sorba az

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2$$

számsor kerül. Hány számot írt Sára a 6. sorba, ha az első sorba az 1, 2, 3, 4, 5 számsort írta? 

4. Az ABC háromszögben C -nél derékszög van. A k_1 és k_2 hozzáírt körök a háromszögön kívül helyezkednek el, az alábbiak szerint:

- Az O_1 középpontú k_1 kör érinti az AC befogót az E pontban, az AB oldal meghosszabbítását a D pontban, valamint a BC oldal meghosszabbítását az F pontban.
- Az O_2 középpontú k_2 kör érinti a BC befogót az I pontban, az AB oldal meghosszabbítását a G pontban, valamint az AC oldal meghosszabbítását az H pontban.

Bizonyítsd be, hogy a k_1 és k_2 körök sugarának összege megegyezik az AB szakasz hosszával. 

8. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Van egy piros és egy zöld korongunk. Mindkét korong mindkét oldalán van egy-egy pozitív egész szám, a piros korong egyik oldalán a 2000, a zöld korong egyik oldalán a 18 található. A korongokat az összes lehetséges módon az asztallapra helyezve a korongon látható számok összegére pontosan négyféle különböző eredményt kaphatunk, és ezek ráadásul egymást követő pozitív egész számok.

Milyen számok állhatnak a korongok túlsó oldalán? Az összes lehetséges megoldást keresd meg! →

2. Az $ABCD$ négyzet átlóinak metszéspontja O , az AB oldal A -hoz legközelebb eső negyedelőpontja N , az AD oldal egy belső pontja P . Az OP egyenes a DN szakaszt az X , a BC oldalt az Y pontban metszi.

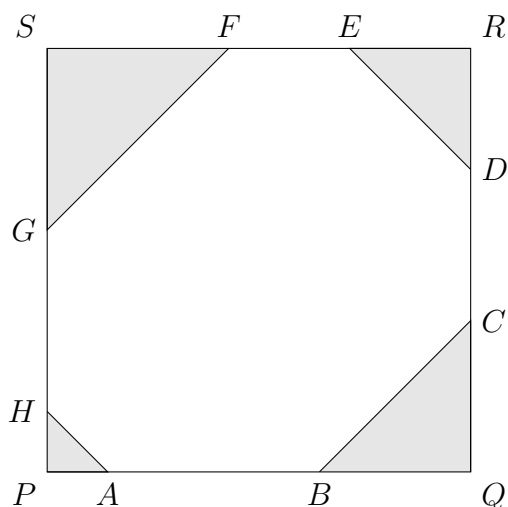
Lehetséges-e, hogy a $XYCD$ négyszög területe éppen háromszorosa az $ANXP$ négyszög területének? →

3. Melyek azok az n pozitív egész számok, melyekre $\frac{n}{555-n}$ négyzetszám? →

4. Anna és Roland a következő játékot játsszák. Roland beírja egy $n \times n$ -es táblázat mezőibe a számokat 1-től n^2 -ig valamilyen elrendezésben. Annának a táblázat bal felső sarkából indulva el kell jutnia a táblázat jobb alsó sarkáig úgy, hogy mindig élszomszédos mezőre lép, és olyan mezőre nem léphet, ahol korábban már járt. Célja, hogy az út során érintett mezőkben szereplő számok összege a lehető legnagyobb legyen. Roland úgy próbálja kezdetben kitölteni a táblázatot, hogy az Anna által elérhető összeg a lehető legkisebb legyen.





Határozzuk meg minden $n > 1$ esetén az Anna által elérhető legnagyobb összeget! (Feltételezzük, hogy Anna és Roland is optimálisan játszik.) →

5. A $PQRS$ négyzetből a sarkainál levágtuk a PAH , QCB , RED , SGF egyenlő szárú háromszögeket az ábra szerint, így egy nyolcszöget kaptunk. Bizonyítsd be, hogy az $ACEG$ és a $BDFH$ négyszög területe egyenlő. →



8. osztály, 2. nap

Országos döntő

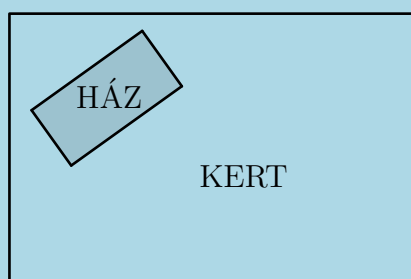
1. Vegyük az egész számokat 1001-től 2000-ig, és mindegyiknek keressük meg a legnagyobb páratlan osztóját. Mennyi az így kapott 1000 darab szám összege? 
2. Hányféle módon lehet egy szabályos 100-szög csúcsai közül kiválasztani hármat úgy, hogy a kiválasztott három csúcs között ne legyen se két szomszédos, se két átellenes? 
3. Határozd meg azokat az \overline{abcd} négyjegyű számokat, amelyek egyenlők az \overline{ab} és \overline{cd} kétjegyű számok szorzatának kétszeresével. 
4. Egy derékszögű háromszög beírt köre az átfogót egy d és egy e hosszúságú szakaszra osztja. Bizonyítsd be, hogy a $d \cdot e$ szorzat egyenlő a háromszög területével. 

Megoldások


5. osztály

Megyei forduló

1. Egy téglalap alakú kertben egy téglalap alapterületű ház épül az ábrán látható módon. A kert hosszabb oldala a ház hosszabb oldalának 3-szorosa, a kert rövidebb oldala a ház rövidebb oldalának négyszerese. A maradék területet parkosítják. Hányszorosa lesz a parkosított terület a ház területének?



A kert területe a ház területének $3 \cdot 4 = 12$ -szerese. (Rajzzal is kifejezhető a két terület aránya.)


Ebből egy háznyi részt maga a ház foglal el. Így a parkosított terület a ház $12 - 1 = 11$ -szerese. 

2. A Noé bárkája című játékban Oroszlán (O), Panda (P), Víziló (V), Zsiráf (Zs), Zebra (Z) és Kenguru (K) utaznak a bárkán egymás mögött egyesével ülve. Minden ülésen kétféleképp ülhetnek: menetirány szerint előre, vagy háttal. Két állat pontosan akkor tud beszélgetni, ha egymás mögött ülnek és egymás felé fordulnak, azaz az előrébb ülő hátrafelé fordul. (Ha nem akar beszélgetni, attól azért ülhet háttal is, de beszélgetni csak egymás felé fordulva lehet.) Tudjuk a következőket:

- 1) Oroszlán az első, és háttal ül;
- 2) Zebra előrébb ül, mint Panda;
- 3) Zsiráf és Panda beszélgetnek a bárkában;
- 4) Víziló előre néz;
- 5) Víziló a harmadik, és Kenguru után ül.

Hányféle ülésrend lehetséges? (Két ülésrend különböző, ha legalább egy állat másutt, vagy más irányba nézve ül.)

Az 1) és 5) feltétel miatt az első 3 helyen O, K, V ülnek ebben a sorrendben, és O és V helyzete adott, de K mindkét irányban ülhet. Ez 2 lehetőség. 2) és 3) alapján Z a negyedik helyen ül, és ezt 2-féle módon teheti; valamint Zs és P ülnek az 5-6. helyen egymás felé fordulva. Aki az 5., az háttal, aki a 6., az előre nézve. e páros is 2-féleképp ülhet, ami újabb


2 lehetőség. K, Z és a Zs-P páros helyzete egymástól nem függ. A megoldás tehát: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. 

3. Zsófi kiszámolta két négyjegyű szám különbségét, és eredményül 2018-at kapott. Ezután összeadta a két négyjegyű számban szereplő nyolc darab számjegyet. Lehet-e az így kapott összeg

- a) 6-nál kevesebb
- b) 33
- c) 66?

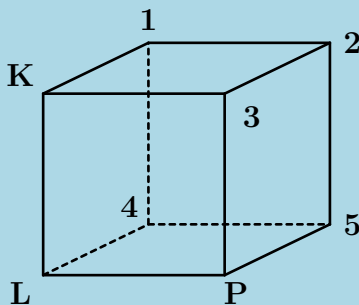
a) Vizsgáljuk az ezresek helyén álló jegyeket. A kisebbítendőben ez a jegy legalább kettővel nagyobb, mint a kivonandóban. Tehát ezek összege legalább $1+3=4$. Ha a jegyek összege 6-nál kevesebb lenne, akkor a százások, tízesek, egyesek helyén álló jegyek összege legfeljebb 1 lehetne. Így ezen jegyek mindegyike 0 vagy 1, viszont ekkor a különbség nem végződhetne 8-ra. Tehát a jegyek összege **nem** lehet 6-nál kevesebb.

b) **Igen**, lehetséges, pl. $7528 - 5510 = 2018$.

c) **Igen**, lehetséges, pl. $9997 - 7979 = 2018$. 

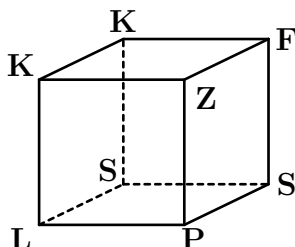
4. Egy kocka csúcsait kiszíneztük egy-egy színnel az alábbiak közül: piros, sárga, zöld, kék, fekete, lila. Tudjuk, hogy ha két csúcs azonos színű lett, akkor azokat összeköti a kocka valamelyik éle.

Egy hangya elindult a kocka egyik csúcsából, majd mindig az élek mentén haladva sétált a szomszédos csúcsok között. Az út során ilyen színű csúcsokon ment sorban: kék, lila, piros, zöld, fekete, kék, sárga, lila, piros, sárga, fekete, kék, kék. A kiinduló kék csúcsot **K**-val, a másodiknak érintett lila csúcsot **L**-lel, az utána meglátogatott piros csúcsot **P**-vel jelöltük az ábrán. Hogyan színezhettük ki a többi (számozott) csúcsot?



Legalább két csúcsot kell kékre színeznünk. Sárga csúcsból is legalább kettőnek kell lennie, mert sárga csúcsnak van kék, lila, piros és fekete szomszédja is, ami egy csúccsal lehetetlen. Tehát 2-2 kék és sárga, valamint 1-1 piros, lila, fekete és zöld csúcs van. A piros csúcsnak a lilán kívül van zöld és sárga szomszédja, tehát az 3-as és 5-ös csúcs zöld és sárga valamilyen sorrendben. A kék csúcsnak van kék szomszédja, amely így csak az 1-es lehet. Ennek

viszont van fekete szomszédja, amely nem lehet a 4-es, mert a feketének kell zöld, kék és sárga szomszéd is, lila már nem lehet. Tehát a fekete csúcs a 2-es. A két sárga csúcs szomszédos, így ezek a 4-es és 5-ös csúcsok, tehát a zöld csúcs a 3-as. Az alábbi színezés esetén ellenőrizhető, hogy a hangya végig tud sétálni a megadott útvonalon. Ez tehát az egyetlen megfelelő színezés.



5. Pisti és Sáríka a következő játékot játsszák: egy 3×3 -as tábla mezőibe felváltva írják be az egész számokat 1-től 9-ig. Sáríka célja az, hogy az összes szám beírása után
- a négy sarokmezőben lévő számok összege,
 - a négy oldalmezőben lévő számok összege,
 - az egyik átlóban lévő számok összege, és
 - a másik átlóban lévő számok összege

mind ugyanannyi legyen. Pisti célja, hogy ezt megakadályozza, de mivel érzi, hogy Sáríka nagyon nehéz célt tűzött ki, annyi engedményt tesz, hogy Sáríka döntheti el, melyikük kezdjen. Kitalálhat-e Sáríka olyan stratégiát, mellyel bizonyosan legyőzi Pistit?

Sáríka válassza a kezdést, és írja be a középső mezőbe a 9-est. Ezután bármelyik mezőbe is ír be számot Pisti, Sáríka a következő lépésben írja be az ezzel átellenes mezőbe azt a számot, amely a Pisti által beírtat összegben 9-re egészíti ki. Ezt mindig meg tudja tenni, hiszen az $(1; 8)$, $(2; 7)$, $(3; 6)$, $(4; 5)$ párok mindegyikében a számok összege 9, így ha Pisti beírja a pár egyik tagját, Sáríka beírja az átellenes mezőbe a másikat, így a következő lépésben Pistinek egy új pár egyik tagját kell választania. Így a kitöltés befejezésével a négy sarokmezőben a számok összege 18, hiszen ez két átellenes pár. Ugyanez igaz a négy oldalmezőre is. A két átló mindegyike a középső 9-esből és egy átellenes párból áll, így ezekben is 18 lesz az összeg. Tehát a feltételek teljesülnek (mind a négy összeg 18), így Sáríka ezzel a stratégiával biztosan megnyeri a játékot.

Megjegyzés. Nem kell megadni Sáríka összes lehetséges nyerő stratégiáját, elég egy konkrét játékmódról megmutatni, hogy az valóban nyerő. Ugyanakkor nagyon természetes úgy gondolkozni, hogy feltesszük, hogy Sáríka célja teljesül, és megnézzük, hogy ebből mi következik a tábla mezőibe írt számokra nézve.

Ha Sáríka célja teljesül, akkor a négy sarokmezőbe írt szám összege megegyezik az átlók összegével, ezért két átellenes sarokba írt szám összege pont a középre írt szám. Így a négy sarokmező összege ekkor a középső szám kétszerese, de ugyanennyi a négy oldalmezőbe írt szám összege is. Ezért az összes szám összege (45) egyenlő a középső szám ötszörösével. Tehát ha Sáríka célja teljesül, akkor a középső mezőben 9-nek kell lennie. Ebből a gondolatmenetből annyi derül ki, hogy *ha van Sáríkanak nyerő stratégiája*, akkor az olyan,


hogy elsőnek a 9-est írja középre (és az átellenes sarokmezőkben 9-re állítja az összeget). A továbbiakban még meg kell mutatni, hogy ilyen stratégia valóban létezik. 

6. osztály

Megyei forduló

1. Hány olyan 4-jegyű szám van, melyben nincs 0 számjegy, a számjegyek összege 11, és minden számjegy osztható a nála kisebb számjegyekkel?

Első megoldás. Ha a legkisebb jegy 2, akkor az összeg páros lenne, ha nagyobb, akkor 11-nél több. Tehát a legkisebb jegy az 1. Négy darab 1-es nyilván nem megfelelő. Három darab 1-es esetén a negyedik számjegy 8-as, ilyen számból 4 darab van: 1118, 1181, 1811, 8111. Két darab 1-es esetén a másik két jegy összege 9, és a kisebb osztója a nagyobbaknak. Ez csak a 3 és a 6 lehet, ezekkel 12-féle számot tudunk alkotni. Egy darab 1-es esetén a fennmaradó számok összege 10, és közülük a legkisebb mindegyiknek osztója. Ezért ez csak 2-es lehet. A két legnagyobb jegy összege 8, és az egyik osztója a másiknak. Két lehetőség van: 2+6 vagy 4+4. Mindkét esetben 12-féle szám készíthető. Összesen tehát $4 + 12 + 12 + 12 = 40$ megfelelő négyjegyű szám van.

Második megoldás. Mivel négy darab páratlan szám összege nem lehet 11, ezért a számjegyek között van páros. Emiatt a legnagyobb számjegy is páros. Ha a legnagyobb számjegy 8, akkor csak három 1-essel kaphatunk 11-es összeget. Ez 4 darab megfelelő szám: 1118, 1181, 1811, 8111. Ha a legnagyobb számjegy 6, akkor a fennmaradó jegyek (melyek összege 5) 1-esek, 2-esek és 3-asok lehetnek. Ezekből kétféleképp kaphatunk 5-öt: 3+1+1 vagy 2+2+1. Mindkét esetből 12-féle számot készíthetünk. Ha a legnagyobb számjegy 4, akkor abból az összeg miatt pontosan kettő kell ($4 + 2 + 2 + 2 < 11 < 4 + 4 + 4$). A maradék két számjegy összege 3, így ezek egy 1-es és egy 2-es. Az 1, 2, 4, 4 számjegyekből is 12-féle szám készíthető. A legnagyobb számjegy nem lehet 2, mert akkor legfeljebb 8 lehetne a jegyek összege. Összesen tehát $4+12+12+12=40$ megfelelő négyjegyű szám van. 

2. A Noé bárkája című játékban Oroszlán (O), Panda (P), Víziló (V), Zsiráf (Zs), Zebra (Z) és Kenguru (K) utaznak a bárkán egymás mögött egyesével ülve. Minden ülésen kétféleképp ülhetnek: menetirány szerint előre, vagy háttal, hogy beszélgethessenek az előttük, vagy a mögöttük ülővel. (Ha nem akar beszélgetni, attól azért ülhet háttal is, de beszélgetni csak egymás felé fordulva lehet.) Tudjuk a következőket:

- 1) Panda és Zebra nem szomszédos Oroszlánnal;
- 2) Zsiráf előzi Vízilót-t és Pandát;
- 3) Zsiráf és Kenguru, valamint Víziló és Oroszlán egymás felé fordulva beszélgetnek;
- 4) Zebra legalább egy állatot lát a többiek közül;
- 5) Zsiráf, Víziló és Panda menetiránynak háttal ülnek.

Hányféle ülésrend lehetséges? (Két ülésrend különböző, ha legalább egy állat másutt, vagy más irányba nézve ül.)

Az 5) és 3) feltételek miatt Zsiráf mögött közvetlenül ül Kenguru, Víziló mögött közvetlenül pedig Oroszlán. 2) miatt az utóbbi páros hátrébb ül az előbbinél, így ha a bárka balról jobbra halad, akkor az ülésrend ilyen: ... $\overrightarrow{O} \overleftarrow{V}$... $\overleftarrow{K} \overleftarrow{Zs}$... 1) miatt Oroszlán mögött nem

ülhet sem Panda, sem Zebra, így ő a leghátsó. 2) miatt Zsiráf előtt nem ülhet Panda, így vagy Zebra ül legelől, vagy Zsiráf. Ha Zebra a legelső, akkor ő 4) miatt hátrafelé néz, Panda pedig csak Víziló és Kenguru között ülhet, hátrafelé. Ekkor az egyetlen lehetséges ülésrend: $\overrightarrow{O} \overleftarrow{V} \overleftarrow{P} \overrightarrow{K} \overrightarrow{Z} \overleftarrow{s} \overleftarrow{Z}$. Ha Zsiráf a legelső, akkor Zebra és Panda a középső két helyen ülhetnek tetszőleges sorrendben, Zebra bármelyik irányba nézhet, Panda csak hátrafelé. Ez további 4-féle ülésrend:

$$\overrightarrow{O} \overleftarrow{V} \overleftarrow{P} \overleftarrow{Z} \overrightarrow{K} \overrightarrow{Z} \overleftarrow{s}, \quad \overrightarrow{O} \overleftarrow{V} \overleftarrow{P} \overrightarrow{Z} \overrightarrow{K} \overrightarrow{Z} \overleftarrow{s}, \quad \overrightarrow{O} \overleftarrow{V} \overleftarrow{Z} \overleftarrow{P} \overrightarrow{K} \overrightarrow{Z} \overleftarrow{s}, \quad \overrightarrow{O} \overleftarrow{V} \overrightarrow{Z} \overleftarrow{P} \overrightarrow{K} \overrightarrow{Z} \overleftarrow{s},$$

így összesen 5-féle ülésrend lehetséges.



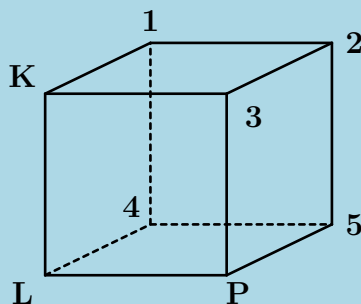
3. András, Béla és Csaba futóversenyeket rendeznek. Minden verseny után, az utolsó helyezett megduplázza az első helyezett pénzét. Kezdetben Andrásnak 55, Bélának 30, Csabának pedig 35 forintja volt. Hány versenyt rendeztek legalább, ha a végén mindenkinek ugyanannyi pénze lett? (A versenyek ideje alatt senki se kapott máshonnan pénzt, illetve senki se költött közben a pénzéből.)

Legalább három fordulóra van szükség: mivel a teljes pénzösszeg $55+30+35=120$ forint, a végén mindenkinek 40 forintja lesz. Ekkor az utolsó forduló előtt valakinek, 20, valakinek 40 és valakinek 60 forintja volt. Ezt az állapotot az eredetiből nem lehet elérni, mert egy forduló után legalább egy embernek nem változik a pénze, de a $\{30, 35, 55\}$ és a $\{20, 40, 60\}$ halmazoknak nincs közös eleme. Három forduló alatt el is érhető, hogy mindenkinek ugyanannyi legyen a pénze: először András megduplázza Csaba pénzét (az állás: 20, 30, 70), majd Csaba duplázza meg Béla pénzét (20, 60, 40), végül Béla megduplázza András pénzét, így adódik a 40, 40, 40 eredmény.



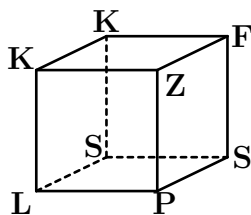
4. Egy kocka csúcsait kiszíneztük egy-egy színnel az alábbiak közül: piros, sárga, zöld, kék, fekete, lila. Tudjuk, hogy ha két csúcs azonos színű lett, akkor azokat összeköti a kocka valamelyik éle.

Egy hangya elindult a kocka egyik csúcsából, majd mindig az élek mentén haladva sétált a szomszédos csúcsok között. Az út során ilyen színű csúcsokon ment sorban: kék, lila, piros, zöld, fekete, kék, sárga, lila, piros, sárga, fekete, kék, kék. A kiinduló kék csúcsot **K**-val, a másodiknak érintett lila csúcsot **L**-l, az utána meglátogatott piros csúcsot **P**-vel jelöltük az ábrán. Hogyan színezhettük ki a többi (számozott) csúcsot?



Legalább két csúcsot kell kékre színeznünk. Sárga csúcsból is legalább kettőnek kell lennie, mert sárga csúcsnak van kék, lila, piros és fekete szomszédja is, ami egy csúccsal lehetetlen. Tehát 2-2 kék és sárga, valamint 1-1 piros, lila, fekete és zöld csúcs van. A piros csúcsnak a

lilán kívül van zöld és sárga szomszédja, tehát az 3-as és 5-ös csúcs zöld és sárga valamilyen sorrendben. A kék csúcsnak van kék szomszédja, amely így csak az 1-es lehet. Ennek viszont van fekete szomszédja, amely nem lehet a 4-es, mert a feketének kell zöld, kék és sárga szomszéd is, lila már nem lehet. Tehát a fekete csúcs a 2-es. A két sárga csúcs szomszédos, így ezek a 4-es és 5-ös csúcsok, tehát a zöld csúcs a 3-as. Az alábbi színezés esetén ellenőrizhető, hogy a hangya végig tud sétálni a megadott útvonalon. Ez tehát az egyetlen megfelelő színezés.



5. Pisti és Sárika a következő játékot játsszák: egy 3×3 -as tábla mezőibe felváltva írják be az egész számokat 1-től 9-ig. Sárika célja az, hogy az összes szám beírása után


- a négy sarokmezőben lévő számok összege,
- a négy oldalmezőben lévő számok összege,
- az egyik átlóban lévő számok összege, és
- a másik átlóban lévő számok összege

mind ugyanannyi legyen. Pisti célja, hogy ezt megakadályozza, de mivel érzi, hogy Sárika nagyon nehéz célt tűzött ki, annyi engedményt tesz, hogy Sárika döntheti el, melyikük kezdjen. Kitalálhat-e Sárika olyan stratégiát, mellyel bizonyosan legyőzi Pistit?

Sárika válassza a kezdést, és írja be a középső mezőbe a 9-est. Ezután bármelyik mezőbe is ír be számot Pisti, Sárika a következő lépésben írja be az ezzel átellenes mezőbe azt a számot, amely a Pisti által beírtat összegben 9-re egészíti ki. Ezt mindig meg tudja tenni, hiszen az (1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5) párok mindegyikében a számok összege 9, így ha Pisti beírja a pár egyik tagját, Sárika beírja az átellenes mezőbe a másikat, így a következő lépésben Pistinek egy új pár egyik tagját kell választania. Így a kitöltés befejezésével a négy sarokmezőben a számok összege 18, hiszen ez két átellenes pár. Ugyanez igaz a négy oldalmezőre is. A két átló mindegyike a középső 9-esből és egy átellenes párból áll, így ezekben is 18 lesz az összeg. Tehát a feltételek teljesülnek (mind a négy összeg 18), így Sárika ezzel a stratégiával biztosan megnyeri a játékot.

Megjegyzés. Nem kell megadni Sárika összes lehetséges nyerő stratégiáját, elég egy konkrét játékmódról megmutatni, hogy az valóban nyerő. Ugyanakkor nagyon természetes úgy gondolkodni, hogy feltesszük, hogy Sárika célja teljesül, és megnézzük, hogy ebből mi következik a tábla mezőibe írt számokra nézve.

Ha Sárika célja teljesül, akkor a négy sarokmezőbe írt szám összege megegyezik az átlók összegével, ezért két átellenes sarokba írt szám összege pont a középre írt szám. Így a négy sarokmező összege ekkor a középső szám kétszerese, de ugyanennyi a négy oldalmezőbe írt szám összege is. Ezért az összes szám összege (45) egyenlő a középső szám ötszörösével.

Tehát ha Sáríka célja teljesül, akkor a középső mezőben 9-nek kell lennie. Ebből a gondolatmenetből annyi derül ki, hogy *ha van Sáríkanak nyerő stratégiája*, akkor az olyan, hogy elsőnek a 9-est írja középre (és az átellenes sarokmezőkben 9-re állítja az összeget). A továbbiakban még meg kell mutatni, hogy ilyen stratégia valóban létezik. 

7. osztály

Megyei forduló


1. Pisti és Sáríka a következő játékot játsszák: egy 3×3 -as tábla mezőibe felváltva írják be az egész számokat 1-től 9-ig. Sáríka célja az, hogy az összes szám beírása után

- a négy sarokmezőben lévő számok összege,
- a négy oldalmezőben lévő szám összege,
- az egyik átlóban lévő számok összege, és
- a másik átlóban lévő számok összege


mind ugyanannyi legyen. Pisti célja, hogy ezt megakadályozza, de mivel érzi, hogy Sáríka nagyon nehéz célt tűzött ki, annyi engedményt tesz, hogy Sáríka döntheti el, melyikük kezdjen. Kitalálhat-e Sáríka olyan stratégiát, mellyel bizonyosan legyőzi Pistit?

Sáríka válassza a kezdést, és írja be a középső mezőbe a 9-est. Ezután bármelyik mezőbe is ír be számot Pisti, Sáríka a következő lépésben írja be az ezzel átellenes mezőbe azt a számot, amely a Pisti által beírtat összegben 9-re egészíti ki. Ezt mindig meg tudja tenni, hiszen az (1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5) párok mindegyikében a számok összege 9, így ha Pisti beírja a pár egyik tagját, Sáríka beírja az átellenes mezőbe a másikat, így a következő lépésben Pistinek egy új pár egyik tagját kell választania. Így a kitöltés befejezésével a négy sarokmezőben a számok összege 18, hiszen ez két átellenes pár. Ugyanez igaz a négy oldalmezőre is. A két átló mindegyike a középső 9-esből és egy átellenes párból áll, így ezekben is 18 lesz az összeg. Tehát a feltételek teljesülnek (mind a négy összeg 18), így Sáríka ezzel a stratégiával biztosan megnyeri a játékot.


Megjegyzés. Nem kell megadni Sáríka összes lehetséges nyerő stratégiáját, elég egy konkrét játékmódról megmutatni, hogy az valóban nyerő. Ugyanakkor nagyon természetes úgy gondolkozni, hogy feltesszük, hogy Sáríka célja teljesül, és megnézzük, hogy ebből mi következik a tábla mezőibe írt számokra nézve.

Ha Sáríka célja teljesül, akkor a négy sarokmezőbe írt szám összege megegyezik az átlók összegével, ezért két átellenes sarokba írt szám összege pont a középre írt szám. Így a négy sarokmező összege ekkor a középső szám kétszerese, de ugyanennyi a négy oldalmezőbe írt szám összege is. Ezért az összes szám összege (45) egyenlő a középső szám ötszörösével. Tehát ha Sáríka célja teljesül, akkor a középső mezőben 9-nek kell lennie. Ebből a gondolatmenetből annyi derül ki, hogy *ha van Sáríkanak nyerő stratégiája*, akkor az olyan, hogy elsőnek a 9-est írja középre (és az átellenes sarokmezőkben 9-re állítja az összeget). A továbbiakban meg kell mutatni, hogy ilyen stratégia valóban létezik. 

2. András, Béla és Csaba futóversenyeket rendeznek. Minden verseny után, az utolsó helyezett megduplázza az első helyezett pénzét. Kezdetben Andrásnak 55, Bélának 30, Csabának pedig 35 forintja volt. Hány versenyt rendeztek legalább, ha a végén mindenkinek ugyanannyi pénze lett? (A versenyek ideje alatt senki se kapott máshonnan pénzt, illetve senki se költött közben a pénzéből.)

Legalább három fordulóra van szükség: mivel a teljes pénzösszeg $55+30+35=120$ forint, a végén mindenkinek 40 forintja lesz. Ekkor az utolsó forduló előtt valakinek, 20, valakinek 40 és valakinek 60 forintja volt. Ezt az állapotot az eredetiből nem lehet elérni, mert egy forduló után legalább egy embernek nem változik a pénze, de a $\{30, 35, 55\}$ és a $\{20, 40, 60\}$ halmazoknak nincs közös eleme. Három forduló alatt el is érhető, hogy mindenkinek ugyanannyi legyen a pénze: először András megduplázza Csaba pénzét (az állás: 20, 30, 70), majd Csaba duplázza meg Béla pénzét (20, 60, 40), végül Béla megduplázza András pénzét, így adódik a 40, 40, 40 eredmény. 

3. Vegyük azokat a pozitív egész számokat, amelyekben a számjegyek összege 2018, továbbá az összes számjegyre igaz az, hogy osztható a szám nála kisebb számjegyeivel. Vegyük most az ilyen számok közül azokat, amelyek a lehető legtöbb különböző számjegyből állnak. Hány jegyű az utóbbi típusú számok közül a legkisebb?

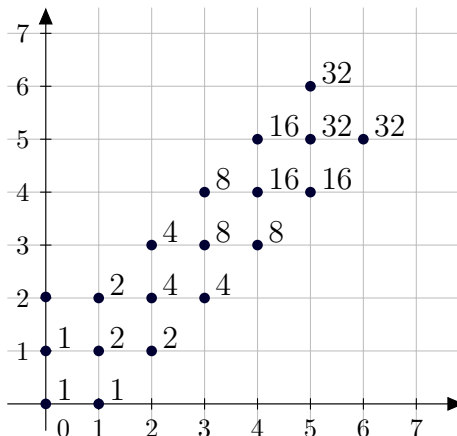
Ha szám számjegyeit növekvő sorrendbe rajuk, egy osztóláncot kapunk: mindegyik szám osztja a sorban utána következő számot. 1 és 9 között a tovább nem bővíthető osztóláncok a következők: 1, 2, 4, 8; 1, 2, 6; 1, 3, 6; 1, 3, 9. Látható tehát, hogy a szám legfeljebb négy különböző jegyből állhat, és ha négy különböző jegyből áll, akkor a jegyei 1, 2, 4, 8. Ha minél kisebb számot szeretnénk, minél kevesebb jegyre van szükség. Mivel 2018-ban a 8 megvan 252-szer, így legfeljebb 252 8-as lehet a számban, ez azonban nem érhető el, mert a maradék 2, és még kéne lennie 4-es jegynek a számban. Ezért legfeljebb 251 8-ast tehetünk a számba, és a maradék jegyek összege 10. Az előzőhöz hasonlóan, legfeljebb két 4-es jegy lehet a számban, de a kettő nem érhető el, mert kell még 1-es és 2-es jegy is. Így legfeljebb egy 4-es jegy lehet a számban. A maradék jegyek összege 6, és ez a lehető legkevesebb jegyből így jön össze: 2, 2, 1, 1. Tehát a legkisebb ilyen szám jegyeinek száma 256. 

4. Egy vízilabda-mérkőzést izgalmasnak mondunk, ha a meccs során egyik csapat sem vezetett egy gólnál nagyobb különbséggel. Egy alkalommal a Magyarország–Szerbia mérkőzésen összesen 11 gól esett. Hányféle sorrendben eshettek a gólok, ha a meccs izgalmas volt? (Két sorrend különböző, ha van olyan sorszámú gól, amit nem ugyanaz a csapat szerzett az egyik sorrendben, mint a másikban.)

Első megoldás. Az első két gól után az állás 2-0 vagy 1-1 lehetne, de csak az utóbbi eset állhat fenn. A következő két gól után az állás 3-1 vagy 2-2 lehetne, de megint csak az utóbbi eset állhat fenn. Így tehát a gólokat kettesével csoportosítva elmondható, hogy egy kettes csoportban mindkét csapatnak pontosan egy gólt kell dobnia, hogy a mérkőzés izgalmas lehessen, és az ilyen sorrendek mind jók is. Bármely kettes csoportban kétféle sorrendben eshetnek a gólok. Az utolsó, 11. gólt bármelyik csapat dobhatja, így feladat kérdésére a válasz $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$.

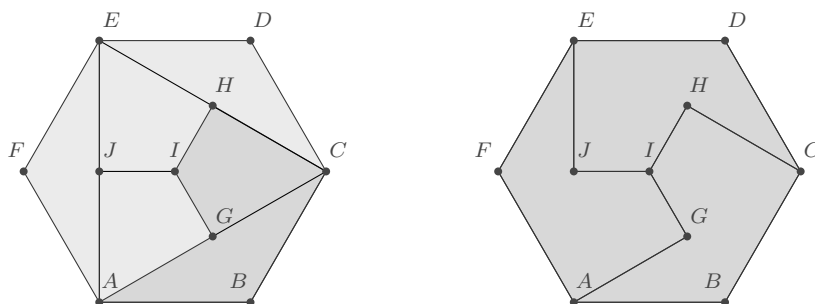
Második megoldás. A koordináta-rendszerben jelöljük be azokat a pontokat, melyek koordinátái a mérkőzés folyamán előfordulhattak mint részeredmények (ilyenek pl. a

$(0; 0), (1; 0), (0; 1)$ stb. pontok). Minden ponthoz írjuk oda, hogy hányféleképpen következhetett be a neki megfelelő részeredmény. A kitöltési szabály értelemszerű, egy ponthoz írt érték megegyezik a tőle balra és lefelé lévő szomszédjához írt értékek összegével (ha csak egy szomszédja van, akkor azt az értéket írjuk hozzá is). Mivel a lehetséges végeredmények, a 6-5 és az 5-6, egyaránt 32-féleképpen következhet be, a végeredmény: 64.



5. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög (az ábécé szomszédos betűi a hatszög szomszédos csúcsait jelölik) AC átlójának felezőpontja G , CE átlójának felezőpontja H , AD átlójának felezőpontja I . Hányadrésze az $ABCHIG$ hatszög területe az $ABCDEF$ hatszög területének? (A szabályos hatszög minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.)

Első megoldás. Az AC szakasz két részre bontja az $ABCHIG$ hatszöget: az ABC háromszögre és a $CHIG$ négyszögre. A hatszög szimmetriája miatt az ABC háromszöggel egybevágó a CDE és az EFA háromszög is, és ha az AE szakasz felezőpontját J jelöli, a $CHIG$ négyszög egybevágó az $AGIJ$ és az $EJIH$ négyszöggel. Ezek alapján a kért arány $1/3$.




Második megoldás. Vegyük észre, hogy ha a kérdéses hatszöget elforgatjuk az I pont körül 120° -kal és 240° -kal, akkor ezek és az eredeti hatszög hézagmentesen és átfedés nélkül lefedi az $ABCDEF$ hatszöget. Indoklás: legyen J az AE átló felezőpontja. Ekkor a 120° -os forgatásnál A képe C , B képe D , C képe E , G képe H , mert AC képe CE , és I képe I , tehát $ABCHIG$ képe $CDEJIH$. Hasonlóan látható, hogy $ABCHIG$ hatszög 240° -os elforgatottja $EFAGIJ$, tehát a kért arány $1/3$.



8. osztály

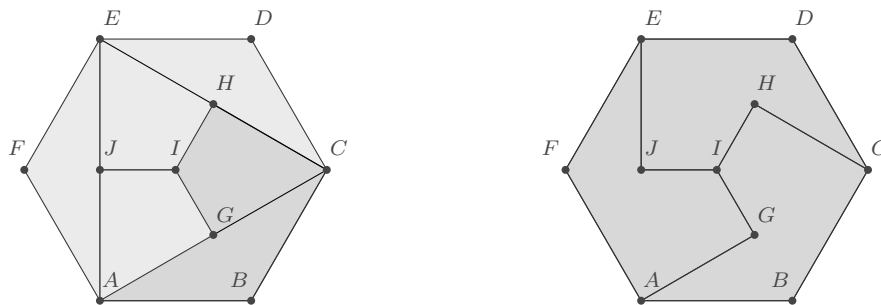
Megyei forduló


1. Hány különböző módon lehet felírni az 1024-et két pozitív négyzetszám összegeként? (Az összeadás sorrendje nem számít.)

Az 1024 nem írható fel két pozitív négyzetszám összegeként. Az 1024 osztható 4-gyel. Egy négyzetszám 4-es maradéka 0 vagy 1 lehet, ezért két négyzetszám összege csak úgy lehet négygyel osztható, ha mind a kettő páros. Legyen a két négyzetszám alapja $2a$ és $2b$, ekkor $1024 = (2a)^2 + (2b)^2 = 4a^2 + 4b^2$. Az egyenlőség mindkét oldalát le lehet osztani 4-gyel, így a $256 = a^2 + b^2$ egyenlethez jutunk. Erre az egyenletre újra elmondható az eredeti gondolatmenet. Az $a = 2c$ és $b = 2d$ felírással a $64 = c^2 + d^2$ egyenlőséghez jutunk. A fenti gondolatmenetet még háromszor elmondva két pozitív négyzetszámhoz jutunk, melyek összege 1, és ez nyilván lehetetlen. 

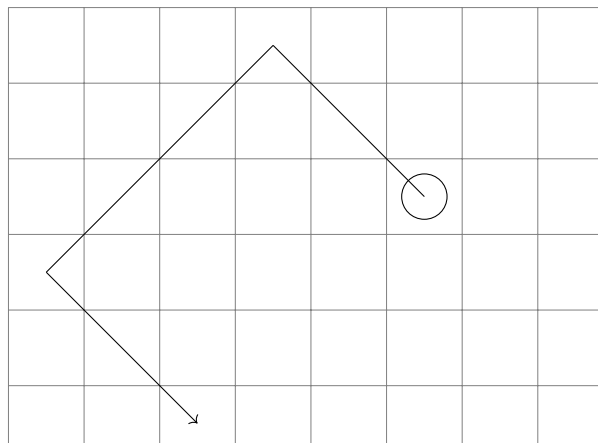
2. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög (az ábécé szomszédos betűi a hatszög szomszédos csúcsait jelölik) AC átlójának felezőpontja G , CE átlójának felezőpontja H , AD átlójának felezőpontja I . Hányadrésze az $ABCHIG$ hatszög területe az $ABCDEF$ hatszög területének? (A szabályos hatszög minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.)


Az AC szakasz két részre bontja az $ABCHIG$ hatszöget: az ABC háromszögre és a $CHIG$ négyszögre. A hatszög szimmetriája miatt az ABC háromszöggel egybevágó a CDE és az EFA háromszög is, és ha az AE szakasz felezőpontját J jelöli, a $CHIG$ négyszög egybevágó az $AGIJ$ és az $EJIH$ négyszöggel. Ezek alapján a kért arány $1/3$.



Második megoldás. Vegyük észre, hogy ha a kérdéses hatszöget elforgatjuk az I pont körül 120° -kal és 240° -kal, akkor ezek és az eredeti hatszög hézagmentesen és átfedés nélkül lefedi az $ABCDEF$ hatszöget. Indoklás: legyen J az AE átló felezőpontja. Ekkor a 120° -os forgatásnál A képe C , B képe D , C képe E , G képe H , mert AC képe CE , és I képe I , tehát $ABCHIG$ képe $CDEJIH$. Hasonlóan látható, hogy $ABCHIG$ hatszög 240° -os elforgatottja $EFAGIJ$, tehát a kért arány $1/3$. 

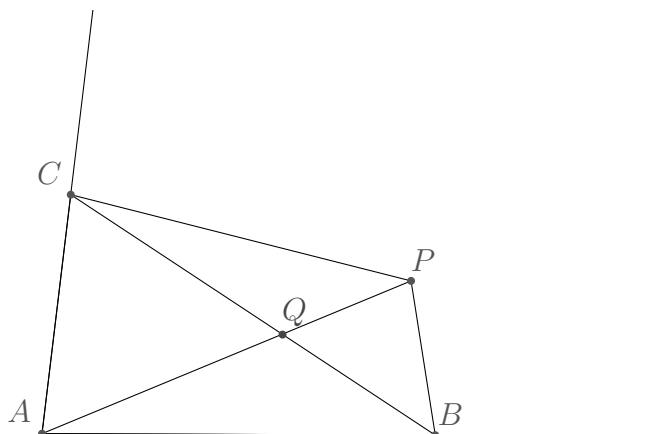
3. Egy 10×10 -as négyzetrács egy mezőjén egy futó áll. A futó a sakk szabályai szerint mozog átlós irányban, a tábla szélén egy biliárdgolyóhoz hasonlóan visszapattan. Van-e olyan mező, ahonnan indulva a futó be tud járni 500 mezőt?



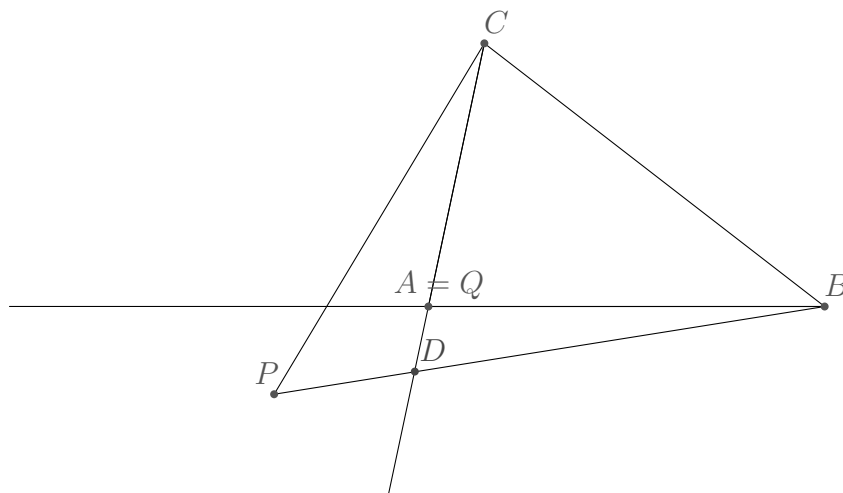
Színezzük ki sakktáblaszerűen a táblát. Világos, hogy a futó végig azonos színű mezőket jár be. Ha tehát a futó az 500 mezőt jár be, akkor valamelyik színű mezőket jár be az összes mezőt. Tegyük fel, hogy a bal alsó mező fekete. Ekkor a bal felső mező fehér. Ha tehát a futó valamelyik színű mezőket jár be az összeset, akkor járni fog a tábla egyik sarkában. Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy ez mondjuk a bal alsó. Ha a futó valamelyik mezőből indulva eljut a bal alsó sarokba, akkor ezt az utat visszafelé követve azt látjuk, hogy a bal alsó sarokból is el lehet jutni ehhez a mezőhöz. A bal alsó mezőből elindulva 100 mezőt jár be a futó, mert a századikként érintett mező éppen a jobb felső. Az eddigieket összefoglalva, ha amíg a futó eljut útja során a bal alsó sarokba, csak ezen 100 mezőn járhat, és az útját a bal alsó sarokból folytatva szintén csak ezen a 100 mezőn járhat, ami bizonyítja, hogy nem járhat be a futó az útja során 500 mezőt. 


4. Adott az ABC háromszög síkjában, a háromszögen kívül egy P pont. Mutassuk meg, hogy lehet találni olyan Q pontot az ABC háromszög belsejében vagy kerületén, amelyre $AQ + BQ + CQ < AP + BP + CP$.

A háromszögen kívül lévő P pont vagy a háromszög egyik szögének szögtartományába esik (a háromszögen kívül, de a szögtartomány határát megengedve), vagy az egyik szög csücszögének tartományába esik (a tartomány belsejébe). Ha a háromszög egyik szögének tartományába, mondjuk az A csücsznél lévő szög tartományába esik a P , kössük össze A -t és P -t, és nézzük meg, hol metszi el ez a szakasz a BC oldalt. Legyen ez a pont Q . Világos, hogy $AQ < AP$, és a háromszög-egyenlőtlenség alapján $BQ + CQ = BC < BP + CP$ (a P nem eshet a BC oldal egyenesére), így ezeket összeadva $AQ + BQ + CQ < AP + BP + CP$.



Ha a háromszög egyik szöge csúcshögének tartományába esik P , essen mondjuk az A csúcshögének tartományába. Ekkor legyen $Q = A$. Hosszabbítsuk meg a CA szakaszt A -n túl, és ez messe a PB szakaszt a D pontban. A háromszög egyenlöttség alapján $DB + DA > BA = BQ$, azaz $DB + DC = DB + DA + AC > BQ + AC = BQ + CQ$, és $PD + PC > DC$, vagyis $BP + CP = PD + DB + PC > DB + DC > BQ + CQ$, és így kész vagyunk, mert $AQ = 0$.



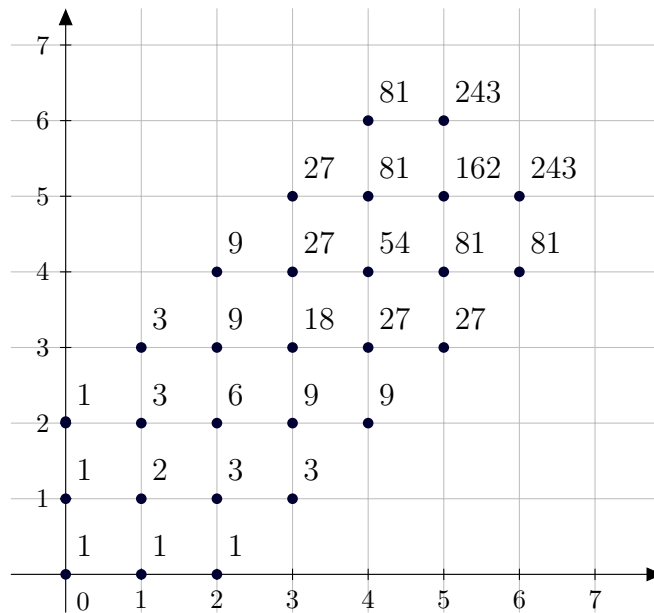
Megjegyzés. Egy másik lehetséges befejezés a második esetben: mivel $\angle PAC + \angle PAB > 180^\circ$, így legalább az egyik tompaszög. Legyen mondjuk $\angle PAC > 90^\circ$. Ekkor a PAC háromszögben az A csúcshal szemközti oldal lesz a leghosszabb, azaz $PC > AC$, a háromszög-egyenlöttség alapján pedig $PA + PB > AB$, és ezek összeadásával megkapjuk, hogy $Q = A$ jó választás. 

5. Egy vízilabda-mérkőzést izgalmasnak mondunk, ha a meccs során egyik csapat sem vezetett két gólnál nagyobb különbséggel. Egy alkalommal a Magyarország–Szerbia mérkőzésen összesen 11 gól esett. Hányféle sorrendben eshettek a gólok, ha a meccs izgalmas volt? (Két sorrend különböző, ha van olyan sorszámú gól, amit nem ugyanaz a csapat szerzett az egyik sorrendben, mint a másikban.)

Első megoldás Tegyük fel, hogy az első gólt a magyar csapat dobta. A következő két gól után vagy a magyar csapat fog egy góllal vezetni, vagy a szerb, az előbbire 2 lehetőség, az utóbbira 1 lehetőség van. A következő két gólra is fennáll ugyanez (vagy a fordítottja, ha a szerb csapat átvette a vezetést), vagyis megint háromféle lehet ez a két gól. Ez folytatható, és az összes olyan lejátzás izgalmas meccset fog eredményezni, ahol az első gól tetszőleges, de az ezután következő kétgólos csoportokban az éppen vezető csapat nem duplázik, tehát a lehetőségek száma $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 486$.

Második megoldás. Először nézzük azt az esetet, ha a játék során nem volt döntetlen állás. Ekkor valamelyik csapat két góllal kezdett, aztán csak felváltva jöhettek a gólok, különben lett volna döntetlen vagy a két góllal kezdő csapat vezetett volna 3 góllal is, azaz így csak kétféle eset lehetséges. Ha a játék során egy döntetlen állás volt, az előzőhöz hasonlóan látható, hogy a döntetlenig, majd a döntetlen után is kétféle lehetett a játék lefolyása. A döntetlen eredményt ötféle módon lehet megválasztani, ez tehát összesen 20 eset. Ha a játék során két döntetlen állás volt, ezt a két döntetlen állást 10-féle módon tudom kiválasztani, majd a döntetlenek között, illetve az első döntetlenig és a második döntetlen után is kétféle lehetett a játék lefolyása, ez tehát 80 eset. Hasonlóan látható, hogy 3 döntetlennél 160 eset, 4 döntetlennél 160 eset, 5 döntetlennél pedig 64 eset van. A lehetőségek száma tehát $2 + 20 + 80 + 160 + 160 + 64 = 486$.

Harmadik megoldás. A koordináta-rendszerben jelöljük be azokat a pontokat, melyek koordinátái a mérkőzés folyamán előfordulhattak mint részeredmények (ilyenek pl. a $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$ stb. pontok). Minden ponthoz írjuk oda, hogy hányféleképpen következhetett be a neki megfelelő részeredmény. A kitöltési szabály értelemszerű, egy ponthoz írt érték megegyezik a tőle balra és lefelé lévő szomszédjához írt értékek összegével (ha csak egy szomszédja van, akkor azt az értéket írjuk hozzá is). Mivel a lehetséges végeredmények, a 6-5 és az 5-6, egyaránt 243-féleképpen következhet be, a végeredmény: 486.



Negyedik megoldás (vázlat). Próbáljuk azt megszámlálni, hogy hány rossz eset van, vagyis amikor valamelyik csapat vezetett a meccs során legalább 3 góllal.


Ha a meccs során volt 3-0 az eredmény, ez $2^9 = 512$ darab lehetőség: kiválasztjuk, melyik csapat dobott az elején 3 gólt, a maradék nyolc gól pedig tetszőleges. Ha a meccs során 4-1 volt az első eredmény, amikor valamelyik csapat 3 góllal vezetett: az első 5 gólra adódó $2 \cdot \binom{5}{1}$ lehetőségéből lejön $2 \cdot 2$: vagyis az első 5 gólra 6 lehetőség van. A maradék 6 gól tetszőleges, ez tehát $6 \cdot 2^6 = 384$ lehetőség. Ha a meccs során 5-2 volt az első eredmény, amikor valamelyik csapat 3 góllal vezetett: az első 7 gólra adódó $2 \cdot \binom{7}{2}$ lehetőségéből lejön $2 \cdot \binom{4}{2} + 6 \cdot 2$: vagyis az első hét gólra 18 lehetőség van. A maradék 4 gól tetszőleges, ez tehát $18 \cdot 2^4 = 288$ lehetőség. Ha a meccs során 6-3 volt az első eredmény, amikor valamelyik csapat 3 góllal vezetett: az első 9 gólra adódó $2 \cdot \binom{9}{3}$ lehetőségéből lejön $2 \cdot \binom{6}{3} + 6 \cdot \binom{4}{2} + 18 \cdot 2 + 2 \cdot 1$, vagyis az első 9 gólra 54 lehetőség van. A maradék 2 gól tetszőleges: ez tehát $54 \cdot 2^2 = 216$ lehetőség. Végül ha a meccs 7-4-re végződött, de korábban egyik csapat sem vezetett 3 góllal, a $2 \cdot \binom{11}{4}$ esetből lejön $2 \cdot \binom{8}{4} + 6 \cdot \binom{6}{3} + 18 \cdot \binom{4}{2} + 54 \cdot \binom{2}{1} + 2 \cdot \binom{8}{1} + 6 \cdot \binom{6}{0}$, ami 162 lehetőség. A végeredmény tehát $2048 - 512 - 384 - 288 - 216 - 162 = 486$.



5. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Anita, Viola, Szilárd és Dénes 4 különböző emeleten laknak egy 10 emeletes épületben: mindegyikük a 7., 8., 9., 10. emeletek valamelyikén. Amikor kérdeztem őket, ki melyiken lakik, Dénes válasz nélkül elfutott, a többiek pedig kicsit megtérfáltak. Ezeket állították:
- Anita:** „Én a hetediken, Dénes a nyolcadikon.”
- Viola:** „Én a kilencediken, Anita a nyolcadikon.”
- Szilárd:** „Én a nyolcadikon, Viola a tizediken.”
- Rémült arcomat látva nevetgélve hozzátették, mindegyiküknek pontosan az egyik kijelentése igaz. Vajon ki melyik emeleten lakik?

Ha Anita első állítása igaz, akkor ő a hetediken lakik. Így Viola második kijelentése hamis, tehát az első igaz, így Viola a kilencediken lakik. Ekkor Szilárd második kijelentése hamis, tehát csak az első lehet igaz, így ő a nyolcadikon lakik. Mivel mind különböző emeleten laknak, Dénes csak a tizediken lakhat. Ellenőrizhető, hogy ekkor mindenkinek az első kijelentése igaz, a második hamis. Ha Anita első állítása hamis, akkor a második igaz, tehát Dénes a nyolcadikon lakik. Ekkor viszont Szilárd nem lakhat a nyolcadikon, tehát csak a második állítása lehet igaz, így Viola a tizediken lakik. Ekkor viszont Violának nem igaz az első kijelentése, tehát a másodiknak igaznak kell lennie, azaz Anita a nyolcadikon lakik. Ez viszont ellentmondás, mivel Dénes és Anita nem lakhatnak mindketten a nyolcadikon. Tehát az egyetlen lehetőség, hogy Anita a 7., Viola a 9., Szilárd a 8., Dénes a 10. emeleten lakik. 

2. Van egy piros és egy zöld korongunk. Mindkét korong mindkét oldalán van egy-egy pozitív egész szám, a piros korong egyik oldalán a 2000, a zöld korong egyik oldalán a 18 található. A korongokat az összes lehetséges módon az asztallapra helyezve a korongokon látható számok összegére pontosan négyféle különböző eredményt kaphatunk, és ezek ráadásul egymást követő pozitív egész számok. Milyen számok állhatnak a korongok túlsó oldalán? Adj meg minden lehetőséget!

Legyen a 2000-es korong másik oldalán x , a 18-as korong másik oldalán y . Ekkor a négy összeg 2018, $2000 + y$, $18 + x$ és $x + y$. A lehetséges szomszédos szám-négyesek, azon belül pedig y lehetséges értékei szerint vizsgáljuk az eseteket. (y nem lehet 18, x nem lehet 2000.)

- A négy összeg: 2015, 2016, 2017, 2018. y lehetséges értékei: 15, 16, 17.
 - $y = 15$, ekkor $x = 2001$ vagy $x = 2002$, de ezekhez 18-at adva túl sokat kapunk.
 - $y = 16$, ekkor $x = 1999$ vagy $x = 2001$, itt az első eset jó: $x = 1999$, $y = 16$.
 - $y = 17$, ekkor $x = 1998$ vagy $x = 1999$, itt is az első eset jó: $x = 1998$, $y = 17$.
- A négy összeg: 2016, 2017, 2018, 2019. y lehetséges értékei: 16, 17, 19.
 - $y = 16$, $x = 2001$.
 - $y = 17$ nem ad megoldást.
 - $y = 19$, $x = 1998$.
- A négy összeg: 2017, 2018, 2019, 2020. y lehetséges értékei: 17, 19, 20.
 - $y = 17$, $x = 2002$.

– $y = 19$ nem ad megoldást.

– $y = 20, x = 1999$.

- A négy összeg: 2018, 2019, 2020, 2021. y lehetséges értékei: 19, 20, 21.

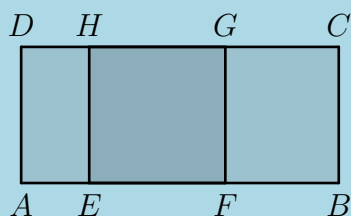
– $y = 19, x = 2002$.

– $y = 20, x = 2001$.

– $y = 21$ nem ad megoldást.



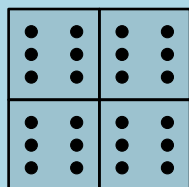
3. Az $ABCD$ téglalap AB oldalán felvettük az E és F pontokat, CD oldalán pedig a G és H pontokat az ábra szerint. Tudjuk, hogy $EFGH$ négyszög egy négyzet, valamint azt, hogy az AF szakasz 63 cm, a CH szakasz 77 cm hosszú. Mennyi az $ABCD$ téglalap kerülete?



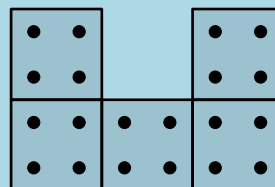
Mivel $CH = BE$, ezért $140 = 63 + 77 = AF + EB = AB + EF$ éppen a négyzet oldalával több, mint a téglalap AB oldala. De a négyzet oldala egyenlő a téglalap AD oldalával. Ezért $2 \cdot 140 = 280$ éppen a keresett kerület.



4. Tökéletesen egyforma szabályos dobókockákból építettünk egy nem feltétlen összefüggő építményt. (A szabályos dobókockán a szemközti lapokon mindig összesen 7 pötty van.) Az ábra mutatja, hogy mit látunk belőle oldalról, illetve előlről nézve.



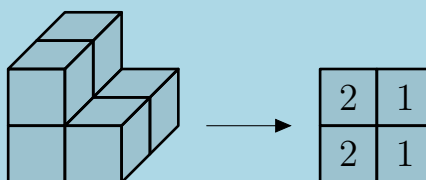
Építményünk oldalról



Építményünk előlről

Tudjuk azt is, hogy az építmény a lehető legkevesebb kocka felhasználásával építettük meg.

- a) Adj meg egy lehetséges alaprajzot, és írd bele a mezőkbe, hogy ott hány kocka van egymáson, hasonlóan az alábbi ábrához!



Egy másik építmény és a hozzá tartozó alaprajz

- b) A lehető legkevesebb dobókockából elkészített építményünk üvegasztalon áll. Alulról, felülről, előlről, hátulról, bal oldalról és jobb oldalról nézve egyaránt igaz, hogy az éppen látható lapok mindegyikén ugyanannyi pötty van. Hány pötty látható ebből a 6 irányból összesen?

Az előlnézeten látható öt négyzet öt különböző kockához tartozik, ezért legalább öt a kockák száma. Ennyi lehet is, például ezekkel az alaprajzokkal:

2	0
0	1
0	2

2	0
1	0
0	2

0	2
1	0
2	0

0	2
0	1
2	0

Bármelyik helyes alaprajz megadása: **2 pont**.

Előlről mind az 5 kocka látszik, ezért hátulról nézve is mind az 5-nek látszania kell. Mivel a szemközti lapokon összesen 7 pötty van, előlről és hátulról összesen 35 pöttyöt látunk. Bal és jobb oldalról egyaránt 4 kocka látszik. Legalább 3 kocka mindkét irányból látszik (hiszen összesen csak 5 kocka van), és mivel az egyik oldalon csupa 6-os van, a másikon csupa 1-esnek kell lennie. Ez összesen $4 \cdot 7 = 28$ pötty. Az előlnézeten minden kockát látunk, így egyértelmű, hogy alulról és felülről nézve egyaránt 3 kocka látszik, és van egy olyan, ami alulról és felülről is látható. Emiatt az egyik irányból csupa 2-est, a másiból csupa 5-öst kell látnunk, ez így $3 \cdot 7 = 21$ pötty. Összesen tehát $35 + 28 + 21 = 84$ pötty látható a hat irányból.



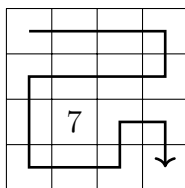
5. Egy 4×4 -es táblázatot az itt látható módon kitöltöttünk számokkal. A táblázat bal felső sarkából indulva lépkedhetünk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:

- mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
- egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
- a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie.


9	10	4	8
12	6	16	2
5	7	1	14
15	13	11	3

Legfeljebb mennyi lehet a séta során bejárt mezőkre írt számok összege?

Első megoldás. Ha a táblázatot sakktáblaszerűen színezzük, akkor a séta első és utolsó mezője azonos színű. Mivel a séta során felváltva lépünk világos és sötét mezőkre, ezért a séta eggyel többet érint a kiindulóval azonos színű mezőkből. Emiatt legalább egy kimarad a másik színű mezőkből. Ezek közül a legkisebb értékű a 7-es. Ezért a lehetséges összegek mindegyike legalább 7-tel kevesebb az összes szám összegénél. Az, hogy az összes szám összegéből csak 7-et veszítsünk, el is érhető, például így:




A bejárt mezőkre írt számok összege $1 + 2 + \dots + 16 - 7 = \frac{16 \cdot 17}{2} - 7 = 136 - 7 = 129$.

Második megoldás. Azt állítjuk, a lehető legnagyobb összeg a 129. Ezzel az összeggel egy lehetséges bejárást mutat az előző megoldásban szereplő ábra. Ha létezik ennél nagyobb összegű bejárást, akkor abban a kihagyott mezők összértéke legfeljebb 6 lehet. Vagyis a 7, 8, ..., 16 értékű mezők mindegyikére rá kell lépni, és természetesen a 3-asra is. Ahhoz, hogy a 15-ösön át tudjunk haladni, rá kell lépni az 5-ösre is. Ahhoz, hogy a 8-ason át tudjunk haladni, rá kell lépni a 4-esre és a 2-esre is. Ahhoz, hogy a 10-esre és a 12-esre is rá tudjunk lépni, nem hagyható ki a 6-os mező. Hasonlóan, a 11 és a 14 érintése miatt nem hagyható ki az 1-es sem. Tehát csak úgy lehetne nagyobb összeget kapni, ha az összes mezőn áthaladnánk. Ilyen séta azonban nincs, hiszen a 9-estől a 3-asig csak páros számú lépéssel mehetünk, az összes mező egyszeri bejárásához azonban 15 lépést kellene tenni. 

5. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Van 10 különböző számkártyánk 0-tól 9-ig. 5 gyerek (Anna, Bea, Cili, Dóra, Enikő) mindegyike húz két-két kártyát, majd összeilleszti egy-egy kétjegyű számmá. Ezután a következő igaz mondatok hangzanak el:
Anna: Az én számom osztható 26-tal.
Bea: Az én számom osztható 20-szal.
Cili: Az én számom osztható 16-tal.
Dóra: Az én számom osztható 28-cal.
 Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható: (a) 12-vel (b) 13-mal?


Ha Enikő száma osztható lenne 12-vel, akkor mind az öt kétjegyű szám páros lenne, tehát páros számjegyre végződne. Mivel csak 5 páros számkártya van, a tízesek helyén mindenütt páratlan számnak kell állnia. Ekkor viszont Bea száma nem lehetne osztható 20-szal. Az viszont lehetséges, hogy Enikő száma osztható legyen 13-mal. Legyen Anna száma $78 = 3 \cdot 26$, Beáé $40 = 2 \cdot 20$, Cilié $32 = 2 \cdot 16$, Dóráé $56 = 2 \cdot 28$ és Enikőé $91 = 7 \cdot 13$. Ekkor minden számjegyet pontosan egyszer használtunk fel. 

2. Töltsd ki az ábrán látható kilenc mezőt az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok mindegyikének egyszeri felhasználásával úgy, hogy a sorokban és az oszlopokban is a megadott eredményt adják a műveletsorok! Írd le azt is, hogyan határoztad meg a számokat!

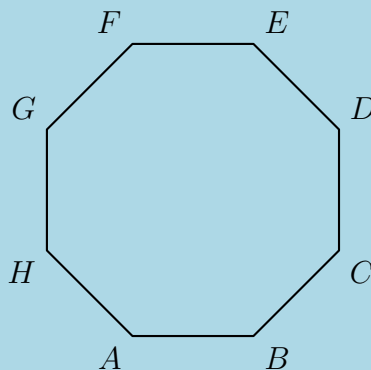
$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{cc} \square & \times & \square \\ - & & \times \end{array} \right) / \square = 2 \\ \left(\begin{array}{cc} \square & + & \square \\ + & & \times \end{array} \right) / \square = 1 \\ \left(\begin{array}{cc} \square & - & \square \\ \underline{\quad} & & \underline{\quad} \end{array} \right) \times \begin{array}{c} \square \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{array} = 21 \\ \begin{array}{ccc} 8 & 48 & 22 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{cc} \boxed{4} & \times & \boxed{3} \\ - & & \times \end{array} \right) / \boxed{6} = 2 \\ \left(\begin{array}{cc} \boxed{1} & + & \boxed{8} \\ + & & \times \end{array} \right) / \boxed{9} = 1 \\ \left(\begin{array}{cc} \boxed{5} & - & \boxed{2} \\ \underline{\quad} & & \underline{\quad} \end{array} \right) \times \begin{array}{c} \boxed{7} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{array} = 21 \\ \begin{array}{ccc} 8 & 48 & 22 \end{array} \end{array}$$

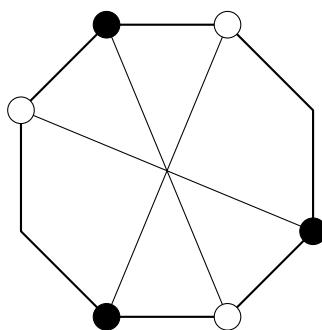
A jobb alsó mezőbe $3 \cdot 7 = 21$ miatt 3 vagy 7 kerülhet, de a 3 kevés, mert akkor föltte 19-et kellene két számjegy összegeként megkapni, ami lehetetlen. Tehát jobb alulra a 7

kerül. Fölötte az összeg 15, ami csak $9 + 6$ alakban állhat elő. A 9 nem lehet legfelül, mert mellette az első két szám szorzata csak úgy lehetne 18, hogy $3 \cdot 6$, de a 6 már foglalt az utolsó oszlopban. Tehát jobb felül van a 6, alatta a 9. Az alsó sor zárójelében a különbség értéke 3. Ez lehet $8 - 5$, $5 - 2$ vagy $4 - 1$. Az utolsó eset kiesik, mert akkor középen két szám szorzata lenne $48 = 6 \cdot 8$, de a 6 már foglalt. Az első eset is kiesik, mert 48 nem osztható 5-tel. A bal alsó és középső alsó mezőkre így marad az 5 és a 2. A középső sorban 9 kell a zárójelben, ez pedig már csak $1 + 8$ alakban áll elő és a 8 van középen, különben nem jöhetne ki 48 a középső oszlop szorzatára. Innen már egyértelmű a befejezés. 

3. Az ábrán látható szabályos nyolcszög csúcsai közül szeretnénk kiválasztani hármat úgy, hogy közülük semelyik kettő ne legyen szomszédos, és semelyik kettő ne legyen átellenes. Hány különböző kiválasztás lehetséges? (Két kiválasztás különböző, ha van olyan csúcs, ami az egyikben szerepel, de a másikban nem.)



Nevezzük átmérőnek a nyolcszög leghosszabb átlóit. A feltételek miatt a kiválasztott pontok csak különböző átmérők végpontjai lehetnek. Ezért két lépésben végezzük a kiválasztást: először három átmérőt választunk, utána pedig minden átmérő valamelyik végpontját. A négy átmérő közül hármat négyféle módon választhatunk (aszerint, hogy melyik marad ki) és ezek mindig „szomszédosak”, a következő ábrán látható értelemben. A három kiválasztott átmérő végpontjait csak kétféle módon választhatjuk (az ábrán vagy a teli vagy az üres körök jók).

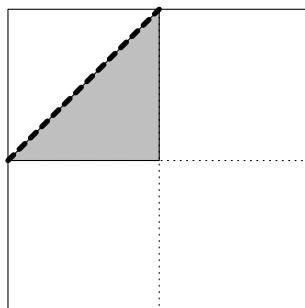


Tehát összesen $4 \cdot 2 = 8$ lehetőség van.



4. Adott egy négyzet. Dorina beszínezte a négyzet síkjában azokat a pontokat, amelyek távolsága a négyzet középpontjától legfeljebb akkora, mint a távolsága a négyzet legközelebbi csúcsától. Hányad része a Dorina által beszínezett terület a négyzet területének?

A négyzet szemközti oldalfelező pontjait összekötő szimmetriatengelyek négy negyedre vágják a négyzet síkját. Egy-egy ilyen részbe egy négyzet-csúcs esik és a sík-rész pontjai ehhez a négyzet-csúcshoz vannak legközelebb. Ha egy ilyen negyedet nézünk, akkor az eredeti négyzet középpontjához közelebb eső pontok a szaggatott átlótól a négyzet középpontja felé eső pontok.




Mind a négy negyedre elmondva ezt az érvelést, éppen a az eredeti négyzet felét fedik le a feladat feltételének megfelelő pontok. 

6. osztály, 1. nap


Országos döntő

1. Egy számot emelkedőnek nevezünk, ha balról jobbra olvasva minden számjegye nagyobb az előtte állónál. (Például a 36 és a 257 emelkedő számok.) Hány olyan négyjegyű emelkedő szám van, amelyet 5-tel megszorozva emelkedő számot kapunk?

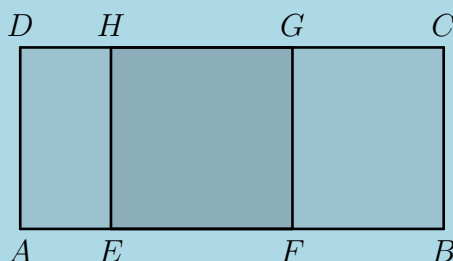
Jelöljön $x = \overline{abcd}$ egy megfelelő emelkedő számot. Ezáltal d -nek legalább 4-nek kell lennie. Egy 5-tel osztható szám végződése vagy 0, vagy 5, de tekintettel arra, hogy $5x$ emelkedő, így annak 5-re kell végződnie. Ebből az is következik, hogy d páratlan, vagyis lehetséges értékei: 5, 7 vagy 9.


Egy négyjegyű szám ötszöröse vagy négyjegyű, vagy ötjegyű. Amennyiben $5x$ ötjegyű, úgy csakis az 12345 jöhet szóba, hiszen 5-re végződik. Ekkor $x = 2469$, mi emelkedő, azaz teljesíti a feltételeket. Ha $5x$ négyjegyű, akkor világos, hogy a -nak 1-nek kell lennie. Viszont ekkor $5x$ első jegye legalább 5 lenne, s mivel az utolsó jegye szintén 5, nem lenne emelkedő. Csak egy megfelelő négyjegyű szám van tehát, a 2469. 

2. Rita, Sára és Tamara egy körasztal körül ülnek, előttük egy-egy kupac kavics (nem feltétlen egyforma kupacok). Mindhárman egyszerre a saját kupacuk egyharmadát a tőlük jobbra ülőnek, egyharmadát a tőlük balra ülőnek átadják, a többit megtartják. (Ezt mindhárman pontosan meg tudják tenni.) Megmondható-e, hogy most melyikük előtt hány db kavics van, ha csak azt tudjuk, hogy az asztalon összesen 876 db kavics hever?

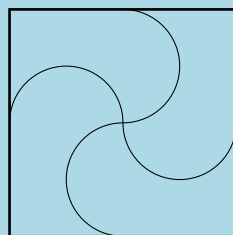
Miután átrakta mindenki a saját kupaca egy-egy harmadát a tőle jobbra, illetve balra ülőnek, világos, hogy mindenkinél mindhármuk kupacának egyharmada lesz, vagyis az összes kavics egyharmada. Tehát mindhármuk előtt végül $876/3 = 292$ kavics lesz. 

3. Az $ABCD$ téglalap AB oldalán felvettük az E és F pontokat, CD oldalán pedig a G és H pontokat az ábra szerint. Tudjuk, hogy $EFGH$ négyszög egy négyzet, valamint azt, hogy az AF szakasz 63 cm, a CH szakasz 77 cm hosszú. Mennyi az $ABCD$ téglalap kerülete?




A CH szakasz hossza megegyezik az EB szakasz hosszával. Világos, hogy ha az AF szakasz hosszát és az EB szakasz hosszát összeadjuk, akkor az kapott érték megegyezik az AB szakasz hosszának és az $EFGH$ négyzet oldalának az összegével. Másrészt ez az összeg éppen a téglalap kerületének a fele, hiszen a BC szakasz hossza éppen az $EFGH$ négyzet oldalhosszával egyenlő. A téglalap kerülete tehát: $2 \cdot (63 + 77) = 280$. 

4. Anna játékkészletében az ábrán látható mintájú színes lapok szerepelnek. A négy egybevágó tartomány mindegyike a kék, sárga, zöld vagy piros színek valamelyikével van színezve. A készletben csak olyan lapok vannak, aminél két tartomány különböző színű, ha van közös határvonala. Hány különböző lapot tartalmazhat legfeljebb Anna készlete? (A forgatással egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek.)



Világos, hogy egyik lap sem lehet egyszínű.

Ha két színnel van kiszínezve egy lap, azt csakis egyféleképpen valósíthatjuk meg, ha felváltva színezzük. Mivel a két szín kiválasztása 6-féleképpen történhet, így 6 lap van, ami

kétszínű. Ha három színnel van kiszínezve egy lap, az csak úgy valósulhat meg, hogy két szemben lévő (határvonalaktól mentes) tartomány egyszínű, a másik két szemben lévő pedig a másik két színű. A forgatás miatt az utóbbiak színezésének sorrendje tetszőleges. Azt, hogy melyikből legyen két szín, négyféleképpen választhatjuk ki, és hogy mi legyen a másik két szín, háromféleképpen (három színből melyik maradjon ki). Így összesen $4 \cdot 3 = 12$ lap van, ami háromszínű. Ha mind a négy színnel van kiszínezve egy lap, akkor az 6-féleképpen történhet. Ennek belátásához színezzük ki az egyik tartományt tetszőlegesen. A másik három tartományt 3!-féleképpen színezhethetjük ki. Könnyen látható, hogy ezzel az összes színezést megkaptuk, és egyik színezés sem vihető át a másikba forgatással. Összesen tehát $6 + 12 + 6 = 24$ lapból áll Anna játékkészlete. 

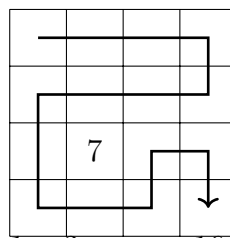
5. Egy 4×4 -es táblázatot az itt látható módon kitöltöttünk számokkal. A táblázat bal felső sarkából indulva lépkedhetünk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:

- mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
- egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
- a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie.


9	10	4	8
12	6	16	2
5	7	1	14
15	13	11	3

Legfeljebb mennyi lehet a séta során bejárt mezőkre írt számok összege?

Első megoldás. Ha a táblázatot sakktáblaszerűen színezzük, akkor a séta első és utolsó mezője azonos színű. Mivel a séta során felváltva lépünk világos és sötét mezőkre, ezért a séta eggyel többet érint a kiindulóval azonos színű mezőkből. Emiatt legalább egy kimarad a másik színű mezőkből. Ezek közül a legkisebb értékű a 7-es. Ezért a lehetséges összegek mindegyike legalább 7-tel kevesebb az összes szám összegénél. Az, hogy az összes szám összegéből csak 7-et veszítsünk, el is érhető, például így:



A bejárt mezőkre írt számok összege $1 + 2 + \dots + 16 - 7 = \frac{16 \cdot 17}{2} - 7 = 136 - 7 = 129$.


Második megoldás. Azt állítjuk, a lehető legnagyobb összeg a 129. Ezzel az összeggel egy lehetséges bejárást mutat az előző megoldásban szereplő ábra. Ha létezik ennél nagyobb összegű bejárást, akkor abban a kihagyott mezők összértéke legfeljebb 6 lehet. Vagyis a 7, 8, ..., 16 értékű mezők mindegyikére rá kell lépni, és természetesen a 3-asra is. Ahhoz, hogy a 15-ösön át tudjunk haladni, rá kell lépni az 5-ösre is. Ahhoz, hogy a 8-ason át tudjunk haladni, rá kell lépni a 4-esre és a 2-esre is. Ahhoz, hogy a 10-esre és a 12-esre is rá tudjunk lépni, nem hagyható ki a 6-os mező. Hasonlóan, a 11 és a 14 érintése miatt nem hagyható ki az 1-es sem. Tehát csak úgy lehetne nagyobb összeget kapni, ha az összes mezőn áthaladnánk. Ilyen séta azonban nincs, hiszen a 9-estől a 3-asig csak páros számú lépéssel mehetünk, az összes mező egyszeri bejálásához azonban 15 lépést kellene tenni. 

6. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Van 10 különböző számkártyánk 0-tól 9-ig. 5 gyerek (Anna, Bea, Cili, Dóra, Enikő) mindegyike húz két-két kártyát, majd összeszorozza a két számot. Ezután a következő igaz mondatok hangzanak el:
- Anna:** „Az én számom osztható 26-tal.”
Bea: „Az én számom osztható 20-szal.”
Cili: „Az én számom osztható 27-tel.”
Dóra: „Az én számom osztható 28-cal.”
- a) Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható 12-vel?
b) Lehetséges-e, hogy Enikő száma osztható 18-cal?

Enikő száma lehetséges, hogy osztható 12-vel: Anna kártyái a 0 és az 1, Beáé a 4 és az 5, Cilié a 3 és a 9, Dóráé a 7 és a 8, Enikőé pedig a 2 és a 6. Ha egy szám oszt egy másikat, akkor az összes prímosztója is osztja azt, és más prím nem. Jelölje rendre a kapott számokat a, b, c , illetve d .

Mivel a 26 osztja a -t, így a 13 is. Mivel a 13 nem szerepel a számkártyákon, így a csakis a 0 lehet, vagyis Anna egyik kártyáján a 0 szerepel. A 27 osztja c -t, így Cili egy kártyáján a 9-es, a másikon pedig a 3-as vagy 6-os áll. Mivel a 20 osztja b -t, így b értéke vagy 20, vagy 40. Az első esetben Bea kártyáin a 4-es, illetve az 5-ös áll, a második esetben pedig az 5-ös és a 8-as. Hasonló érveléssel kapjuk, hogy mivel a 28 osztja d -t, így d vagy 28, vagy pedig 56. Az első esetben Dóra kártyáin a 4-es és a 7-es szerepel, a második esetben pedig a 7-es és a 8-as. Így ezek a kártyák maradhatnak: az 1, a 2 és a 3 vagy a 6. Ezek közül két számnak a szorzata csak akkor lehetne osztható 18-cal, ha az egyik a 3-as a másik a 6-os kártya lenne. Ez a kettő viszont nem lehet egyszerre Enikőnél, mivel a kettő közül az egyik szám Cilinél van. 

2. Az alább látható táblázatot az következő szabályoknak megfelelően kell kitölteni.
- Bármelyik mezőbe az 1-től 9-ig az egész számok valamelyikét írhatod.
 - Egy oszlopban, ill. egy sorban legfeljebb egyszer használhatsz fel egy számot. (A táblázatban, akár többször is.)
 - A sorok mellett, ill. az oszlopok fölött az abban a sorban, ill. oszlopban szereplő számok összegét adtuk meg.

	23	21	7
20			
18			
13			

Mutasd meg, hogy csak egy kitöltés lehetséges!

A helyes megoldás megmutatása:

	23	21	7
20	9	7	4
18	8	9	1
13	6	5	2

A 7 csak egyféleképpen írható fel összeg alakban: $1 + 2 + 4$.

Viszont a 20 felbontásában nem szerepelhet sem az 1, sem a 2. Így a jobb felső mezőbe csakis a 4 kerülhet. A 23 csak egyféleképpen bontható fel: $9 + 8 + 6$.

A bal felső mezőbe nem kerülhet a 6, különben a középső oszlop középső mezőjébe 10-et kellene írunk, ami ellentmondás. De 8-at sem írhatunk, mert akkor az előbb említett mezőbe szintén a 8 kerülne.

Ezek alapján a felső sor már ki is alakult.

	23	21	7
20	9	7	4
18			
13			

Ha a jobb oldali oszlop középső mezőjébe a 2-t íránk, akkor a középső sor maradék két eleme csakis a 7 és a 9 lehetne. De a bal oldali oszlop kimaradt két eleme a 8 és a 6 valamilyen sorrendben. Ez pedig azt jelenti, hogy a jobb oldali oszlop középső mezőjébe az 1 kerül. Így a jobb oldali oszlop is egyértelműen kitölthető.

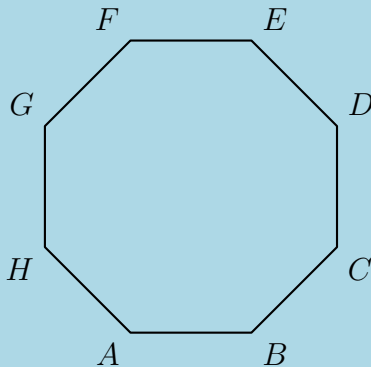
	23	21	7
20	9	7	4
18			1
13			2

Viszont ekkor a középső sor maradék két eleme nem lehet más, csak a 9 és a 8. Mivel a bal oldali oszlopban már szerepet a 9, így a középső sor is kitölthető egyértelműen.


	23	21	7
20	9	7	4
18	8	9	1
13			2

Már csak az alsó sor maradt hátra, de az ottani számok (6 és 5) triviálisan adódnak. A táblázatban minden összeg helyes, a feladatnak megfelelő kritériumok teljesülnek, és a gondolatmenetből látható, hogy más megoldás nincs.

3. Az ábrán látható szabályos nyolcszög csúcsai közül szeretnénk kiválasztani hármat úgy, hogy közülük semelyik kettő ne legyen szomszédos, és semelyik kettő ne legyen átellenes. Hány különböző kiválasztás lehetséges? (Két kiválasztás különböző, ha van olyan csúcs, ami az egyikben szerepel, de a másikban nem.)



A nyolcszögnek hosszúság szempontjából 3-féle átlója van. Legyen a legrövidebb az 1-es, a középső a 2-es, a leghosszabb pedig a 3-as típusú átló.
 A feladat értelmében olyan háromszögek csúcsait kell megkeresnünk, melyek oldalai 1-es, illetve 2-es típusú átlók. Egy átló két töröttvonalra osztja a nyolcszöget. Ezen két töröttvonalak közül a nem hosszabban szereplő oldalak darabszámát hívjuk az átló hosszának. Az 1-es típusú átlók hossza tehát 2, a 2-es típusúaké pedig 3. Világos, hogy a háromszögben szereplő átlók hosszainak az összegének 8-nak kell lenni. A 8 csak egyféleképpen bontható fel úgy összegre, hogy a tagok értéke 2 vagy 3: $8 = 2 + 3 + 3$. Vagyis egy 1-es és két 2-es típusú átló alkotja a keresett háromszögek oldalait. Ez azt jelenti, hogy a háromszögnek

pontosan az egyik csúcsából kiinduló oldalak lesznek 2-es típusú átlók. Mivel ezt a csúcsot 8-féleképpen választhatjuk ki, így a megoldás 8. 

4. Sára a következő játékot találta ki. Egy füzetlap első sorába felírt egy pozitív egészekből álló számsort. Ezután a következő sorba az előző sor minden száma helyett leírta növekvő sorrendben 1-től az adott számig az összes pozitív egészt. Majd ugyanezzel a módszerrel képezte a második sor számaiból a harmadik sor számait, és így tovább. Ha például az egyik sorban az

$$5, 1, 2, 3, 2$$

számsor szerepel, akkor a következő sorba az


$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2$$

számsort írta.

Hány számot írt Sára a 6. sorba, ha az első sorba az 1, 2, 3, 4, 5 számsort írta?

Az alábbi táblázatban az egyes sorokban lévő számok darabszámát foglaltuk össze. A kitöltési szabály a következő: a 2. sortól kezdve a k -adik cellába az előtte lévő sorban lévő, a k -nál nem kisebb sorszámú cellák összegét írjuk.

	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös
1. sor	1	1	1	1	1
2. sor	5	4	3	2	1
3. sor	15	10	6	3	1
4. sor	35	20	10	4	1
5. sor	70	35	15	5	1
6. sor	126	56	21	6	1

Sára tehát a 6 sorba $126 + 56 + 21 + 6 + 1 = \mathbf{210}$ számot írt. 

7. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Adott egy 90 egység területű nagy téglalap. Szeretnénk az oldalakkal párhuzamos vágásokkal felosztani kilenc kisebb téglalagra úgy, hogy a kapott téglalapok közül a bal felső területe 1 egység, a jobb felsőé 3, a bal alsóé 9, a középsőé pedig 10 egység legyen. Mutasd meg, hogy a nagy téglalap alakjától függetlenül mindig van ilyen felosztás, és add meg a hiányzó öt kis téglalap területének egy-egy lehetséges értékét! (Nem kell megkeresni az összes lehetséges felosztást.)

1		3
	10	
9		

Osszuk fel a téglalap vízszintes oldalait $1 : 2 : 3$, függőleges oldalait pedig $1 : 5 : 9$ arányban, és kössük össze a megfelelő osztópontokat. Az ábra jelöléseit használva a nagy téglalap területe: $(x + 2x + 3x) \cdot (y + 5y + 9y) = 6x \cdot 15y = 90xy = 90$. Ebből $xy = 1$, és a kis téglalapok területének nagysága is ellenőrizhető.

	x	$2x$	$3x$
y	1	2	3
$5y$	5	10	15
$9y$	9	18	27

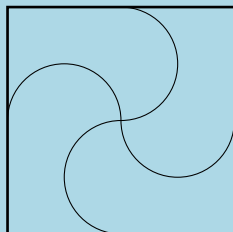



2. Egy számot emelkedőnek nevezünk, ha balról jobbra olvasva minden számjegye nagyobb az előtte állónál. (Például a 36 és a 2579 emelkedő számok.) Hány olyan háromjegyű emelkedő szám van, amelynek az ötszöröse **nem** emelkedő szám?

Egy emelkedő szám nem tartalmazhat nullát, és számjegyei különbözőek. Ilyen háromjegyű számból $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ darab van, azonban a három számjegy hat lehetséges sorrendje közül mindig pontosan egy emelkedő, tehát $504 : 6 = 84$ háromjegyű emelkedő szám van. Egy szám ötszöröse 0-ra vagy 5-re végződik. Ha 0-ra végződik, akkor biztosan nem emelkedő. Egy háromjegyű szám ötszöröse 500 és 5000 közé esik. Ha egy ilyen szám 5-re végződik, akkor csak úgy lehet emelkedő, ha négyjegyű. A négyjegyű, 5-re végződő emelkedő számok: 1235, 1245, 1345 és 2345. Ezek a 247, 249, 269 és 469 ötszöröse, amelyek mind emelkedő számok. Tehát a 84 emelkedő háromjegyű szám közül csak a fenti négynek nem emelkedő az ötszöröse, azaz **80** olyan háromjegyű emelkedő szám van, amelynek ötszöröse nem emelkedő.



3. Anna játékkészletében az ábrán látható mintájú színes lapok szerepelnek. A négy egybevágó tartomány mindegyike a kék, sárga, zöld vagy piros színek valamelyikével van színezve. A készletben csak olyan lapok vannak, aminél két tartomány különböző színű, ha van közös határvonala. Hány különböző lapot tartalmazhat legfeljebb Anna készlete? (A forgatással egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek.)



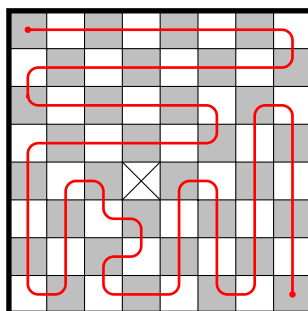
(Egyik lap sem lehet egyszínű.) Ha két színnel van kiszínezve egy lap, akkor a szemközti tartományok lesznek azonos színűek. Mivel a két szín kiválasztására a négyből 6 lehetőség van, így 6 lap van, ami kétszínű. Ha három színnel van kiszínezve egy lap, az csak úgy valósulhat meg, hogy két szemközti tartomány egyszínű, a másik két szemben lévő pedig a másik két színt kapja. Az utóbbiak sorrendje a forgatás miatt nem számít. A kétszer használt színt négyféleképpen választhatjuk ki, és hogy mi legyen a másik két szín, azt háromféleképpen. Így összesen $4 \cdot 3 = 12$ lap van, ami háromszínű. Ha mind a négy színt felhasználjuk, akkor pl. a kék tartománytól elindulva az óramutató járása szerint, az első tartomány színe 3-féle, a második (késsel szemközti) színe 2-féle lehet, az utolsó tartomány színe egyértelmű. Látható, hogy ezen lehetőségek nem forgathatók egymásba. Így négy színt használva 6 lehetőség van. Összesen tehát $6 + 12 + 6 = 24$ lapból áll Anna játékkészlete. 

4. Egy 8×8 -as táblázat mezőit kitöltjük az 1-től 64-ig terjedő pozitív egész számokkal úgy, hogy minden szám pontosan egy mezőben szerepel. Ezután a táblázat bal felső sarkából indulva sétálunk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:

- mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
- egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
- a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie.

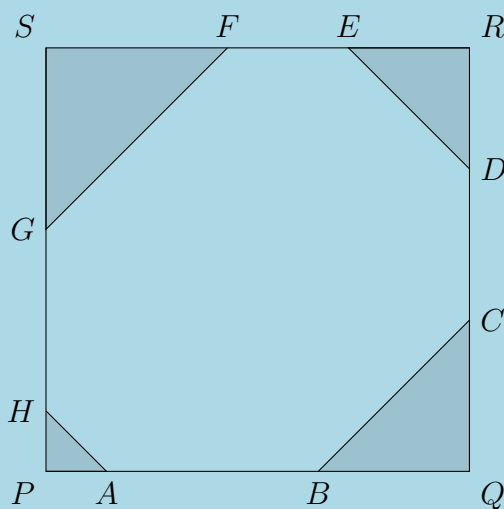
A séta során érintett mezőkön (beleértve a kiinduló- és az utolsó mezőt is) lévő számokat összeadjuk. Az összes lehetséges kitöltést és azokon az összes lehetséges sétát tekintve mennyi ennek az összegnek a legnagyobb lehetséges értéke?

Színezzük ki a táblázat mezőit sakktáblaszerűen. Legyen a bal felső mező mondjuk fekete. Mivel minden lépésben más-más színű mezőre lépünk, és végül azonos színű mezőre érkezünk, mint amilyenről elindultunk, páros számú lépést kell megtennünk. Ha az összes mezőt érintené a séta, akkor 63 lépésre lenne szükségünk, de ez páratlan. Tehát nem léphetünk rá minden mezőre, legalább egy kimarad. Az alábbi ábrán szemléltetjük, hogy elérhető, hogy pontosan egy mező maradjon ki.



Mivel minden bejárást és kitöltést tekintünk, így akkor kapjuk a lehető legnagyobb összeget, amikor a kimaradt mezőn az 1-es szám áll. Az összeg pedig: $2 + 3 + 4 + \dots + 64 = \frac{2+64}{2} \cdot 63 = 2079$. ↑

5. A $PQRS$ négyzetből a sarkainál levágtuk a PAH , QCB , RED , SGF egyenlő szárú háromszögeket az ábra szerint, így egy nyolcszöget kaptunk. Bizonyítsd be, hogy az $ACEG$ és a $BDFH$ négyszög területe egyenlő.

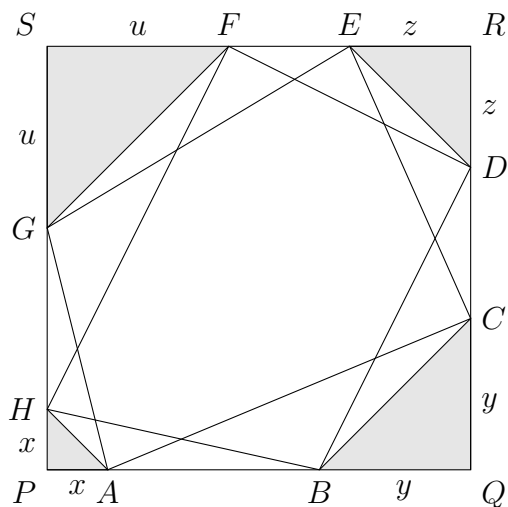


Első megoldás. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy a négyzet oldala 1 egység. Vezessük be a következő jelöléseket: $x = PA$, $y = QC$, $z = RE$, $u = SG$. Ezekkel a jelölésekkel:

$$T_{AQC} = \frac{(1-x)y}{2}, \quad T_{CRE} = \frac{(1-y)z}{2}, \quad T_{ESG} = \frac{(1-z)u}{2}, \quad T_{GPA} = \frac{(1-u)x}{2},$$

illetve

$$T_{BQD} = \frac{(1-z)y}{2}, \quad T_{DRF} = \frac{(1-u)z}{2}, \quad T_{FSH} = \frac{(1-x)u}{2}, \quad T_{HPB} = \frac{(1-y)x}{2}.$$



Mindezeket felhasználva kapjuk, hogy

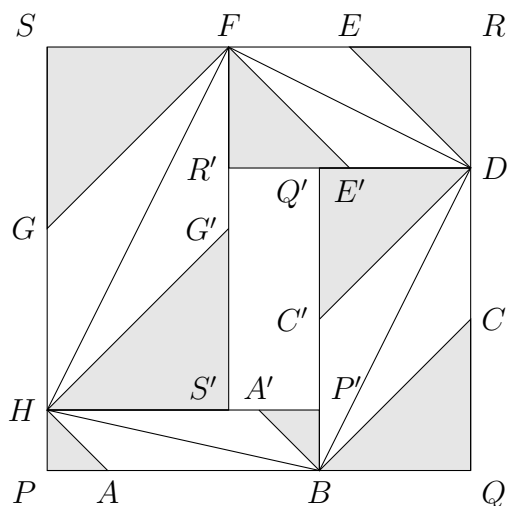
$$\begin{aligned} T_{ACEG} &= T_{PQRS} - (T_{AQC} + T_{CRE} + T_{ESG} + T_{GPA}) = \\ &= 1 - \frac{x + y + z + u - xy - yz - zu - ux}{2}, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} T_{BDFH} &= T_{PQRS} - (T_{BQD} + T_{DRF} + T_{FSH} + T_{HPB}) = \\ &= 1 - \frac{x + y + z + u - xy - yz - zu - ux}{2}. \end{aligned}$$

A két kifejezés azonos, ezzel az állítást igazoltuk.


Második megoldás.



Legyen a négyzet oldalának hossza a .

Az ábrát úgy kapjuk, hogy tükrözzük a P és az A pontot a HB felezőpontjára, a Q és a C pontot a BD felezőpontjára, az R és az E pontot a DF felezőpontjára, az S és a G pontot az FH felezőpontjára. A tükrözésekből adódó egybevágóságokat felhasználva az jön ki, hogy a $BDFH$ négyszög területe megkapható úgy, hogy az $ABCDEFGH$ nyolcszög területéhez

hozzáadjuk a BQC , DRE , FCG , HPA háromszögek és a $P'Q'R'S'$ téglalap területét, és a kapott területet elfelezzük.

Így már csak azt kell megmutatni, hogy ha a P , Q , R , S pontokat a GA , AC , CE , EG szakaszok felezőpontjára tükrözzük, akkor a kapott $P''Q''R''S''$ téglalap területe megegyezik a $P'Q'R'S'$ téglalap területével. Ez viszont nem nehéz, mert az utóbbi területe könnyen látható módon $|a - BQ - FS| \cdot |a - DR - HP|$, az előbbié pedig $|a - PA - RE| \cdot |a - QC - SG|$. Ezek pedig egyenlők, mert a négyzet sarkaiban lévő egyenlő szárú derékszögű háromszögek miatt $BQ = QC$, $FS = SG$, $DR = RE$ és $HP = PA$. 

7. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Tekintsük azokat a hatjegyű számokat, amelyekben nincs 0 számjegy, és minden számjegyük osztható azzal a számmal, ahányadik helyen áll. (Balról jobbra olvasva, tehát az egyesek helyén álló számjegy a hatodik.)
- Összesen hány ilyen hatjegyű szám van?
 - Ezek között hány olyan van, amelyben nincs két egyforma számjegy?

Első megoldás. Az első számjegy 9-féle ($1, 2, \dots, 9$), a második 4-féle ($2, 4, 6, 8$), a harmadik 3-féle ($3, 6, 9$), a negyedik 2-féle ($4, 8$), az ötödik 1-féle (5) és a hatodik szintén 1-féle értéket (6) vehet fel. Így összesen $9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 216$ szám van, ami teljesíti a feltételeket. Tegyük fel, hogy nincs két egyforma számjegy. A hatodik jegy továbbra is 6-os, az ötödik 5-ös, a negyedik számjegy lehet 4 vagy 8. A harmadik számjegy már csak 3 vagy 9 lehet, hiszen a 6-os biztosan szerepel már a hatodik helyen. A második számjegy nem lehet 6-os és nem lehet ugyanaz, mint a negyedik. Ezért itt csak két lehetőség van. Az első számjegy bármelyik lehet, amely nem egyezik meg a többi öt helyen szereplővel. Itt tehát 4 lehetőség van. Összesen tehát $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ megfelelő szám van.

Második megoldás. Jelölje a_i az i -edik számjegyet (balról jobbra olvasva).

A feltétel értelmében a_1 9-féle ($1, 2, \dots, 9$), a_2 4-féle ($2, 4, 6, 8$), a_3 3-féle ($3, 6, 9$), a_4 2-féle ($4, 8$), a_5 1-féle (5) és a_6 szintén 1-féle értéket (6) vehet fel. Így összesen $9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 216$ szám van, ami teljesíti a feltételeket.

Foglalkozzunk ezek után azokkal a számokkal, amelyekben nincs két egyforma számjegy. Az biztos, hogy $a_5 = 5$, illetve $a_6 = 6$, így csak a többi számjeggyel kell foglalkoznunk.

A többi számjegy lehetséges értékei rendre a következők:

$$a_1 : 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9; \quad a_2 : 2, 4, 8; \quad a_3 : 3, 9; \quad a_4 : 4, 8.$$

Ha $a_2 = 2$, akkor a_4 értéke 4 vagy 8, a_3 értéke 3 vagy 9, a_1 értéke pedig 4-féle lehet (a lehetséges 7 értékből kivesszük a már felhasznált 3-at). Így ekkor $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ számot kapunk.

Ha $a_2 = 4$, akkor $a_4 = 8$, a_3 értéke 3 vagy 9, a_1 értéke pedig 4-féle lehet. Így ekkor $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ számot kapunk.

Ha $a_2 = 8$, akkor $a_4 = 4$, a_3 értéke 3 vagy 9, a_1 értéke pedig 4-féle lehet. Így ekkor $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ számot kapunk.

Összesen tehát $16 + 8 + 8 = 32$ olyan szám van, amelyben nincs két egyforma számjegy. 

2. Vegyük az egész számokat 1001-től 2000-ig, és mindegyiknek keressük meg a legnagyobb páratlan osztóját. Mennyi az így kapott 1000 darab szám összege?

Első megoldás. Páratlan számok esetén a legnagyobb páratlan osztó maga a szám: 1001, 1003, ..., 1999. A páros számok (1002, 1004, ... 2000) legnagyobb páratlan osztója nem változik, ha megfelezzük őket: elég az 501, 502, ..., 1000 számok legnagyobb páratlan osztóját megkeresni. Itt megint elkülöníthetjük a páratlanokat: 501, 503, ... 999; a párosakat pedig megfelezzük: 251, 252, ..., 500. Ezt az eljárást folytatva:

	Páratlanok	Párosak megfelezve
1. lépés	1001, 1003, ..., 1999	501, 502, ..., 1000
2. lépés	501, 503, ... 999	251, 252, ..., 500
3. lépés	251, 252, ..., 499	126, 127, ... 250
4. lépés	127, 129, ..., 249	63, 64, ... 125
5. lépés	63, 65, ..., 125	32, 33, ..., 62
6. lépés	33, 35, ..., 61	16, 17, ... 31
7. lépés	17, 19, ..., 31	8, 9, ... 15
8. lépés	9, 11, 13, 15	4, 5, 6, 7
9. lépés	5, 7	2, 3
10. lépés	3	1
11. lépés	1	

Látható, hogy bal oldalt minden 1 és 1999 közötti páratlan számot megkaptunk pontosan egyszer, tehát a keresett összeg $1 + 3 + 5 + \dots + 1999 = \frac{1+1999}{2} \cdot 1000 = \mathbf{1000000}$.

Második megoldás. Ha két számnak azonos a legnagyobb páratlan osztója, akkor a prímtényezősz felbontásuk csak a 2 kitevőjében különbözhet, azaz egyik a másiknak 2-hatványszorosa. Az 1001, 1002, ... 2000 számok között nincs két különböző szám, amelyek 2-hatványszorosai egymásnak, hiszen a legkisebb szám kétszerese is nagyobb a legnagyobb számnál. Ezért az 1001, 1002, ... 2000 számok legnagyobb páratlan osztói mind különböző pozitív páratlan számok, amelyek kisebbek 2000-nél. Mivel ilyen páratlan számból éppen 1000 darab van, ezért mindegyik 2000-nél kisebb pozitív páratlan szám pontosan egy számnak a legnagyobb páratlan osztója. Tehát a keresett összeg $1 + 3 + 5 + \dots + 1999 = \frac{1+1999}{2} \cdot 1000 = \mathbf{1000000}$.

Harmadik megoldás. Minden egész szám 1001-től 2000-ig egyértelműen áll elő $2^k \cdot m$ alakban, ahol $k \in \{0; 1; 2; \dots; 10\}$, m pedig (pozitív) páratlan szám. Feladatunk tehát az, hogy minden m értéket adjunk össze.

Világos, hogy

- $k = 0$, akkor $m = 1001, 1003, 1005, \dots, 1999$,
- ha $k = 1$, akkor $m = 501, 503, 505, \dots, 999$,
- ha $k = 2$, akkor $m = 251, 253, 255, \dots, 499$, és így tovább,
- ha $k = 9$, akkor $m = 3, 5$, s végül,
- ha $k = 10$, akkor $m = 1$.

Tehát a keresett összeg $1 + 3 + 5 + \dots + 1999 = \frac{1+1999}{2} \cdot 1000 = 1000000$.



3. Sára a következő játékot találta ki. Egy füzetlap első sorába felírt egy pozitív egészekből álló számsort. Ezután a következő sorba az előző sor minden száma helyett leírta növekvő sorrendben 1-től az adott számig az összes pozitív egészt. Majd ugyanezzel a módszerrel képezte a második sor számaiból a harmadik sor számait, és így tovább. Ha például az egyik sorban az

$$5, 1, 2, 3, 2$$

számsor szerepel, akkor a következő sorba az

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2$$

számsort írta.

Hány számot írt Sára a 6. sorba, ha az első sorba az 1, 2, 3, 4, 5 számsort írta?

Első megoldás. Az alábbi táblázatban az egyes sorokban lévő számok darabszámát foglaltuk össze. A kitöltési szabály a következő: a 2. sortól kezdve a k -adik cellába az előtte lévő sorban lévő, a k -nál nem kisebb sorszámú cellák összegét írjuk.

	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös
1. sor	1	1	1	1	1
2. sor	5	4	3	2	1
3. sor	15	10	6	3	1
4. sor	35	20	10	4	1
5. sor	70	35	15	5	1
6. sor	126	56	21	6	1


Sára tehát a 6 sorba $126 + 56 + 21 + 6 + 1 = 210$ számot írt.

Második megoldás. Tegyük fel, hogy mind a 6 sor fel van írva. Ezek után minden számot kössük össze a belőle közvetlenül származó számokkal. (Pl. az első sorban szereplő 5-öt összekötjük a második sorban álló 1, 2, 3, 4, 5-tel.)

Így kapunk 5 fagráfot, melynek gyökerei rendre az első sorban álló 1, 2, 3, 4, 5.

Vegyük észre, hogy ha valamelyik gyökérből elindulunk, minden lépésben élen haladva a következő sorba lépünk, akkor a szereplő számok monoton csökkenő sorozatot alkotnak.

Ha a fenti lépéseket az összes gyökérellemmel és az összes lehetséges bejárással elvégezzük, akkor a kapott szám 6-osok minden 6 elemű monoton csökkenő sorozatot kiadják, melyek első eleme legfeljebb 5. Ez pedig 5 elem összes 6-od osztályú ismétléses kombinációja, amik száma $\binom{5+6-1}{6} = 210$.

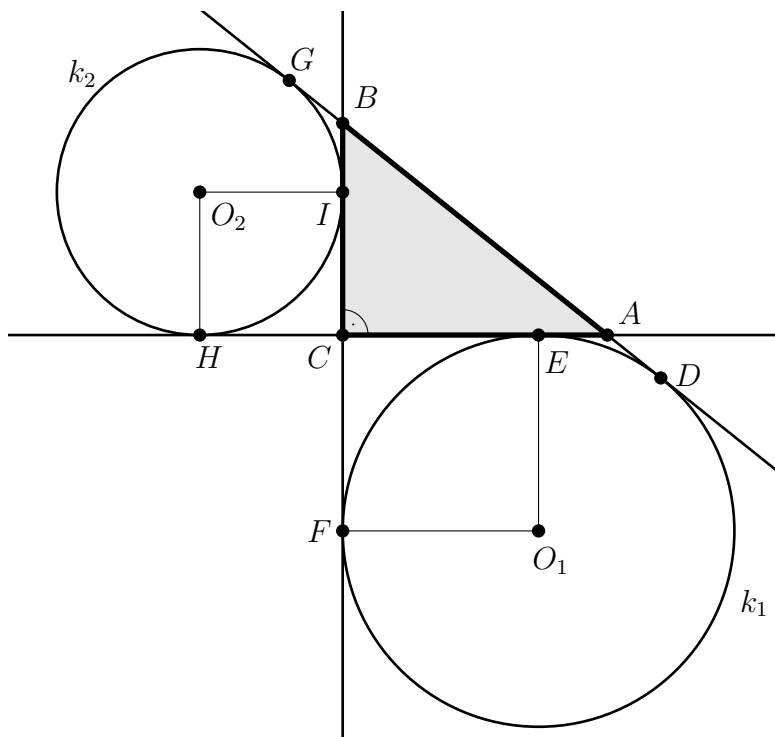
Általánosítás: Az előző gondolatmenet gond nélkül alkalmazható arra az esetre, ha az első sorban 1-től n -ig szerepelnek a számok. Ekkor a k -adik sorban $\binom{n+k-1}{k}$ elem fog állni. 

4. Az ABC háromszögben C -nél derékszög van. A k_1 és k_2 hozzáírt körök a háromszögön kívül helyezkednek el, az alábbiak szerint:

- Az O_1 középpontú k_1 kör érinti az AC befogót az E pontban, az AB oldal meghosszabbítását a D pontban, valamint a BC oldal meghosszabbítását az F pontban.
- Az O_2 középpontú k_2 kör érinti a BC befogót az I pontban, az AB oldal meghosszabbítását a G pontban, valamint az AC oldal meghosszabbítását az H pontban.

Bizonyítsd be, hogy a k_1 és k_2 körök sugarának összege megegyezik az AB szakasz hosszával.

Első megoldás. Tekintsük a feltételeknek megfelelő ábrát.



Az O_1ECF négyszög minden szöge derékszög (az érintők merőlegesek az érintési pontba húzott sugárra) és a szomszédos O_1E és O_1F oldalai egyenlőek, tehát O_1ECF négyzet, így $r_1 = CE = CF$. Hasonlóan adódik, hogy O_2HCI is négyzet, így $r_2 = CI = CH$. Az AG és az AH érintőszakaszok egyenlők, így

$$AG = AH = AE + EC + CH = AE + r_1 + r_2.$$

Ugyanígy a BD és BF érintőszakaszok is egyenlők, így

$$BD = BF = BI + IC + CF = BI + r_2 + r_1.$$

Ugyancsak érintőszakaszok egyenlősége miatt $AD = AE$ és $BG = BI$. Így

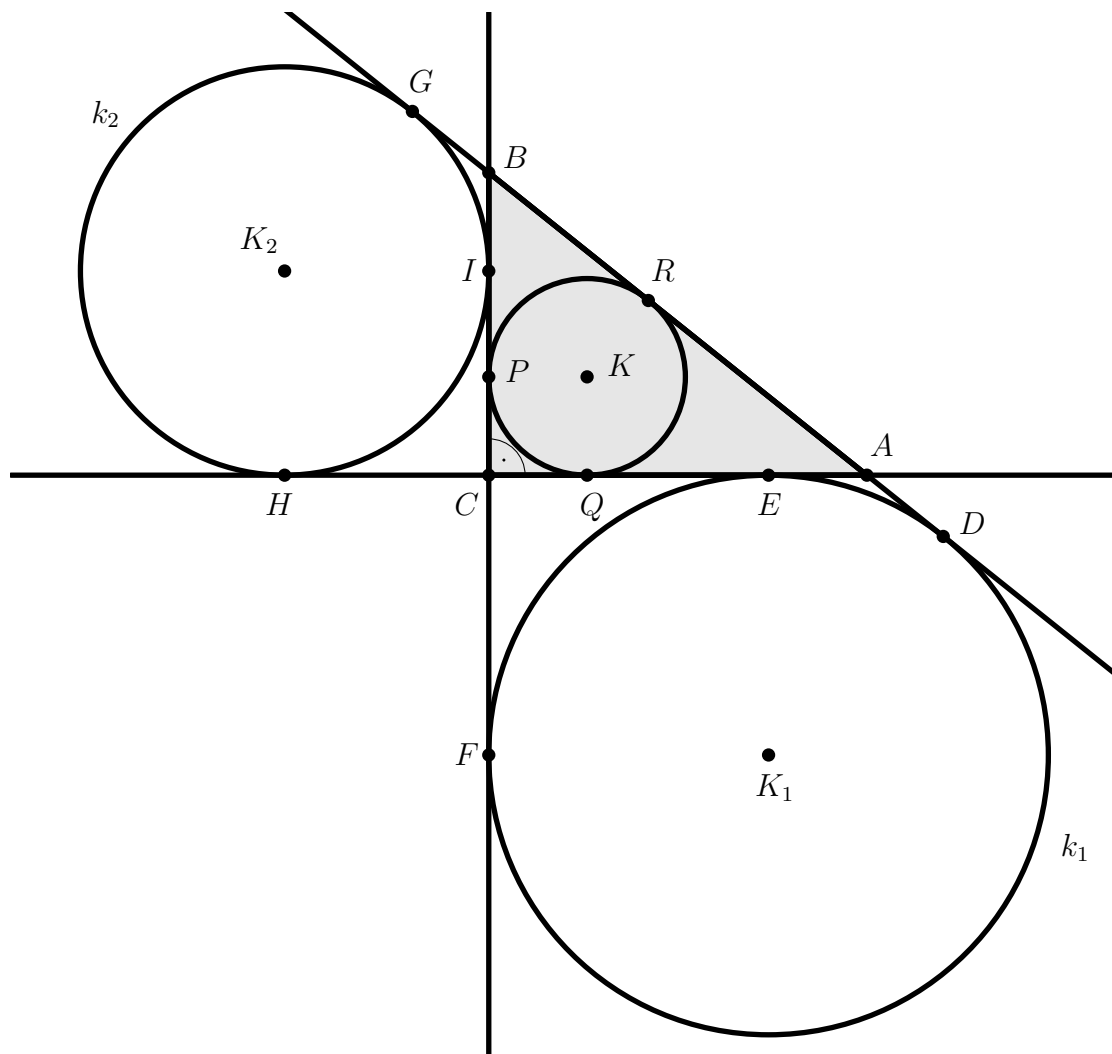
$$AB = AG - BG = AE + r_1 + r_2 - BI$$

és

$$AB = BD - AD = BI + r_1 + r_2 - AE.$$

Emiatt $AE - BI = BI - AE$, tehát $AE = BI$. Ebből viszont $AB = r_1 + r_2$ következik, és éppen ezt kellett belátni.

Második megoldás. Tekintsük a feltételeknek megfelelő ábrát. Vegyük fel benne az ABC háromszög beírt körét is, mely az AB, BC, CD oldalakat rendre az R, P, Q pontokban érinti.



Ismert tény, hogy egy adott oldalon a beírt és az oldalhoz írt kör érintési pontjai szimmetrikusan helyezkednek el az oldalfelező pontra nézve. Ennek következménye, hogy $CE = AQ$, illetve $CI = BP$.

Mivel a k_1 kör sugara CE -vel, a k_2 köré pedig CI -vel egyenlő, így a két kör sugarának összege:

$$CE + CI = AQ + BP.$$

Tudjuk, hogy egy külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, így $AQ = AR$, valamint $BP = BR$, vagyis $CE + CI = AR + BR = AB$, amit éppen bizonyítani kellett.



8. osztály, 1. nap


Országos döntő

1. Van egy piros és egy zöld korongunk. Mindkét korong mindkét oldalán van egy-egy pozitív egész szám, a piros korong egyik oldalán a 2000, a zöld korong egyik oldalán a 18 található. A korongokat az összes lehetséges módon az asztallapra helyezve a korongon látható számok összegére pontosan négyféle különböző eredményt kaphatunk, és ezek ráadásul egymást követő pozitív egész számok. Milyen számok állhatnak a korongok túlsó oldalán? Az összes lehetséges megoldást keresd meg!

A piros korong két oldalán álljon $p_1 < p_2$, a zöld korong két oldalán álljon $z_1 < z_2$. Ekkor a legkisebb összes $p_1 + z_1$, a legnagyobb $p_2 + z_2$, és a két középsőre két lehetőség van.

Nézzük még a két lehetőséget külön-külön:

1. eset: $p_1 + z_1 < p_1 + z_2 < p_2 + z_1 < p_2 + z_2$. Ekkor világos, hogy $z_2 = z_1 + 1$ és $p_2 = p_1 + 2$, és ezzel a két feltétellel tényleg négy egymást követő szám lesz az összeg. Innen a megoldások (p_1, p_2, z_1, z_2) sorrendben: $(1998, 2000, 17, 18)$, $(1998, 2000, 18, 19)$, $(2000, 2002, 17, 18)$ és $(2000, 2002, 18, 19)$.

2. eset: $p_1 + z_1 < p_2 + z_1 < p_1 + z_2 < p_2 + z_2$. Ekkor világos, hogy $p_2 = p_1 + 2$ és $z_2 = z_1 + 2$, és ezzel a két feltétellel tényleg négy egymást követő szám lesz az összeg. Innen a megoldások: $(1999, 2000, 16, 18)$, $(1999, 2000, 18, 20)$, $(2000, 2001, 16, 18)$ és $(2000, 2001, 18, 20)$. 

2. Az $ABCD$ négyzet átlóinak metszéspontja O , az AB oldal A -hoz legközelebb eső negyedelőpontja N , az AD oldal egy belső pontja P . Az OP egyenes a DN szakaszt az X , a BC oldalt az Y pontban metszi. Lehetséges-e, hogy a $XYCD$ négyszög területe éppen háromszorosa az $ANXP$ négyszög területének?

Legyen a négyzet területe 1 és vezessük be az alábbi jelöléseket: $T_{ANXP} = a$, $T_{PXD} = d$ és $T_{XYCD} = c$. Könnyen látható, hogy $a + d = \frac{1}{8}$ és mivel a négyzet középpontján átmenő egyenesek felezik a négyzet területét, ezért $c + d = \frac{1}{2}$. Ha igaz lenne, hogy $c = 3a$, akkor $c + d = 3a + d = \frac{1}{2}$ és $a + d = \frac{1}{8}$ különbségéből $2a = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, vagyis $a = \frac{3}{16}$. De ekkor $d = \frac{1}{8} - a = \frac{2}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{1}{16}$ lenne, ami lehetetlen.


Tehát a kérdésre a válasz: nem lehetséges. 

3. Melyek azok az n pozitív egész számok, melyekre $\frac{n}{555 - n}$ négyzetszám?

$$\frac{n}{555 - n} = \frac{-(555 - n) + 555}{555 - n} = -1 + \frac{555}{555 - n}$$

Egy négyzetszám nem negatív, ezért elég 555 pozitív osztóit vizsgálni. Olyan osztót keresünk tehát, amely 1-gyel nagyobb egy négyzetszámnál, és ezek osztópárja lesz $555 - n$.

$555 = 1 \cdot 555 = 3 \cdot 185 = 5 \cdot 111 = 15 \cdot 37$, tehát a szóba jövő osztók: 1, 5, 37, vagyis $555 - n$ értéke 555, 111 vagy 15.

Az első esetben n nem pozitív egész. A másik két esetben $n = 444$ (és a négyzetszám a 4), illetve $n = 540$ (és a négyzetszám a 36). 

4. Anna és Roland a következő játékot játsszák. Roland beírja egy $n \times n$ -es táblázat mezőibe a számokat 1-től n^2 -ig valamilyen elrendezésben. Annának a táblázat bal felső sarkából indulva el kell jutnia a táblázat jobb alsó sarkáig úgy, hogy mindig élszomszédos mezőre lép, és olyan mezőre nem léphet, ahol korábban már járt. Célja, hogy az út során érintett mezőkben szereplő számok összege a lehető legnagyobb legyen. Roland úgy próbálja kezdetben kitölteni a táblázatot, hogy az Anna által elérhető összeg a lehető legkisebb legyen. Határozzuk meg minden $n > 1$ esetén az Anna által elérhető legnagyobb összeget (feltételezzük, hogy Anna és Roland is optimálisan játszik).

Ha n páratlan, akkor az összes szám begyűjthető, például oszloponként le, fel, le, fel, \dots , fel, le bejárással. Így az elrendezéstől függetlenül Anna mindig el tudja érni az $1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ összeget, tehát a legnagyobb érték is ennyi.

Ha n páros, akkor színezzük ki a négyzet mezőit sakktáblaszerűen, legyen mondjuk a bal felső mező sötét. A lépési szabály szerint a meglátogatott mezők színe sötét - világos - sötét - \dots - sötét, ezért az út során eggyel több sötét mezőt érintettünk. Mivel a táblán egyenlő a sötét és világos mezők száma, legalább egy világos mező kimaradt.

Később megmutatjuk, hogy elérhető: egyetlen világos mező maradjon csak ki, és az bármelyik lehet.

Ebből következik, hogy akkor lesz a legkisebb egy adott elrendezéshez tartozó összeg, amikor a világos mezőkön vannak a nagyobb számok, vagyis $n^2/2 + 1, n^2/2 + 2, \dots, n^2$. A fenti állítás alapján a kihagyott világos mezőt választhatjuk úgy, hogy a lehető legkisebb legyen a kimaradó szám, vagyis $n^2/2 + 1$. Tehát páros n esetén a legnagyobbak közötti legkisebb érték $1 + 2 + 3 + \dots + n^2 - (n^2/2 + 1) = \frac{n^2(n^2+1)}{2} - \left(\frac{n^2}{2} + 1\right) = \frac{n^4-2}{2}$.

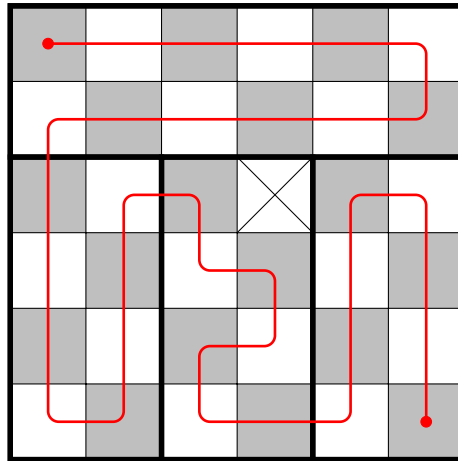
Most bebizonyítjuk, hogy bármelyik világos mezőhöz van olyan út, ami azt az egy mezőt hagyja ki.

A világos mezők „koordinátáinak” paritása különböző. Feltehetjük, hogy a kiválasztott világos mező páros oszlopban és páratlan sorban van (különben tükrözhetünk a bal felső - jobb alsó átlóra). Ekkor a kiválasztott mező felett páros sok teljes sor van, tőle balra pedig páratlan sok teljes oszlop. A bejárás történhet így:

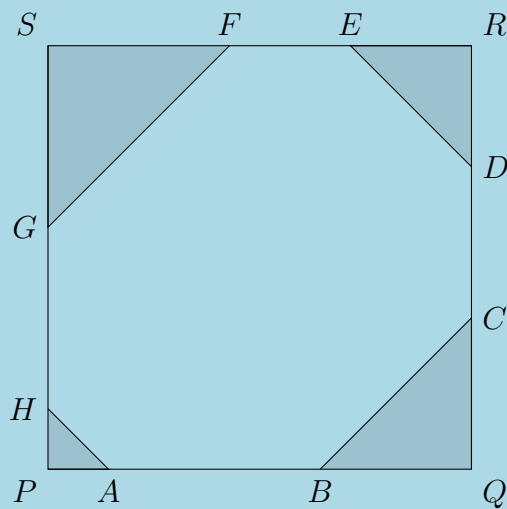
- Először bejárjuk jobb -bal -jobb - bal \dots sorrendben a kiválasztott mező feletti teljes sorokat.
- Ezután bejárjuk le - fel -le -fel - \dots sorrendben a kiválasztott mező előtti teljes oszlopokat, kivéve a legjobbra levőt.
- Ezután cikk-cakkban bejárjuk a kiválasztott mező oszlopát és a tőle balra lévő úgy, hogy végül a kiválasztott mező oszlopának legaljára érkezünk.
- Végül a megmaradt bal alsó téglalapot bejárhatjuk alulról indulva fel - le - fel - le - \dots sorrendben, mert mindkét mérete páros.

A bejárási algoritmust az alábbi ábra szemlélteti $n = 6$ esetén, amikor a kiválasztott világos mező a harmadik sor negyedik oszlopában van.

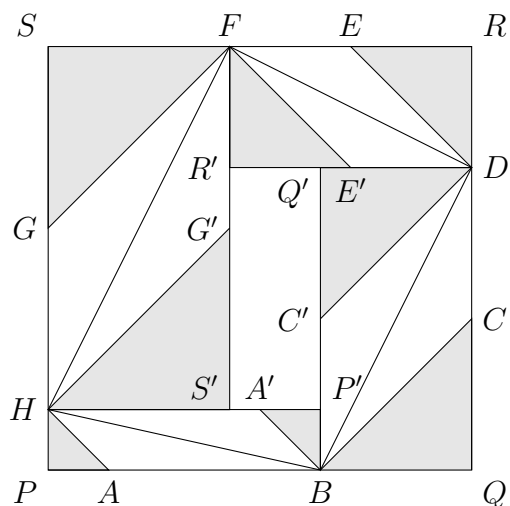




5. A $PQRS$ négyzetből a sarkainál levágtuk a PAH , QCB , RED , SGF egyenlő szárú háromszögeket az ábra szerint, így egy nyolcszöget kaptunk. Bizonyítsd be, hogy az $ACEG$ és a $BDFH$ négyszög területe egyenlő.



Első megoldás.



Legyen a négyzet oldalának hossza a .

Az ábrát úgy kapjuk, hogy tükrözzük a P és az A pontot a HB felezőpontjára, a Q és a C pontot a BD felezőpontjára, az R és az E pontot a DF felezőpontjára, az S és a G pontot az FH felezőpontjára. A tükrözésekből adódó egybevágóságokat felhasználva az jön ki, hogy a $BDFH$ négyszög területe megkapható úgy, hogy az $ABCDEFGH$ nyolcszög területéhez hozzáadjuk a BQC , DRE , FCG , HPA háromszögek és a $P'Q'R'S'$ téglalap területét, és a kapott területet elfelezzük.

Így már csak azt kell megmutatni, hogy ha a P , Q , R , S pontokat a GA , AC , CE , EG szakaszok felezőpontjára tükrözzük, akkor a kapott $P''Q''R''S''$ téglalap területe megegyezik a $P'Q'R'S'$ téglalap területével. Ez viszont nem nehéz, mert az utóbbi területe könnyen látható módon $|a - BQ - FS| \cdot |a - DR - HP|$, az előbbié pedig $|a - PA - RE| \cdot |a - QC - SG|$. Ezek pedig egyenlők, mert a négyzet sarkaiban lévő egyenlő szárú derékszögű háromszögek miatt $BQ = QC$, $FS = SG$, $DR = RE$ és $HP = PA$.

Második megoldás. Tekintsük a négyzet oldalát egységnyinek és vezessük be a következő jelöléseket: $HP = PA = x$, $BQ = QC = y$, $DR = RE = z$ és $FS = SG = w$. A két kérdéses négyszög területe kifejezhető úgy, hogy az eredeti egység négyzetből derékszögű háromszögeket vágunk le.

$$\begin{aligned} T_{ACEG} &= T_{PQRS} - T_{ACQ} - T_{CRE} - T_{ESG} - T_{GPA} \\ &= 1 - \frac{(1-x)y + (1-y)z + (1-z)w + (1-w)x}{2} \\ &= 1 - \frac{x + y + z + w - xy - yz - zw - wx}{2} \end{aligned}$$

Hasonlóan:

$$\begin{aligned} T_{BDFH} &= T_{PQRS} - T_{BQD} - T_{DRF} - T_{FSH} - T_{HPB} \\ &= 1 - \frac{y(1-z) + z(1-w) + w(1-x) + x(1-y)}{2} \\ &= 1 - \frac{x + y + z + w - xy - yz - zw - wx}{2} \end{aligned}$$

Ugyanazt a formulát kaptuk a két területre, tehát megegyeznek.



8. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Vegyük az egész számokat 1001-től 2000-ig, és mindegyiknek keressük meg a legnagyobb páratlan osztóját. Mennyi az így kapott 1000 darab szám összege?

Első megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a feladatban szereplő 1000 darab szám legnagyobb páratlan osztói éppen az 1, 3, ..., 1999 számok lesznek valamilyen sorrendben.

Vegyük észre, hogy a felsorolt számok éppen 1000-en vannak, és csak közülük kerülhet ki a legnagyobb páratlan osztó, ezért elég belátni, hogy a felsorolt 1000 szám legnagyobb páratlan osztója csupa különböző szám.

Ehhez vegyük észre, hogyha az x szám a legnagyobb páratlan osztója n , akkor a szám felírható $2^k \cdot n$ alakban. Valóban, ha x/n nem lenne kettőhatvány, akkor lenne egynél nagyobb páratlan osztója, mondjuk y és így $n \cdot y$ is páratlan osztója lenne x -nek, ami n -nél nagyobb, és ez ellentmondás. Ez pedig azt jelenti, hogy ha két számnak ugyanaz a legnagyobb páratlan osztója, akkor a hányadosuk egy kettőhatvány, de az adott 1000 szám közül még a legnagyobb és a legkisebb hányadosa is kisebb, mint 2.

Így nincs más hátra, mint összeadni a páratlan számokat 1-től 1999-ig: az eredmény 1 000 000.

Második megoldás. Teljes indukcióval bizonyítjuk a következő állítást: az $n + 1, n + 2 \dots 2n$ számok legnagyobb páratlan osztói az 1, 3, 5, ..., $2n - 1$ számok valamilyen sorrendben.

$n = 1$ esetén igaz az állítás: a 2 legnagyobb páratlan osztója az 1.

Tegyük fel, hogy valamilyen n -re már bizonyítottuk az állítást, és nézzük meg, mi változik, amikor eggyel nagyobb n -re térünk át.


$$\begin{aligned} n + 1, n + 2, \dots, 2n \\ n + 2, \dots, 2n, 2n + 1, 2n + 2 = 2(n + 1) \end{aligned}$$

Kimarad az $n + 1$, bejön helyette a $2n + 1$ és a $2n + 2$. Utóbbi legnagyobb páratlan osztója ugyanannyi, mint $n + 1$ legnagyobb páratlan osztója, tehát annyi változott, hogy belépett a $2n + 1$ legnagyobb páratlan osztója, ami nyilvánvalóan $2n + 1$. Ez pedig igazolja az állításunkat az eggyel nagyobb n értékre is, hiszen eddig 1-től $(2n - 1)$ -ig kaptuk meg a páratlan számokat, és ehhez jött most hozzá a $2n + 1$.

Nincs más hátra, mint összeadni a páratlan számokat 1-től 1999-ig: az eredmény 1 000 000.

Harmadik megoldás vázlata. Ha a teljes indukciós módszer még nem megy, akkor „direkt” módon is végigvihető a számolás, csak kicsit munkásabban. Egy menetben mindig kiválogatjuk a páratlan számokat (ezek kerülnek az összegbe) és a következő menetre megtartjuk a páros számok felét. (A felezés nem változtatja meg a legnagyobb páratlan osztót.)

megmaradt számok	a páratlanok	következő menetre marad
1001, 1002, ..., 2000	1001, 1003, ..., 1999	501, 502, 503, ..., 1000
501, 502, 503, ..., 1000	501, 503, 505, ..., 999	251, 252, 253, ..., 500
251, 252, 253, ..., 500	251, 253, 255, ..., 499	126, 127, 128, ..., 250
126, 127, 128, ..., 250	127, 129, 131, ..., 249	63, 64, 65, ..., 125
63, 64, 65, ..., 125	63, 65, 67, ..., 125	32, 33, 34, ..., 62
32, 33, 34, ..., 62	33, 35, 37, ..., 61	16, 17, 18, ..., 31
16, 17, 18, ..., 31	17, 19, 21, ..., 31	8, 9, 10, ..., 15
8, 9, 10, ..., 15	9, 11, 13, 15	4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7	5, 7	2, 3
2, 3	3	1
1	1	

Látható, hogy végül 1-től 1999-ig megkapjuk az összes páratlan számot, mindegyiket pontosan egyszer. Ezek összege az előző megoldásban írtak szerint egymillió. 

2. Hányféle módon lehet egy szabályos 100-szög csúcsai közül kiválasztani hármat úgy, hogy a kiválasztott három csúcs között ne legyen se két szomszédos, se két átellenes?

Első megoldás. Nevezzük átmérőnek a 100-szög leghosszabb átlóit. A feltételek miatt a kiválasztott pontok csak különböző átmérők végpontjai lehetnek. Ezért két lépésben végezzük a kiválasztást: először három átmérőt választunk, utána pedig minden átmérő valamelyik végpontját. Összesen $\binom{50}{3}$ -féle módon választható ki 3 átmérő az 50 közül, de ezt még három esetre kell bontani aszerint, hogy hány „szomszédos” van az átmérők között.

- Három szomszédos átmérő 50-féle módon választható (az irányított körüljárás szerinti elsővel definiálva a hármast). Bármelyikük egyik végpontját kiválasztva a másik kettőnél már egyértelmű, kit kell választani. Ez $50 \cdot 2$ lehetőség.
- Két szomszédos és egy nem szomszédos átmérő $50 \cdot 46$ -féle módon választható. A szomszédosakat az előzőkhöz hasonlóan 50-féle módon választhatjuk, a nem szomszédosnál pedig a két szomszédos és a két mellettük levő van kizárva. Ezután a végpontok kétféleképpen választhatók a szomszédosaknál, és kétféle módon a harmadik átmérőnél. Ez $50 \cdot 46 \cdot 2 \cdot 2$ eset.
- Végül három nem szomszédos átmérő $\binom{50}{3} - 50 - 50 \cdot 46$ -féle módon választható ki, és ezután a végpontok választására 8 lehetőségünk lesz. Ez $(\binom{50}{3} - 50 - 50 \cdot 46) \cdot 8$ eset.

Az összes megoldások száma így

$$50 \cdot 2 + 50 \cdot 46 \cdot 2 \cdot 2 + \left(\binom{50}{3} - 50 - 50 \cdot 46 \right) \cdot 8 = 100 \cdot (1 + 46 \cdot 2 + 49 \cdot 32 - 4 - 46 \cdot 4) =$$

$$= 100 \cdot (1 + 92 + 1568 - 4 - 184) = 100 \cdot 1473 = 147300.$$

Második megoldás. Vonjuk ki az összes eset számából a rossz háromszögek számát. A rossz esetek számának megállapításánál az igényel odafigyelést, hogy semelyik háromszöget ne számoljunk meg egynél többször.

Rossz eset az, amikor a háromszögnek van két átellenes csúcsa, de nincs szomszédos. A két átellenes csúcsot 50-féle módon lehet választani, a harmadikat pedig 94-féle módon, ez tehát $50 \cdot 94$ eset.

A többi rossz háromszögben van szomszédos pont, és ezekből még egyiket se számoltuk meg. Ha két szomszédos pontpár van, abból 100 darab eset van. Végül ha pontosan egy szomszédos pontpár van, akkor a szomszédos pontpárt 100-féle módon tudjuk kiválasztani, a harmadik pont pedig 96-féle módon választható, mert nem lehet a két kiválasztott pont, és a szomszédos pontpár két szomszédja, vagyis ez $100 \cdot 96$ darab háromszög.

A végeredmény tehát

$$\binom{100}{3} - (50 \cdot 94 + 100 + 100 \cdot 96) = \binom{100}{3} - 14400 =$$

$$50 \cdot 33 \cdot 98 - 14400 = 100 \cdot (33 \cdot 49 - 144) = 100 \cdot (1617 - 144) = 100 \cdot 1473 = 147300.$$



3. Határozd meg azokat az \overline{abcd} négyjegyű számokat, amelyek egyenlők az \overline{ab} és \overline{cd} kétjegyű számok szorzatának kétszeresével.

Első megoldás. Legyen $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$, ($10 \leq x, y \leq 99$). A feltétel szerint $100x + y = 2xy$, azaz $y = 2xy - 100x = (2y - 100)x$, tehát y az x többszöröse.

Ha $y = kx$, akkor a $100x + kx = 2kx^2$ egyenletet kapjuk, ahonnan $100 + k = 2kx$ (hiszen $x \neq 0$). Mivel $1 \leq k \leq 9$, továbbá az is látható, hogy k -nak párosnak kell lennie, ezért gyors próbálgatással $k = 4$, $x = 13$ adódik.

Tehát a feladat egyetlen megoldása: 1352.

Második megoldás. Legyen $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$, ($10 \leq x, y \leq 99$). A feltétel szerint (használva, hogy $2x - 1 \neq 0$)

$$100x + y = 2xy \iff y = \frac{100x}{2x - 1} = \frac{50(2x - 1) + 50}{2x - 1} = 50 + \frac{50}{2x - 1}$$

Ez csak úgy lehet egész, ha $2x - 1$ az ötven osztója.

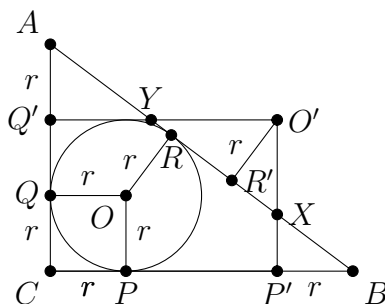
Az x -r és y -ra vonatkozó feltételeket is figyelembe véve egyedül a $2x - 1 = 25$ választást eredményez kétjegyű pozitív egészeket az ismeretlenekre.

Ekkor $x = 13$ és $y = 52$, tehát az egyetlen megfelelő négyjegyű szám az 1352.



4. Egy derékszögű háromszög beírt köre az átfogót egy d és egy e hosszúságú szakaszra osztja. Bizonyítsd be, hogy a $d \cdot e$ szorzat egyenlő a háromszög területével.

Első megoldás. Az ABC háromszög C csúcsánál lévő szöge legyen derékszög, a beírt körének középpontja legyen O , a BC , CA , AB oldalon a beírt kör érintési pontjai legyenek P , Q és R . Tükrözzük P -t és Q -t a BC , illetve a CA oldal felezőpontjára, így kapjuk P' -t és Q' -t. Tükrözzük O -t és R -t az AB oldal felezőpontjára, így kapjuk O' -t és R' -t.



(Az ábra csalóka, az $O'Q'$ nem feltétlenül érinti a beírt kört.)

Mivel P' és az O' pont ugyanakkora $(a - r)$ távolságra van a CA egyenestől, illetve a Q' és O' pont ugyanakkora $(b - r)$ távolságra van a CB egyenestől, ezért $CP'O'Q'$ téglalap. Megmutatjuk, hogy a téglalap területe egyenlő az ABC háromszög területével.

Messe a téglalap $O'P'$ oldala AB -t az X pontban, $O'Q'$ oldala pedig messe AB -t Y -ban. Vegyük észre, hogy az $XB P'$ háromszög egybevágó az $XR'O'$ háromszöggel: szögeik megegyeznek (derékszögűek és van egy csúcspárjuk), és mindkettőnek az egyik (megfelelő) befogója r hosszú. Ugyanígy belátható, hogy $Y A Q'$ háromszög egybevágó az $Y R'O'$ háromszöggel. Az eddigiek alapján világos, hogy az ABC háromszög és a $CP'O'Q'$ téglalap egyforma területű.

Elég megmutatni a téglalap két oldaláról, hogy hosszuk AR illetve BR . Ez pedig nem nehéz, hiszen (felhasználva azt, hogy egy adott pontból egy körhöz egyforma hosszú érintő szakaszok húzhatók, $CP' = BP = BR$ és $CQ' = AQ = AR$. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

Második megoldás. Legyen a beírt kör sugara r , ekkor a befogók hossza $r + d$ és $r + e$. A beírt kör érintési pontokba húzott sugarai két derékszögű deltoidra és egy négyzetre bontják a háromszöget. Ezek területének összege és befogók szorzatának fele is egyenlő a háromszög területével:

$$T = \frac{(r + d)(r + e)}{2}$$

$$2T = \underbrace{r^2 + rd + re + de}_T$$

$$T = de$$

Harmadik megoldás. Az érintőszakaszok formuláinak ismeretében, használva Pitagorasz tételét:

$$de = (s - a)(s - b) = \frac{(c + b - a)(c - b + a)}{4} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{4} = \frac{2ab}{4} = \frac{ab}{2} = T$$








XLVIII. verseny 2018–2019.

Feladatok

5. osztály

Megyei forduló

- Piros, sárga, kék, narancs, fehér és zöld korongjaink vannak egy sorban, mindegyik színből egy darab. A következőket tudjuk:
 - A zöld korong nem a jobb szélén van.
 - A piros korong két másik korong között található.
 - A fehér korong közvetlenül a narancstól balra van.
 - A sárga korong a piros és a fehér között helyezkedik el, de egyiknek sem szomszédja.Milyen sorrendben helyezkedhetnek el a korongok? 
- Ossz fel 12 centiméter kerületű téglalapokra
 - egy olyan téglalapot, amelynek szomszédos oldalai 6 cm és 7 cm hosszúak;
 - egy 7 cm oldalhosszúságú négyzetet!Élég egy-egy jó felosztást megadni, nincs szükség indoklásra. Ábráidon egyértelműen add meg valamennyi téglalap oldalainak hosszát! 
- Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely pontosan kétféle számjegyet tartalmaz? 
- Anna és Benő két hatoldalú dobókockával játszanak. A kockák nem szokványosak, oldalaira nem számok vannak írva, hanem kékre vagy pirosra vannak színezve. A játék nagyon egyszerű: feldobják mindkét kockát, és ha a kapott színek egyformák, akkor Anna nyer, különben pedig Benő.

Az egyik kockának öt kék lapja van és csak egy piros. Tudjuk, hogy a játék igazságos, azaz Annának és Benőnek is ugyanolyan esélye van nyerni. Hány kék és hány piros lapja lehet a másik kockának? (Feltételezzük, hogy bármelyik kockán bármelyik lap azonos eséllyel jön ki.) 
- Egy 8×8 -as sakktábla minden mezőjére ráírtunk egy számot, mindegyikre különbözőt. Nevezzünk egy mezőt érdekesnek, ha oszlopában őrá írtuk a legnagyobb számot, sorában pedig a legkisebbet. Legfeljebb hány érdekes mező lehet a táblán? 

6. osztály

Megyei forduló

1. Nevezzünk egy háromjegyű pozitív egész számot „hegyszámnak”, ha a középső számjegye nagyobb a másik kettőnél, és „völgyszámnak”, ha a középső számjegye a legkisebb. Igaz-e, hogy a hegyszámok és völgyszámok ugyanannyian vannak? Ha nem, melyikből van több, és mennyivel? →

2. Ossz fel 12 centiméter kerületű téglalapokra

- egy olyan téglalapot, amelynek szomszédos oldalai 6 cm és 7 cm hosszúak;
- egy 7 cm oldalhosszúságú négyzetet!

Elég egy-egy jó felosztást megadni, nincs szükség indoklásra. Ábráidon egyértelműen add meg valamennyi téglalap oldalainak hosszát! →

3. Egy 3×3 -as táblázatba nemnegatív egész számokat írunk úgy, hogy a sorokba, illetve oszlopokba írt számok összege a táblázat mellett jelölt szám legyen, és a négy sarokmezőbe írt szám összege 10 legyen.

			10
			9
			8
8	9	10	

- Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy csupa különböző szám kerül a sarokmezőkbe?
- Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy minden beírt érték pontosan egyszer szerepel?
- Melyik a legnagyobb szám, ami a középső mezőbe kerülhet? →

4. Hány olyan 10000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely pontosan kétféle számjegyet tartalmaz? →


5. Az $A, Á, K, L, M, Ó, R, S, Z$ betűk mindegyike egy számjegyet jelöl 1-től 9-ig. A különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. A következőket tudjuk:

- $S \cdot Z \cdot Á \cdot M = 180$,
- $L \cdot Á \cdot Z = 162$,
- $S < Z < Ó < R$, valamint
- $KAL + MÁR + LÁS + ZLÓ = 2019$.
(Itt KAL , $MÁR$, $LÁS$ és $ZLÓ$ a megfelelő számjegyek egymás után írásával kapott háromjegyű számokat jelölik.)

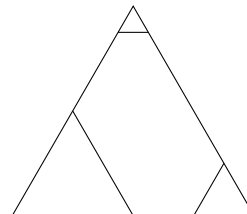
Határozd meg, hogy melyik betűt mennyit ér! →

7. osztály

Megyei forduló

1. Bizonyítsd be, hogy 2019 db egymást követő pozitív egész szám közül mindig kiválasztható 19 db úgy, hogy az összegük osztható legyen 2019-cel! 


2. Egy játékkészletben egybevágó szabályos háromszöglapok szerepelnek. Az elemek az ábrán látható módon négy részre vannak osztva. A csúcsokban levő szabályos háromszög alakú mezők oldalainak hossza 1, 2, 4, míg a teljes elem oldalhossza 8 egység.



A háromszöglapok részei ki vannak színezve a piros, kék, zöld vagy sárga színek valamelyikére úgy, hogy minden lapon a négy rész négy különböző színnel van színezve. Ezenkívül a készletben lévő háromszöglapok között nincs két egyforma, de minden lehetséges színezésű szerepel.

A háromszöglapokból ki akarunk rakni egy olyan alakzatot, melyen a különböző színek területei egyenlőek. Meg tudjuk-e ezt csinálni úgy, hogy az alakzatunk

a) pontosan 3 elemből álljon?

b) pontosan 5 elemből álljon? 

3. Az $A, \acute{A}, K, L, M, \acute{O}, R, S, Z$ betűk mindegyike egy számjegyet jelöl 1-től 9-ig. A különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. A következőket tudjuk:

- $S \cdot Z \cdot \acute{A} \cdot M = 180$,


- $L \cdot \acute{A} \cdot Z = 162$,

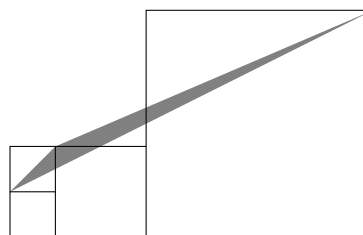
- $S < Z < \acute{O} < R$, valamint

- $KAL + M\acute{A}R + L\acute{A}S + ZL\acute{O} = 2019$.

(Itt KAL , $M\acute{A}R$, $L\acute{A}S$ és $ZL\acute{O}$ a megfelelő számjegyek egymás után írásával kapott háromjegyű számokat jelölik.)

Határozd meg, hogy melyik betűt mennyit ér! 

4. Négy négyzetből összeállítottuk az ábrán látható alakzatot. A bal szélén lévő kis négyzetek oldalhossza 3 egység, a tőlük jobbra lévő 6 egység, a jobb szélső négyzet méretét nem ismerjük. Mekkora lehet a beszínezett háromszög területe? 



5. Egy kör alakú asztalnál gyerekek ülnek. Két gyereket közelinek nevezünk, ha szomszédosak vagy ha csak egyetlen gyerek ül közöttük. A gyerekek szeretnének átülni úgy, hogy ha két gyerek eddig közeli volt, akkor az átrendezés után már ne legyenek közeli. Lehetséges-e ez, ha

a) 10 gyerek

b) 9 gyerek


ül az asztalnál? 

8. osztály

Megyei forduló


1. Marika és testvére fiatal koruk óta rendszeresen ültetnek citrommagokat, és gondozzák a belőlük kihajtó citromfákat. Az A , B és C jelű fákat különösen megkedvelték, mert ezek mind az évnek azonos napján hajtottak ki, Marika születésnapján.

Marika az idei (2019-es) születésnapján azt figyelte meg, hogy 3 év múlva ezen a napon B pont kétszer olyan idős lesz, mint A , míg a következő 3 év elteltével meg C lesz pont kétszer olyan idős, mint B .

Melyik években lesz majd lehetséges, hogy a 3 fácska együtt éppen 111 éves a közös születésnapján? Az összes lehetőséget keresd meg! 

2. Két szabályos dobókockával, egy pirossal és egy kékkel dobunk. A piros szám lesz egy számtani sorozat első tagja, a kék pedig a differenciája. Minek nagyobb az esélye: annak, hogy a kapott sorozatban lesz köbszám (három egyforma szám szorzataként megkapható szám), vagy annak, hogy nem?

(Ha például a piros szám 2, a kék szám 5, akkor a kapott sorozat a 2, 7, 12, ..., és ebben a sorozatban van köbszám, a $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.) 

3. Az $ABCD$ négyzet oldalaira kifelé megrajzoljuk az ABP , BCR , CDS , DAT szabályos háromszögeket. Az így kapott A, B, C, D, P, R, S, T pontok hány egyenlő szárú háromszöget határoznak meg? Ezek közül hány szabályos? 

4. Egy kör alakú asztalnál gyerekek ülnek (legalább ketten). Két gyereket közelinek nevezünk, ha szomszédosak vagy ha csak egyetlen gyerek ül közöttük. A gyerekek szeretnének átülni úgy, hogy ha két gyerek eddig közeli volt, akkor az átrendezés után már ne legyenek közeli.

Legkevesebb hány gyerek esetén lehetséges egy ilyen átrendezés? 

5. Egy egyenlőszárú háromszögben az egyik oldal kétszer olyan hosszú, mint az egyik magasság. Hány fokosak lehetnek a háromszög szögei? Az összes lehetőséget keresd meg! 

5. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. A 2019 előállítható 10 darab 3-as számjegy, a négy alapművelet és zárójelek használatával. Például: $2019 = 333 \cdot (3 + 3) + 33 - 3 \cdot 3 - 3$.

- a) Mutasd meg, hogy pontosan 9 darab 3-as számjeggyel is lehetséges ez.
b) Mutasd meg, hogy 9-nél kevesebb 3-as számjeggyel is lehetséges ez. ➔

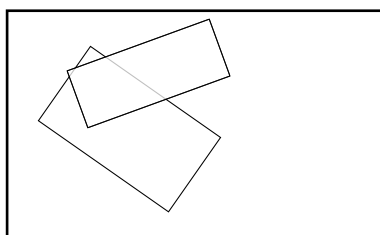
2. Egy pozitív egész számot szépségesnek nevezünk, ha az elejéről, végéről, vagy mindkét irányból néhány számjegyet törölve éppen az eredeti szám számjegyei összegét kapjuk. (Például a 40, 3126, 333150 számok szépségesek.) Hány háromjegyű szépséges szám van? ➔

3. Töltsd ki az alábbi táblázatot úgy, hogy a 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44 számok mindegyike pontosan egyszer szerepeljen benne. A kitöltésre az is igaz legyen, hogy a számok tízes helyiértéken álló jegye mindegyik sorban és mindegyik oszlopban csupa különböző számból álljon, és ugyanez legyen igaz az egyes helyiértéken álló számjegyekre is. A táblázatba néhány számot előre beírtunk, valamint tudjuk, hogy az x helyére páros szám jön. ➔

Elegendő egy jó kitöltést megadni, nincs szükség indoklásra!

	41		
x			32
13			


4. Egy téglalap alakú szobában két szőnyeg hever úgy, hogy egy kis részük egymásra lóg. A mindkét szőnyeg által fedett terület a kisebb szőnyegnek $1/3$ -a, a nagyobbak $1/4$ -e, a teljes szobának pedig $3/28$ része. A szoba mekkora részét nem fedi egyetlen szőnyeg sem? ➔



5. Hexominóknak nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeket megkaphatunk úgy, hogy hat darab egységnyi oldalhosszúságú négyzetet összeillesztünk az oldalaiknál fogva. Hány olyan hexominó van, aminek 12 egység a kerülete? (A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető hexominókat azonosnak tekintjük.) ➔


5. osztály, 2. nap


Országos döntő


1. Egy öttagú baráti társaság egy furcsa étterembe ment ebédelni. Egy olyan kerekasztal köré ültetik le őket, ahol a székek egytől ötig számozottak. Az ebéd végén mindenkinek annyiszor 1000 forintot kell fizetni, amennyi a két szomszédja sorszámának különbsége. A székeket a pincér rendezheti el a társaság érkezése előtt. Hogyan rakja le a pincér a székeket a lehető legnagyobb számla elérése érdekében? 

2. Egy szabaduló szoba utolsó feladványához értél, egy számzárás lakat van az ajtón. Három számjegyet kell megfejtened, ezek mindegyike 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 valamelyike lehet. Háromjegyű számokkal kérdezhettél rá, de csak négyszer. Ezekre meg is kaptad a választ:

	Kérdezett szám	Ennyi számjegyet eltaláltál	Közülük ennyi van jó helyen
1.	245	0	0
2.	760	2	0
3.	806	1	0
4.	037	2	0






Melyik szám nyitja a lakatot? 

3. Egy téglalap egyik oldalát csökkentettük 24 cm-rel, a másikat viszont a háromszorosára növeltük. Így egy olyan négyzetet kaptunk, melynek területe egyenlő az eredeti téglalap területével. Mekkora a keletkezett négyzet oldala? 

4. Péter pénztárcájában 5, 10, 20, 50, 100 és 200 forintosok vannak. Tudjuk, hogy mindegyik pénzérme fajtából különböző számú van, illetve tudjuk, hogy 5 forintos érméből kétszer annyi van, mint 200 forintosból, 100 forintos érméből kétszer annyi van, mint 10 forintosból, valamint 50 forintos érméből nyolcszor annyi van, mint 20 forintosból. Mennyi pénze lehet legfeljebb Péternek, ha kevesebb, mint 2000 forintja van? 





6. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Egy pozitív egész számot szépségesnek nevezünk, ha az elejéről, végéről, vagy mindkét irányból néhány számjegyet törölve éppen az eredeti szám számjegyei összegét kapjuk. (Például a 40, 3126, 333150 számok szépségesek.) Hány háromjegyű szépséges szám van? 
2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 számjegyek közül minél kevesebb felhasználásával állítsd elő a 2019-et! Indokold meg, hogy miért nem lehet kevesebből! Csak az alapműveleteket lehet használni (zárójeleket nem). Minden számjegyet csak egyszer használhatsz és nem lehet többjegyű számokat alkotni. 
3. Hexominóknak nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeket megkaphatunk úgy, hogy hat darab egységnyi oldalhosszúságú négyzetet összeillesztünk az oldalaiknál fogva. Hány olyan hexominó van, aminek 12 egység a kerülete? (A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető hexominókat azonosnak tekintjük.) 
4. Hét szabályos dobókockát összeragasztottunk úgy, hogy az egyik kocka minden lapjához egy-egy további kocka egy-egy lapját illesztettük. A testre ezután a lapokra merőleges irányokból ránézve, mind a hat lehetséges irányból ugyanannyi pöttyöt látunk. Hány pöttyöt láthatunk legfeljebb? Rajzoljátok le a testet mind a hat irányból (előlről, hátulról, balról, jobbról, alulról és felülről)! (Egy dobókocka szabályos, ha a szemközti lapjain a pöttyök összege hét.) 
5. Egy téglalap szomszédos oldalai 4 egység és 7 egység hosszúak. Osszuk fel a téglalapot négy darab tengelyesen szimmetrikus négyszögre úgy, hogy a felosztásban szereplő bármely négyszög bármely oldalának hossza vagy 3 egység, vagy 4 egység legyen! 



6. osztály, 2. nap




Országos döntő

1. Egy tartályban 300 liter víz van. Van négy vödörünk: egy piros, egy zöld, egy kék és egy sárga. A piros vödörbe kétszer annyi víz fér, mint a zöldbe, a zöld vödörbe kétszer annyi víz fér, mint a kékbe és a kék vödörbe kétszer annyi víz fér, mint a sárgába. Miután a négy vödört teljesen megtöltöttük a tartályban lévő vízből, a tartályban 11 literrel több víz maradt, mint amennyi a kék vödörbe került. Hány liter víz fér a zöld vödörbe? 
2. Dani digitális órája 13:24-et mutat. Ez azon ritka percek egyike, amikor az órán négy egymás utáni számjegy látható.
 - a) Hány ilyen perc van egy nap folyamán?
 - b) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő ilyen állás között?(A digitális órán mindig négy számjegy látható és 24 órás formátumot használ, pl.: 00:41 vagy 21:29.) 
3. Péter pénztárcájában 5, 10, 20, 50, 100 és 200 forintosok vannak. Tudjuk, hogy mindegyik pénzerme fajtából különböző számú van, illetve tudjuk, hogy 5 forintos érméből kétszer annyi van, mint 200 forintosból, 100 forintos érméből kétszer annyi van, mint 10 forintosból, valamint 50 forintos érméből nyolcszor annyi van, mint 20 forintosból. Mennyi pénze lehet legfeljebb Péternek, ha kevesebb, mint 2000 forintja van? 
4. Egy 5×5 -ös táblázat minden mezőjére egy-egy pozitív egész számot írtunk (lehetnek közöttük egyenlők). Kiszámoltuk minden sorban és minden oszlopban a számok összegét. Ez a tíz összeg csupa különböző pozitív egész. Mennyi a táblázatban szereplő 25 szám összege, ha az a lehető legkisebb? 

7. osztály, 1. nap





Országos döntő

1. Egy téglalap szomszédos oldalai 4 egység és 7 egység hosszúak. Osszuk fel a téglalapot négy darab tengelyesen szimmetrikus négyszögre úgy, hogy a felosztásban szereplő bármely négyszög bármely oldalának hossza vagy 3 egység, vagy 4 egység legyen! 
2. A sík minden pontjához hozzárendeltünk egy egész számot úgy, hogy a következő teljesül: ha A , B , C és D egy négyzet csúcsai, akkor a hozzájuk rendelt számok összege nulla. Lehetséges-e, hogy a sík valamelyik P pontjához nem a nullát rendeltük? 
3. Legyen

$$S = 2019^{2019} + 2019^{2018} + 2019^{2017} + \dots + 2019^2 + 2019^1 + 1.$$
 Mutasd meg, hogy S -nek van háromjegyű prímosztója. 
4. Anna egy szabályos hatszög hat csúcsát kiszínezte pirossal, kézzel vagy sárgával úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. Ezután Béla behúzott három átlót úgy, hogy a hatszög belsejében nem keletkezett metszéspont, és mindegyik átló két különböző színű csúcsot kötött össze. Hányféleképpen nézhet ki ezek után az ábra? A forgatással, tükrözéssel egymásba vihető ábrákat **nem** tekintjük különbözőnek. 
5. Robot Robi a következő számolást végzi: ha megadunk neki egy pozitív egész számot, ő elosztja maradékosan 43-mal, majd összeadja a kapott maradékot és hányadost, és leírja az így kapott számot. Egy napon Robinak sorra az 1, 2, 3, ..., 2019 számokat adták meg, és ő mindegyikkel elvégezte a fenti számolást. A Robi által leírt 2019 darab szám között hány darab 7-tel osztható van? 






7. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Egy tizenegy tagú baráti társaság egy furcsa étterembe ment ebédelni. Egy olyan kerekasztal köré ültetik le őket, ahol a székek 1-től 11-ig számozottak. Az ebéd végén mindenkinek annyiszor 1000 forintot kell fizetni, amennyi a két szomszédja sorszámának különbsége. A székeket a pincér rendezheti el a társaság érkezése előtt. Mit tegyen a lehető legnagyobb számla elérése érdekében? 
2. Dani digitális órája 13:24-et mutat. Ez azon ritka percek egyike, amikor az órán négy egymás utáni számjegy látható.
 - a) Hány ilyen perc van egy nap folyamán?
 - b) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő ilyen állás között?(A digitális órán mindig négy számjegy látható és 24 órás formátumot használ, pl.: 00:41 vagy 21:29.) 
3. Egy 5×5 -ös táblázat minden mezőjére egy-egy pozitív egész számot írtunk (lehetnek közöttük egyenlők). Kiszámoltuk minden sorban és minden oszlopban a számok összegét. Ez a 10 összeg csupa különböző pozitív egész. Mennyi a táblázatban szereplő 25 szám összege, ha az a lehető legkisebb? 
4. Nevezzük egy háromszög valamely oldalát *kurtának*, ha nem hosszabb a hozzá tartozó magasságnál. Legfeljebb hány *kurta* oldala lehet egy háromszögnek? 

8. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. A sík minden pontjához hozzárendeltünk egy egész számot úgy, hogy a következő teljesül: ha A , B , C és D egy négyzet csúcsai, akkor a hozzájuk rendelt számok összege nulla. Lehetséges-e, hogy a sík valamely P pontjához nem a nullát rendeltük? 
2. Legyen
$$S = 2019^{2019} + 2019^{2018} + 2019^{2017} + \dots + 2019^2 + 2019^1 + 1.$$
Mutasd meg, hogy S -nek van háromjegyű prímosztója. 
3. Legfeljebb hány kereszt alakú tartomány (egy négyzetből és négy vele oldalszomszédos négyzetből álló alakzat) helyezhető el egy 8×8 -as sakktáblán átfedés nélkül? (A kereszt alakú tartományok nem lóghatnak le a tábláról, és követniük kell a rácsvonalakat.) 
4. Robot Robi a következő számolást végzi: ha megadunk neki egy pozitív egész számot, ő elosztja maradékosan 43-mal, majd összeadja a kapott maradékot és hányadost, és leírja az így kapott számot. Egy napon Robinak sorra az 1, 2, 3, ..., 2019 számokat adták meg, és ő mindegyikkel elvégezte a fenti számolást. A Robi által leírt 2019 darab szám között hány darab 7-tel osztható van? 
5. Az egyenlőszárú ABC háromszögbe beírtunk egy DEF háromszöget úgy, hogy D az AB oldalon, E az AC oldalon és F a BC oldalon van. Tudjuk, hogy $AD = AE$, $BD = BF$ és $DFCE$ egy deltoid. Bizonyítsd be, hogy a DEF háromszög egyenlőszárú! (Sem a $DFCE$ deltoidnál, sem az ABC , sem a DEF háromszögnél nem adtuk meg, hogy melyek az egyenlő oldalak.) 

8. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Egy tíztagú baráti társaság egy furcsa étterembe ment ebédelni. Egy kerekasztal köré ültetik le, a székek 1-től 10-ig számozottak. Az ebéd végén mindenkinek annyiszor 1000 forintot kell fizetni, amennyi a két szomszédja sorszámának különbsége. A székeket a pincér rendezheti el a társaság érkezése előtt. Mit tegyen a lehető legnagyobb számla elérése érdekében? →
2. Nevezzük egy háromszög valamely oldalát *kurtának*, ha rövidebb a hozzá tartozó magasságnál. Legfeljebb hány *kurta* oldala lehet egy háromszögnek? →
3. Egy sorozat bármely négy (ebben a sorrendben) egymást követő a , b , c és d tagjára teljesül, hogy $a \cdot d = b \cdot c$. A sorozat első tagja 112, negyedik tagja 192, hetedik tagja 378. Mennyi lehet a sorozat 12. tagja? (A sorozatnak lehetnek nem egész tagjai is!) →
4. A 8.c osztályba 29 gyerek jár. Azt tudjuk, hogy mindegyik gyerek 14 vagy 15 éves. Az osztályfőnök meg akarja tudni, hogy hány éves az egyik gyerek, de a gyerekek csak úgy hajlandók válaszolni, ha a tanár rámutat 11 gyerekre és akkor elárulják a 11 gyerek életkorának összegét. Mennyi a legkevesebb kérdés, amiből a tanár biztosan ki tudja találni, hogy hány éves a kérdéses személy? →

Megoldások

5. osztály

Megyei forduló

1. Piros, sárga, kék, narancs, fehér és zöld korongjaink vannak egy sorban, mindegyik színből egy darab. A következőket tudjuk:
- (1) A zöld korong nem a jobb szélén van.
 - (2) A piros korong két másik korong között található.
 - (3) A fehér korong közvetlenül a narancstól balra van.
 - (4) A sárga korong a piros és a fehér között helyezkedik el, de egyiknek sem szomszédja.
- Milyen sorrendben helyezkedhetnek el a korongok?

A negyedik állítás miatt a sárga korong a középső kettő valamelyike, a piros és a fehér pedig biztosan nem. Ha a sárgától balra helyezkedne el a piros korong, akkor a második állítás miatt a pirosnak kellene a második, a sárgának a negyedik, a fehérnek pedig a hatodik helyen állnia. De ez a harmadik állítás miatt nem lehetséges, hiszen a fehér nem állhat a jobb szélén.

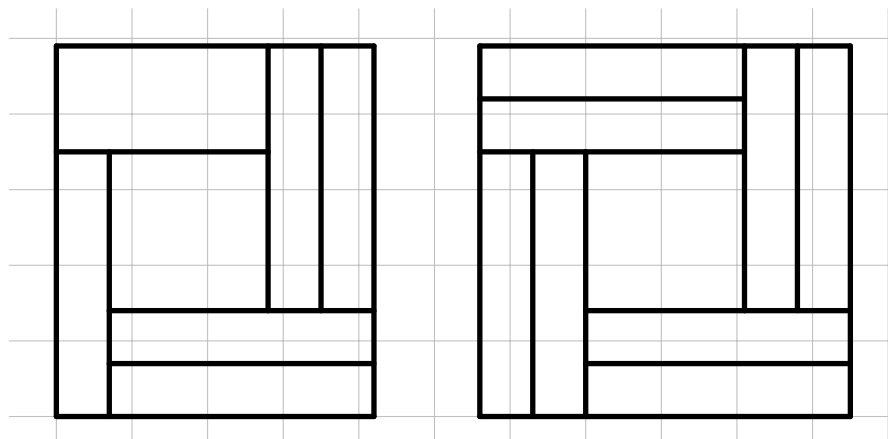
Tehát a sárgától jobbra helyezkedik el a piros korong. Ez a második és a negyedik állítás miatt csak úgy lehetséges, hogy a fehér az első korong, a sárga a harmadik korong és a piros pedig az ötödik. A harmadik állítás miatt ekkor a második korong a narancs színű. Végül mivel a zöld nem állhat a jobb szélén, a zöld az negyedik korong és a kék a hatodik.

Tehát a helyes sorrend: fehér, narancs, sárga, zöld, piros, kék.

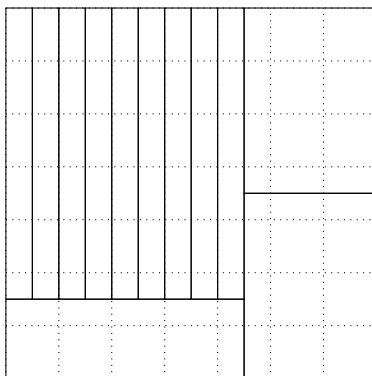


2. Össz fel 12 centiméter területű téglalapokra
- a) egy olyan téglalapot, amelynek szomszédos oldalai 6 cm és 7 cm hosszúak;
 - b) egy 7 cm oldalhosszúságú négyzetet!
- Elég egy-egy jó felosztást megadni, nincs szükség indoklásra. Ábráidon egyértelműen add meg valamennyi téglalap oldalainak hosszát!

Mivel a téglalap oldali egész oldal hosszúságúak, érdemes egész oldalhosszúságú téglalapokkal próbálkozni. Két szomszédos oldal összesen 6 hosszúságú, így három megfelelő van: az 1×5 -ös, a 2×4 -es és a 3×3 -as. Egy lehetséges megoldás ilyen téglalapokkal:



Megjegyzés. A (b) kérdésre egy olyan megoldás, ahol az oldalak hossza nem egész szám:



3. Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely pontosan kétféle számjegyet tartalmaz?

Első megoldás. Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy szerepel-e a jegyek között a nulla.

Első eset: A szám az a, b nem nulla számjegyeket tartalmazza. Ekkor a következő számok a megfelelőek: $\overline{ab}, \overline{ba}, \overline{aab}, \overline{bba}, \overline{aba}, \overline{bab}, \overline{abb}, \overline{baa}$. Tehát minden a, b különböző nem nulla számokhoz 8 megfelelő szám létezik. Mivel a -t és b -t tetszőlegesen megválaszthatjuk, de különbözőek, $\frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 8 = 288$ megfelelő számot találtunk.

Második eset: A szám az $a, 0$ számjegyeket tartalmazza. Ekkor a következő számok a megfelelőek: $a0, a00, aa0, a0a$. Tehát $4 \cdot 9 = 36$ ilyen szám van.

Tehát összesen $288 + 36 = 324$ megfelelő szám létezik.

Második megoldás. Olyan számból, mely kisebb 1000-nél és pontosan 1 féle számjegyet tartalmaz összesen $9 + 9 + 9 = 27$ van. Olyanból mely pontosan háromfélet tartalmaz pedig $9 \cdot 9 \cdot 8$, mivel az első bármilyen nem nulla jegy lehet, a második csak az első nem lehet, a harmadik pedig csak az első kettő nem.


Így összesen $999 - 3 \cdot 9 - 9 \cdot 9 \cdot 8 = 324$ megfelelő szám létezik.




4. Anna és Benő két hatoldalú dobókockával játszanak. A kockák nem szokványosak, oldalaira nem számok vannak írva, hanem kékre vagy pirosra vannak színezve. A játék nagyon egyszerű: feldobják mindkét kockát, és ha a kapott színek egyformák, akkor Anna nyer, különben pedig Benő.

Az egyik kockának öt kék lapja van és csak egy piros. Tudjuk, hogy a játék igazságos, azaz Annának és Benőnek is ugyanolyan esélye van nyerni. Hány kék és hány piros lapja lehet a másik kockának? (Feltételezzük, hogy bármelyik kockán bármelyik lap azonos eséllyel jön ki.)

Első megoldás. Ha a másik kockának minden lapja kék, akkor ötször akkora eséllyel lesz azonos a két szín, mint különböző, tehát a játék nem igazságos. Ugyanez a helyzet akkor, ha a másik kocka minden lapja piros, csak ekkor a különböző színeknek van ötször akkora esélye. Ha a másik kockának 1 piros és 5 kék lapja van, akkor a 36 lehetséges kimenetelből $1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 26$ ad azonos színt, és csak 10 jelent különbözőt. Ekkor sem igazságos a játék. Ha pedig a másik kockának 1 kék és 5 piros lapja van, akkor 26 esetben különböző a két szín, és csak 10-ben azonos. Ha a másik kockának 2 piros és 4 kék lapja van, akkor $1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 22$ esetben kapunk azonos színeket, és csak 14-ből különbözőt, ez sem jó. Ugyanígy, ha 2 kék és 4 piros lapja van, akkor 22 esetben különböző, 14-ben azonos színeket kapunk. Marad tehát az, hogy 3 piros és 3 kék lapja van a másik kockának. Ez nyilvánvalóan megfelel, hiszen az első dobástól függetlenül egyenlő esély van azonos és különböző színt dobni.

Második megoldás. Tegyük fel, hogy k kék és $6 - k$ piros lapja van a másik kockának. Számítsuk ki Anna nyerési esélyét. A két kocka $6 \cdot 6 = 36$ módon eshet le és ezek egyforma valószínűségű események. Ebből összesen $5 \cdot k$ esetben kapunk két kék oldalt és $1 \cdot (6 - k)$ esetben két pirosat. Tehát Anna győzelmi esélye $\frac{5k+6-k}{36} = \frac{4k+6}{36}$. Másrészt mivel ugyanolyan eséllyel nyerne, ez az esély $\frac{1}{2}$. Tehát $\frac{4k+6}{36} = \frac{1}{2}$. Megoldva az egyenletet kapjuk, hogy ez $k = 3$ esetén teljesül. Tehát három kék és három piros oldala van a másik kockának. 

5. Egy 8×8 -as sakktábla minden mezőjére ráírtunk egy számot, mindegyikre különbözőt. Nevezzünk egy mezőt érdekesnek, ha oszlopában órá írtuk a legnagyobb számot, sorában pedig a legkisebbet. Legfeljebb hány érdekes mező lehet a táblán?

Tegyük fel, hogy létezik két érdekes mező a táblán, a és b . Ezek nem lehetnek sem közös sorban, sem közös oszlopban. Legyen x az a mező, amely a -val egy sorban és b -vel egy oszlopban van. Ekkor az x -en lévő szám nagyobb, mint az a -ra írt, viszont kisebb, mint a b -re írt. Ebből következik, hogy az a -ra írt számnál nagyobb a b -re írt. Hasonlóan legyen y az a mező, amely a -val egy oszlopban és b -vel egy sorban van. Ekkor a rajta szereplő szám az a -n szereplőnél kisebb, a b -re írt számnál viszont nagyobb. Tehát a b -re kisebb számot kellett írni, mint a -ra. Mivel az a -ra szám nem lehet egyszerre kisebb és nagyobb a b -re írt számnál, ellentmondásra jutottunk. Tehát legfeljebb 1 érdekes mező lehet. Egy érdekes mező van pl. az alábbi kitöltésnél: az első hét sorba írjuk be 1-től 56-ig a számokat sorrendben. Az utolsó sorba írjuk 64-től 57-ig visszafele a számokat. Ekkor az 57-es nyilvánvalóan a legnagyobb az oszlopában és legkisebb a sorában, tehát érdekes a mezője. 

6. osztály

Megyei forduló

1. Nevezzünk egy 3-jegyű számot „hegyszámnak”, ha a középső számjegye nagyobb a másik kettőnél, és „völgyszámnak”, ha a középső számjegye a legkisebb. A hegyszámok és völgyszámok ugyanannyian vannak, vagy egyikből kevesebb akad? S ha igen, mennyivel?

Első megoldás. Ha a 3-jegyű számok közé számolnánk a 0-val kezdődőket is (például 079), akkor az $\overline{abc} \mapsto (9-a)(9-b)(9-c)$ megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés lenne a hegyszámok és a völgyszámok között. A „valódi” 3-jegyű számok esetében annyi a különbség, hogy a 9-cel kezdődő völgyszámoknak nincs párja. Elég tehát ezeket megszámlálni.

Egy ilyen szám $\overline{9ab}$ alakú, ahol $a < 9$ és $b > a$. Tehát a lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots, 8$ és ezekhez rendre $9, 8, 7, \dots, 1$ megfelelő b párosítható.

Tehát a völgyszámok vannak többen, a többlet: $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$.

Második megoldás. Kiszámolhatjuk, hány hegyszám illetve völgyszám van, mondjuk ezek középső jegye szerint csoportosítva az eseteket.

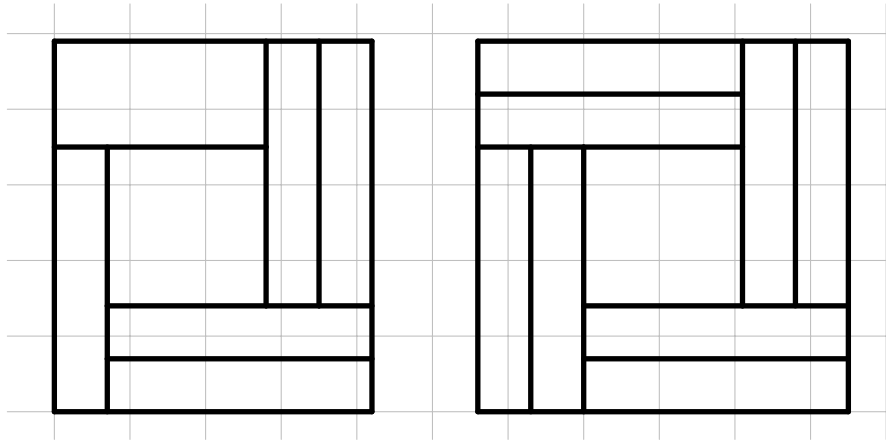
középső jegy	völgyszámok	hegyszámok
9	0	$8 \cdot 9 = 72$
8	$1 \cdot 1 = 1$	$7 \cdot 8 = 56$
7	$2 \cdot 2 = 4$	$6 \cdot 7 = 42$
6	$3 \cdot 3 = 9$	$5 \cdot 6 = 30$
5	$4 \cdot 4 = 16$	$4 \cdot 5 = 20$
4	$5 \cdot 5 = 25$	$3 \cdot 4 = 12$
3	$6 \cdot 6 = 36$	$2 \cdot 3 = 6$
2	$7 \cdot 7 = 49$	$1 \cdot 2 = 2$
1	$8 \cdot 8 = 64$	0
0	$9 \cdot 9 = 81$	0
összesen	285	240



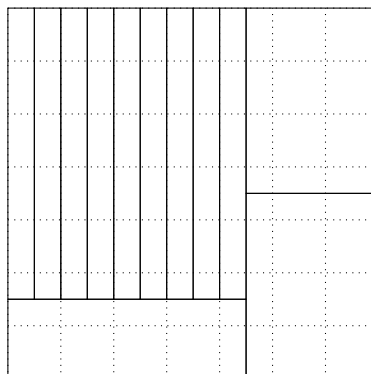
2. Ossz fel 12 centiméter területű téglalapokra
- egy olyan téglalapot, amelynek szomszédos oldalai 6 cm és 7 cm hosszúak;
 - egy 7 cm oldalhosszúságú négyzetet!

Elég egy-egy jó felosztást megadni, nincs szükség indoklásra. Ábráidon egyértelműen add meg valamennyi téglalap oldalainak hosszát!

Mivel a téglalap oldali egész oldal hosszúságúak, érdemes egész oldalhosszúságú téglalapokkal próbálkozni. Két szomszédos oldal összesen 6 hosszúságú, így három megfelelő van: az 1×5 -ös, a 2×4 -es és a 3×3 -as. Egy lehetséges megoldás ilyen téglalapokkal:



Megjegyzés. A (b) kérdésre egy olyan megoldás, ahol az oldalak hossza nem egész szám:



3. Egy 3×3 -as táblázatba természetes számokat írunk úgy, hogy a sorokba, illetve oszlopokba írt számok összege a táblázat mellett jelölt szám legyen, és a négy sarokmezőbe írt szám összege 10 legyen.

			10
			9
			8
8	9	10	

- a) Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy csupa kül. szám kerül a sarokmezőkbe?
 b) Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy minden beírt érték pontosan egyszer szerepel?
 c) Melyik a legnagyobb szám, ami a középső mezőbe kerülhet?

(a) Igen.

2	4	4	10
5	1	3	9
1	4	3	8
8	9	10	

(b) Nem. Soronként (vagy oszloponként) összegezve a beírt számokat azt kapjuk, hogy a kilenc szám összege $10 + 9 + 8 = 27$. Ha csupa különböző számmal töltöttük volna ki a táblázatot, akkor a számok összege legalább $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 7 + 8 = 36$ lenne.

(c) Középen mindig 1 áll, ezért a lehetséges legnagyobb érték 1. Az első és utolsó sor összegéhez az első és utolsó oszlop összegét adva $10 + 8 + 10 + 8 = 36$ adódik. Ebben az összegben a négy sarok kétszer van számolva, a négy „élközép” mező pedig egyszer, tehát az „élközép” mezőkre írt számok összege $36 - 2 \cdot 10 = 16$.

Ha a középső sor összegéhez a középső oszlop összegét adjuk, akkor az egyrészt $9 + 9 = 18$, másrészt ez az összeg a négy „élközép” szám összegénél a középső szám duplájával nagyobb.


Jelöljük a középső számot x -szel. Azt kaptuk, hogy $16 = 18 - 2 \cdot x$, innen $x = 1$. ↑

4. Hány olyan 10000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely pontosan kétféle számjegyet tartalmaz?

Jelöljük egy ilyen szám első jegyét a -val, a -tól különböző másik jegyét pedig b -vel. a kilencféle értéket vehet fel (nullát nem), b szintén, mert a -tól különböznie kell, de lehet nulla is. Így a és b kiválasztása összesen $9 \cdot 9 = 81$ -féle módon történhet.

Most felsoroljuk, hogy egy rögzített (a, b) pár esetén hányféle elrendezése van a számjegyeknek. A számjegyek száma szerint csoportosítjuk az eseteket. A 10000-nél kisebb számok legfeljebb négyjegyűek, és mivel van két különböző jegy, legalább kétjegyűek jöhetnek szóba.

- kétjegyűek: ab (1)
- háromjegyűek: aab, aba, abb (3)
- négyjegyűek: $aaab, aaba, abaa, aabb, abab, abba, abbb$ (7)

Tehát összesen $81 \cdot (1 + 3 + 7) = 81 \cdot 11 = 891$ megfelelő szám van. 

5. Az $A, \acute{A}, K, L, M, \acute{O}, R, S, Z$ betűk mindegyike egy számjegyet jelöl 1-től 9-ig. A különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. A következőket tudjuk:

- $S \cdot Z \cdot \acute{A} \cdot M = 180$,
- $L \cdot \acute{A} \cdot Z = 162$,
- $S < Z < \acute{O} < R$, valamint
- $KAL + M\acute{A}R + L\acute{A}S + ZL\acute{O} = 2019$.
(Itt $KAL, M\acute{A}R, L\acute{A}S$ és $ZL\acute{O}$ a megfelelő számjegyek egymás után írásával kapott háromjegyű számokat jelölik.)

Határozd meg, hogy melyik betűt mennyit ér!

Egy lehetséges gondolatmenet:

- $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ és $162 = 2 \cdot 3^4$, tehát a $Z \cdot \acute{A}$ szorzatból csak két hármas tényező jöhet, így a második feltétel miatt csak $L = 9$ lehetséges, és $\{\acute{A}, Z\} = \{3, 6\}$.
- Most az első feltételből $S \cdot M = \frac{180}{3 \cdot 6} = 10$, így $\{S, M\} = \{2, 5\}$.
- Az utolsó feltételben a végződés összegét vizsgálva kapjuk, hogy $R + S + \acute{O}$ 0-ra végződik. Az eddig „lefoglalt” jegyek miatt $\{\acute{O}, R\} \subset \{1, 4, 7, 8\}$.
- Most elágazunk S lehetséges értékei alapján.

– $S = 5$.

Ekkor $M = 2$ és $Z > S$ miatt csak $Z = 6$ lehetséges. Most $S < \acute{O} < R$ alapján csak $\acute{O} = 7$ és $R = 8$ teljesülhet, továbbá Z választása miatt az maradt, hogy $\acute{A} = 3$. Az ismert értékeket visszaírva az utolsó feltételbe: $\overline{KA9} + 238 + 935 + 697 = 2019$, innen $K = 1$ és $A = 4$.

– $S = 2$.

Ekkor $R + \acute{O}$ 8-ra végződik, de mivel 9-nél kisebb számjegyekről van szó, ezért $R + \acute{O} = 8$. Viszont $Z \geq 3$ és $S < Z < \acute{O} < R$ miatt $R + \acute{O} \geq 5 + 4 = 9$, tehát ez az eset nem lehetséges.

Azt kaptuk, hogy az egyetlen lehetséges megoldás:

$$A = 4, \acute{A} = 3, K = 1, L = 9, M = 2, \acute{O} = 7, R = 8, S = 5, Z = 6.$$



7. osztály

Megyei forduló

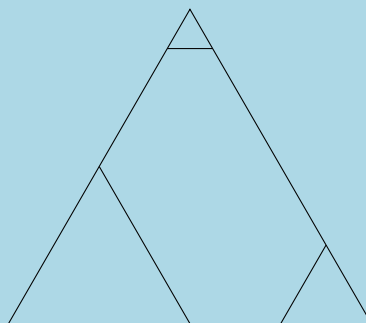
1. Bizonyítsd be, hogy 2019 db egymást követő pozitív egész szám közül mindig kiválasztható 19 db úgy, hogy az összegük osztható legyen 2019-cel!

Első megoldás. Nézzük először az $1, 2, 3, \dots, 2019$ számokat. Ezek közül az $1, 2, \dots, 9, 2010, 2011, \dots, 2019$ számokat kiválasztva az összeg osztható 2019-cel, hiszen $1 + 2018 = 2 + 2017 = \dots = 9 + 2010 = 2019$. Ezután növeljük 1-gyel a 2019 egymást követő szám mindegyikét. Ha a kiválasztott számaink szerepelnek a megnövelt számok között is, akkor az összegük továbbra is megfelelő. Ha a legkisebb szám ki volt választva, akkor helyette vegyük be az újonnan belépő legnagyobbat. Ez éppen 2019-cel nagyobb nála, így a 19 szám összege 2019-cel nőtt, azaz továbbra is osztható maradt 2019-cel. Így akárhányszor léptetjük a 2019 egymást követő számot, mindig lesz köztük 19 db szám, amelyek összege osztható 2019-cel, ezt kellett bizonyítani.

Második megoldás. Elég az egymást követő számok 2019-cel vett osztási maradékát vizsgálni. Ezek valamilyen sorrendben éppen a $0, 1, 2, \dots, 2018$ számok. Ezekből szeretnénk egy olyan összeget előállítani, amelynek 19 tagja van és értéke a 2019 többszöröse. Egy lehetséges megoldás: $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 16 + 17 + 1866 = \frac{17 \cdot 18}{2} + 1866 = 153 + 1866 = 2019$.



2. Egy játékkészletben egybevágó szabályos háromszöglapok szerepelnek. Az elemek az ábrán látható módon négy részre vannak osztva.



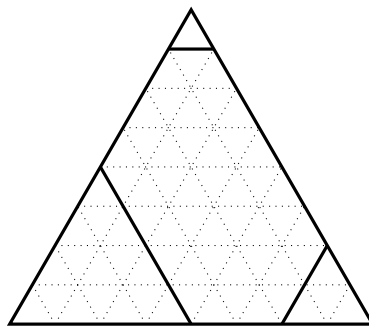
A csúcsokban levő szabályos háromszög alakú mezők oldalainak hossza 1, 2, 4, míg a teljes elem oldalhossza 8 egység. A háromszöglapok részei ki vannak színezve a piros, kék, zöld vagy sárga színek valamelyikére úgy, hogy minden lapon a négy rész négy különböző színnel van színezve. Ezenkívül a készletben lévő háromszöglapok között nincs két egyforma, de minden lehetséges színezésű szerepel.

A háromszöglapokból ki akarunk rakni egy olyan alakzatot, melyen a különböző színek területei egyenlők. Meg tudjuk-e ezt csinálni úgy, hogy az alakzatunk

- pontosan 3 elemből álljon?
- pontosan 5 elemből álljon?

Legyen az egységnyi oldalú szabályos háromszög területe a területegységünk.

Felosztva a nagy háromszöget kisebbekre, megállapíthatjuk a részek területének arányát:




A sarkokban lévő háromszögek területe 1, 4 és 16, a középső hatszög területe pedig 43 egység.

(a) Színenként $\frac{3 \cdot 64}{4} = 48$ területegységnek kell összeállnia. Ez lehetséges:

$$(43, 4, 1, 16) + (1, 43, 4, 16) + (4, 1, 43, 16) = (48, 48, 48, 48)$$

(A területek összege szempontjából az nem is lényeges, hogy pontosan hogyan illesztettük össze az alakzatokat, csak az, hogy melyik eleme melyik tartománya milyen színű. A fenti jelölés úgy olvasandó, hogy a színek sorrendjét rögzítjük, és ebben a sorrendben írjuk le a színekhez tartozó területek nagyságát.)

(b) Nem lehetséges. Színenként $\frac{5 \cdot 64}{4} = 80$ terület egységnek kell összeállnia. Mindegyik alakzaton van egy 43 egység területű szín, és az öt alakzat közül legalább kettőn ugyanaz a szín lesz 43 egység területű. De $43 + 43 = 86 > 80$, ezért ilyen kirakás nem létezik. 

3. Az $A, \acute{A}, K, L, M, \acute{O}, R, S, Z$ betűk mindegyike egy számjegyet jelöl 1-től 9-ig. (A különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) A következőket tudjuk:

- $S \cdot Z \cdot \acute{A} \cdot M = 180$,
- $L \cdot \acute{A} \cdot Z = 162$,
- $S < Z < \acute{O} < R$, valamint
- $KAL + M\acute{A}R + L\acute{A}S + ZL\acute{O} = 2019$.

Határozzátok meg, hogy melyik betűt mennyit ér!

Egy lehetséges gondolatmenet:

- $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ és $162 = 2 \cdot 3^4$, tehát a $Z \cdot \acute{A}$ szorzatból csak két hármas tényező jöhet, így a második feltétel miatt csak $\boxed{L = 9}$ lehetséges, és $\{A, Z\} = \{3, 6\}$.
- Most az első feltételből $S \cdot M = \frac{180}{3 \cdot 6} = 10$, így $\{S, M\} = \{2, 5\}$.
- Az utolsó feltételben a végzések összegét vizsgálva kapjuk, hogy $R + S + \acute{O}$ 0-ra végződik. Az eddig „lefoglalt” jegyek miatt $\{\acute{O}, R\} \subset \{1, 4, 7, 8\}$.
- Most elágazunk S lehetséges értékei alapján.

– $\boxed{S = 5}$.

Ekkor $\boxed{M = 2}$ és $Z > S$ miatt csak $\boxed{Z = 6}$ lehetséges. Most $S < \acute{O} < R$ alapján csak $\boxed{\acute{O} = 7}$ és $\boxed{R = 8}$ teljesülhet, továbbá Z választása miatt az maradt, hogy $\boxed{A = 3}$. Az ismert értékeket visszaírva az utolsó feltételbe: $\overline{KA9} + 238 + 935 + 697 = 2019$, innen $\boxed{K = 1}$ és $\boxed{A = 4}$.

– $S = 2$.

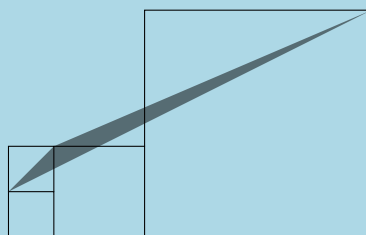
Ekkor $R + Ó$ 8-ra végződik, de mivel 9-nél kisebb számjegyekről van szó, ezért $R + Ó = 8$. Viszont $Z \geq 3$ és $S < Z < Ó < R$ miatt $R + Ó \geq 5 + 4 = 9$, tehát ez az eset nem lehetséges.

Azt kaptuk, hogy az egyetlen lehetséges megoldás:

$A = 4, Á = 3, K = 1, L = 9, M = 2, Ó = 7, R = 8, S = 5, Z = 6$.

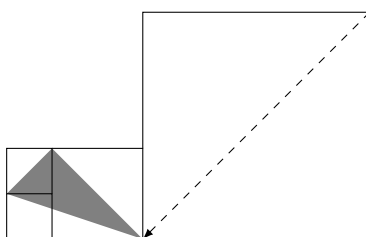


4. Négy négyzetből összeállítottuk az ábrán látható alakzatot. A bal szélen lévő kis négyzetek oldalhossza 3 egység, a tőlük jobbra lévő 6 egység, a jobb szélső négyzet méretét nem ismerjük. Mekkora lehet a beszínezett háromszög területe?



Ha egy háromszög egyik csúcsát a szemközti oldallal párhuzamosan mozgatjuk, a háromszög területe nem változik, mert a szemközti oldal hossza, és az ahhoz tartozó magasság meghatározza a területet, és ezek az értékek nem változnak a mozgatás során.

Ez a gondolat felhasználható arra, hogy az ábra jobb felső sarkában lévő csúcsot egy olyan pozícióba mozgassuk, ahol kényelmesebben számolható a terület. Az ábrán látható négy négyzet „bal alsó – jobb felső” átlója párhuzamos (mindegyik 45 fokos szöget zár be a vízszintessel), ezért az alábbi háromszög területe egyenlő az eredeti háromszög területével:



A két legkisebb négyzet területe 9 egység, a mellettük lévő középső négyzet területe pedig 36 egység.

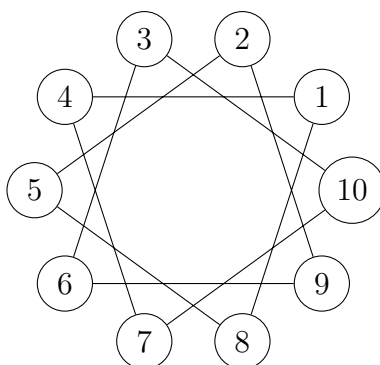
Az új háromszög területét megkapjuk, ha a $9 + 9 + 36 = 54$ egység területű befoglaló téglalapról levonjuk három derékszögű háromszög területét (bal felülről indulva és az óramutató járása szerint haladva):

$$T = 54 - \frac{9}{2} - \frac{36}{2} - \frac{3 \cdot 9}{2} = 54 - 4,5 - 18 - 13,5 = 54 - 36 = 18.$$



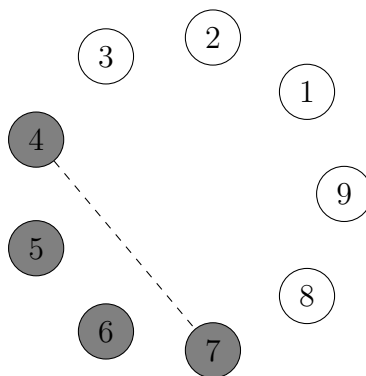
5. Egy kör alakú asztalnál gyerekek ülnek. Két gyermeket közelinek nevezünk, ha szomszédosak vagy ha csak egyetlen gyerek ül közöttük. A gyerekek szeretnének átülni úgy, hogy ha két gyerek eddig közeli volt, akkor az átrendezés után már ne legyenek közeli. Lehetséges-e ez, ha
- 10 gyerek
 - 9 gyerek
- ül az asztalnál?


(a) Lehetséges. Jelöljük összekötéssel az átülés utáni sorrendet.



Látható, hogy a behúzott átlók nem közeli gyerekeket kötnek össze, és az összekötés szerinti másodsomszédos gyerekek sem voltak közeliak eredetileg.

(b) Nem lehetséges.



Az 1-hez nem közeli gyerekek a 4,5,6 és 7, tehát az átrendezés után közülük kettő-kettő kell, hogy 1 két oldalán üljön. De 4,5,6 és 7, között csak egy olyan pár van (4-7), akik eredetileg nem közeliak. Az átrendezés után viszont két szomszédos (tehát közeli) pár alakul ki e négy gyerek között, tehát ezek közül az egyik pár eredetileg közeli volt. 

8. osztály

Megyei forduló

1. Marika és testvére fiatal koruk óta rendszeresen ültetnek citrommagokat, és gondozzák a belőlük kihajtó citromfákat. Az A , B és C jelű fákat különösen megkedvelték, mert ezek mind az évnek azonos napján hajtottak ki, Marika születésnapján. Marika az idei (2019-es) születésnapon azt figyelte meg, hogy 3 év múlva ezen a napon B pont kétszer olyan idős lesz, mint A , míg a következő 3 év elteltével meg C lesz pont kétszer olyan idős, mint B . Melyik években lesz majd lehetséges, hogy a 3 fácska együtt éppen 111 éves a közös születésnapon? Az összes lehetőséget keresd meg!

Jelölje E_A, E_B, E_C a három fa életkorát a 2019-es születésnapon és jelölje X , hogy hány év múlva lesznek együtt 111 évesek. A feladat alapján a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$2(E_A + 3) = E_B + 3$$

$$2(E_B + 6) = E_C + 6$$


$$(E_A + X) + (E_B + X) + (E_C + X) = 111$$

Az első egyenletből kapjuk, hogy $2E_A + 3 = E_B$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $4E_A + 12 = E_C$. Mindkettőt behelyettesítve a harmadik egyenletbe a következő diofantikus egyenletre jutunk:


$$E_A + X + 2E_A + 3 + X + 4E_A + 12 + X = 111$$

Ebből $7E_A + 3X = 96$ következik. Mivel E_A és X nemnegatív egészek, így E_A legfeljebb $\frac{96}{7} < 14$. Végigpróbálva ezt a 14 esetet, az alábbi megoldásokat kapjuk:

E_A	0	3	6	9	12
X	32	25	18	11	4

Erről leolvashatjuk, hogy a szóbjövő évszámok: 2023, 2030, 2037, 2044, 2051. Ellenőrizve a kapott megoldásokat láthatjuk, hogy ezek tényleg lehetnek is. 

2. Két szabályos dobókockával, egy pirossal és egy késsel dobunk. A piros szám lesz egy számtani sorozat első tagja, a kék pedig a differenciája. Minek nagyobb az esélye: annak, hogy a kapott sorozatban lesz köbszám (három egyforma szám szorzataként megkapható szám), vagy annak, hogy nem? (Ha például a piros szám 2, a kék szám 5, akkor a kapott sorozat a 2, 7, 12, ..., és ebben a sorozatban van köbszám, a $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.)


Ha a kék kockával 1-et dobunk, akkor a sorozat tagja lesz a 8, tehát lesz köbszám a sorozatban. Ha a késsel 2-t dobunk, akkor vagy a 8, vagy pedig a 27 szám szerepelni fog a sorozatban, a piros paritásától függően. Ha a kék kockával 3-at dobunk a 27, 64, 512 számok közül fog valamelyik szerepelni, hiszen a mindenféle hármas maradék előfordul közöttük, és nem tudunk náluk nagyobbat dobni. Tehát legalább az esetek felében lesz köbszám a sorozatban, hiszen ha a késsel 4-nél kevesebbet dobunk, akkor biztosan lesz. Viszont a feladatban is szereplő példa alapján akkor is lehet köbszám, ha a késsel 5-t dobunk. Tehát biztosan annak az esélye nagyobb, hogy szerepel köbszám a sorozatban. 

3. Az $ABCD$ négyzet oldalaira kifelé megrajzoljuk az ABP , BCR , CDS , DAT szabályos háromszögeket. Az így kapott A, B, C, D, P, R, S, T pontok hány egyenlő szárú háromszöget határoznak meg? Ezek közül hány szabályos?

Legyen a négyzet oldala egységnyi. Először vizsgáljuk meg, hogy hány egyenlő szárú háromszög jön létre, melynek a szárai közötti elhelyezkedő csúcsa A . A konstrukció miatt B, D, P és T egység távolságra van A -tól. Ezek közül bármelyik kettőt választhatjuk A mellé, tehát kaptunk hat egyenlő szárú háromszöget. Csak a C csúcs van $\sqrt{2}$ távolságra így azt nem használhatjuk. Az R és S csúcsok távolsága A -tól a szimmetria miatt egyenlő (Pitagorasz tétel alapján $\sqrt{(1 + \sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2}$). Tehát itt egy háromszöget találtunk. Ez összesen 7 háromszög. Szimmetriai okokból B, C és D is hétszer szerepel szárok közötti csúcsként egyenlő szárú háromszögben. Eddig tehát $4 \cdot 7 = 28$ háromszöget találtunk.

Most vizsgáljuk meg, hogy hány egyenlő szárú háromszög jön létre, melynek a szárai közötti elhelyezkedő csúcsa P . A PBR és PBC háromszögek egybevágósága miatt $PR = PC$, és a szimmetria miatt $PD = PT$ is egyenlő velük. Tehát P -tól egyenlő távol van R, C, D és T . A és B is egyenlő távol van, de más távolságra. Tehát itt is 7 háromszöget találtunk, az R, S, T pontokra is megnézve összesen 28-at.


Tehát összesen $4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 56$ egyenlő szárú háromszöget számoltunk, de a szabályosakat minden csúcscsokból számoltuk, úgyhogy le kell vonni kétszer a számukat.

A feladat megadott négy szabályos háromszöget. Mivel $PR = PD$, valamint a szimmetria miatt $PD = RD$, ezért a DPR háromszög is szabályos. Ugyanígy az ARS, BST, CTP háromszögek is. Ellenőrizhető, hogy az egyenlő szárú háromszögeink közül más nem lesz szabályos. Tehát 8 szabályos háromszög van és $56 - 2 \cdot 8 = 40$ egyenlő szárú. 

4. Egy kör alakú asztalnál gyerekek ülnek (legalább ketten). Két gyereket közelinek nevezünk, ha szomszédosak vagy ha csak egyetlen gyerek ül közöttük. A gyerekek szeretnének átülni úgy, hogy ha két gyerek eddig közeli volt, akkor az átrendezés után már ne legyenek közeli. Legkevesebb hány gyerek esetén lehetséges egy ilyen átrendezés?

Először megmutatjuk, hogy kilenc vagy kevesebb gyerek esetén ez nem lehetséges. Legyen k a gyerekek száma, és jelöljük a gyerekeket az $1, 2, \dots, k$ számokkal a szerint, hogy a kör mentén hányadik helyen ülnek.

Vizsgáljuk meg, hogy 1-nek kik lehetnek a szomszédai az átülést követően. Most $2, 3, k - 2$ és $k - 1$ ülnek közel 1-hez, tehát ők nem kerülhetnek mellé. Tehát $4, 5, \dots, k - 2$ közül kell választanunk két embert. Viszont a két mellé ülő ember az átülés után közel lesz egymáshoz, tehát az átülés előtt nem lehetnek közel. Ebből rögtön látszik, hogy legalább kilenc gyerekre szükség van, hiszen legfeljebb nyolc főnél még a $4, 5, \dots, k - 2$ gyerekek mind páronként közel vannak egymáshoz. Ha pont kilenc gyerek van, akkor az előző gondolatmenet alapján 1-nek csak 4 és 7 lehet a két új szomszédja. Viszont 4-re eljátszva ugyan ezt a gondolatmenetet azt kapjuk, hogy 4-nek csak 1 és 7 lehet a két új szomszédja. Ez a két feltétel már nem teljesülhet egyszerre, tehát kilenc fővel nem oldható meg a feladat. Tíz fő esetén már létezik megoldás, például a következő új sorrend megfelelő:

4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 10, 7. 

5. Egy egyenlőszárú háromszögben az egyik oldal kétszer olyan hosszú, mint az egyik magasság. Hány fokok lehetnek a háromszög szögei? Az összes lehetőséget keresd meg!

A feladat megoldásához a következő ismert állításokat használjuk fel.

- Ha egy derékszögű háromszög átfogója kétszer olyan hosszú mint az egyik befogója, akkor a háromszög félszabályos, azaz a szögei $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Azt is tudjuk, hogy a 60° helyezkedik el átfogó és a fel olyan hosszú befogó között.
- Ha egy derékszögű háromszög két befogója egyforma hosszú, akkor a szögei $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Legyenek a háromszögünk csúcsai A, B és C úgy, hogy A -ben találkozik a két szár. Jelöljük a háromszög alapjának hosszát a -val a szárának hosszát pedig b -vel. Jelöljük m_a -val az alaphoz tartozó magasság hosszát, m_b -vel pedig a szárhoz tartozó magasságát.

Legyen T az A -ból induló magasság talppontja.

Első eset: $a = 2m_a$. Ekkor ATB két befogója egyenlő, tehát a szögei $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Két ilyen összeillesztésével egy $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ szögekkel rendelkező háromszöget kapunk.

Második eset: $b = 2m_a$. Ekkor ATB átfogója kétszer olyan hosszú mint az egyik befogója, tehát a szögei $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, és A -nál van a 60 fokos szög. Ebből következik, hogy ABC szögei $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.

Harmadik eset: $a = 2m_b$. A terület képletekből adódik, hogy $am_a = bm_b$. Ebbe helyettesítve $b = 2m_a$ -t kapjuk, hogy $a = 2m_b$. Tehát ez az eset megfelel az előzőnek.

Negyedik eset: $b = 2m_b$. Legyen a B pont talppontja S . Akkor az ASB háromszög derékszögű, és az átfogója kétszer olyan hosszú, mint az egyik befogója. Vagyis akkor az ASB háromszög szögei $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, és az A -nál lévő szög 30° . Ez a szög viszont lehet külső vagy belső szög az alapján, hogy a háromszög hegyes vagy tompaszögű. Ha a háromszög hegyesszögű, akkor a BAC szög 30° , vagyis a háromszög szögei $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$ fokokak. Ha a háromszög tompaszögű, akkor a BAC szög 150° , vagyis a háromszög szögei $15^\circ, 15^\circ, 150^\circ$ fokokak.



5. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. A 2019 előállítható 10 darab 3-as számjegy, a négy alpművelet és zárójelek használatával. Például: $2019 = 333 \cdot (3 + 3) + 33 - 3 \cdot 3 - 3$.

- a) Mutasd meg, hogy pontosan 9 darab 3-as számjeggyel is lehetséges ez.
b) Mutasd meg, hogy 9-nél kevesebb 3-as számjeggyel is lehetséges ez.

a) $(333 + 3) \cdot (3 + 3) + 3 \cdot (3/3) = 336 \cdot 6 + 3 = 2016 + 3 = 2019$

b) $(333 + 3) \cdot (3 + 3) + 3 = 336 \cdot 6 + 3 = 2016 + 3 = 2019$

Más helyes megoldásokra is jár a teljes pont.



2. Egy pozitív egész számot szépségesnek nevezünk, ha az elejéről, végéről, vagy mindkét irányból néhány számjegyet törölve éppen az eredeti szám számjegyei összegét kapjuk. (Például a 40, 3126, 333150 számok szépségesek.) Hány háromjegyű szépséges szám van?

Öt eset van, aszerint, hogy melyik jegyeket vágtuk le az \overline{abc} háromjegyű számból.

- a) \overline{ab} : $a + b + c = 10a + b \Rightarrow c = 9a$, ezért csak $a = 1, c = 9$ lehetséges, b pedig tetszőleges (10 eset).
b) \overline{bc} : $a + b + c = 10b + c \Rightarrow a = 9b$, ezért csak $b = 1, a = 9$ lehetséges, c pedig tetszőleges (10 eset).
c) \overline{a} : $a + b + c = a \Rightarrow b = 0, c = 0$ és a tetszőleges pozitív számjegy (9 eset).
d) \overline{b} : $a + b + c = b \Rightarrow a = 0, c = 0$, ez nem lehetséges, mert a pozitív.
e) \overline{c} : $a + b + c = c \Rightarrow a = 0, b = 0$, ez nem lehetséges, mert a pozitív.

Tehát összesen 29 szépséges háromjegyű szám van:

109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900

910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919



3. Töltsd ki az alábbi táblázatot úgy, hogy a 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44 számok mindegyike pontosan egyszer szerepeljen benne. A kitöltésre az is igaz legyen, hogy a számok tízes helyiértéken álló jegye mindegyik sorban és mindegyik oszlopban csupa különböző számból álljon, és ugyanez legyen igaz az egyes helyiértéken álló számjegyekre is. A táblázatba néhány számot előre beírtunk, valamint tudjuk, hogy az x helyére páros szám jön.

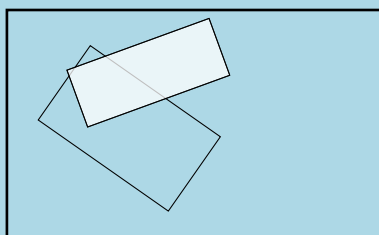
Elegendő egy jó kitöltést megadni, nincs szükség indoklásra!

	41		
x			32
13			

22	41	33	14
44	23	11	32
13	34	42	21
31	12	24	43



4. Egy téglalap alakú szobában két szőnyeg hever úgy, hogy egy kis részük egymásra lóg. A mindkét szőnyeg által fedett terület a kisebb szőnyegnek $1/3$ -a, a nagyobbak $1/4$ -e, a teljes szobának pedig $3/28$ része. A szoba mekkora részét nem fedi egyetlen szőnyeg sem?



Első megoldás. Ha a mindkét szőnyeg által fedett terület t , akkor a kis szőnyeg területe $3t$, a nagyé $4t$.

A két szőnyeg által együttesen fedett terület $3t + 4t - t = 6t$, mert a közösen fedett részt csak egyszer kell számolni.

A teljes szoba területe $\frac{28}{3}t$

A fedetlen rész $\frac{28}{3}t - 6t = \frac{10}{3}t$.

Ez a szoba $\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$ része.

Második megoldás. A kis szőnyeg $1/3$ -a a szoba $3/28$ -a. Vagyis a kis szőnyeg a szoba $9/28$ -a.

A nagy szőnyeg $1/4$ -e, a szoba $3/28$ -a. Vagyis a kis szőnyeg a szoba $12/28$ -a.

A közösen fedett rész: $9/28 + 12/28 - 3/28 = 18/28$

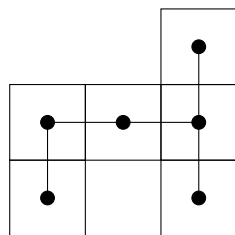
Vagyis a fedetlen rész területe: $1 - 18/28 = 10/28$



5. Hexominóknak nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeket megkaphatunk úgy, hogy hat darab egységnyi oldalhosszúságú négyzetet összeillesztünk az oldalaiknál fogva. Hány olyan hexominó van, aminek 12 egység a kerülete? (A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető hexominókat azonosnak tekintjük.)

Hat különálló egységnégyzet területének összege 24 egység. Amikor két négyzetet egy élük mentén összeillesztünk, akkor az illesztés kettővel csökkenti az összesített területet (mert az illesztés a kapott alakzat belsejébe kerül). Ahhoz, hogy végül 12 egység kerületű síkidomot kapjunk, hat él-él illeszkedésnek kell lennie.

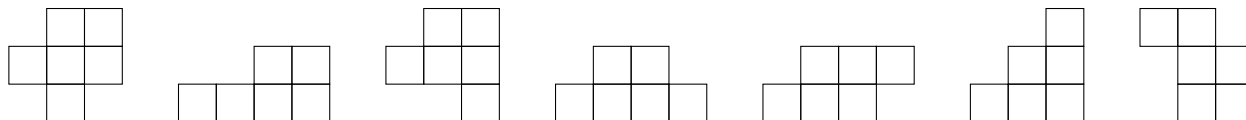
Ha van egy négyzetekből összerakott alakzatunk, akkor képezhetjük annak „vázát” a következő módon: jelöljük meg a négyzetek középpontját egy-egy kis körrel, és ezek közül kössük össze azokat, amelyek élszomszédos négyzetek középpontját jelölik. Ha az így kapott vázban nincs „kör”, akkor pontosan öt összekötés van benne, ezért a kerület $24 - 10 = 14$, ami túl sok.



Könnyen látható, hogy csak azon vázak tartalmaznak kört, amelyek olyan alakzathoz tartoznak, amelyben van egy kétszer kettős négyzet.

Az összes megoldás felsorolásához ezért csak azokat az eseteket kell végignézni, amikor egy kétszer kettős négyzethez még két egységnégyzetet ragasztottunk.

A megoldások:



1-2 jó konstrukcióért 1 pont, 3-4 konstrukció 2 pont, 5 konstrukció 3 pont, 6 konstrukció 4 pont, 7 konstrukció 5 pont.

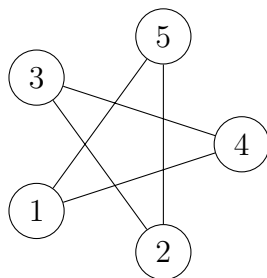


5. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Egy öttagú baráti társaság egy furcsa étterembe ment ebédelni. Egy olyan kerekasztal köré ültetik le őket, ahol a székek egytől ötig számozottak. Az ebéd végén mindenkinek annyszor 1000 forintot kell fizetni, amennyi a két szomszédja sorszámának különbsége. A székeket a pincér rendezheti el a társaság érkezése előtt. Hogyan rakja le a pincér a székeket a lehető legnagyobb számla elérése érdekében?

Második megoldás. Az ábrán összekötöttük azokat a székeket, amelyek sorszámának különbsége szerepet játszik a számla összegében.




A fenti példában $1000 \cdot ((5 - 1) + (4 - 1) + (4 - 3) + (3 - 2) + (5 - 2)) = 1000 \cdot 12 = 12000$ forint a végösszeg. Megmutatjuk, hogy az elérhető legnagyobb összeg.

Látható, hogy minden sorszám pontosan két különbségben fog szerepelni, a kérdés csak az, hogy milyen előjellel. Az ezres szorzóval nem foglalkozunk, csak a második tényezővel, ami átrendezhető így:

$$5 + 5 + 4 + 4 + 3 - 3 - 2 - 2 - 1 - 1$$

Mivel minden szám kétszer fog szerepelni, az a legnagyobb elérhető összeg, amikor a legnagyobb számok pozitív, a legkisebb számok negatív előjellel szerepelnek, és a fenti esetben ez teljesül.

Második megoldás. A fenti ábrán látható egy megoldás 12000-re. Paritások miatt megmondható, hogy a 13000 nem lehetséges. Azt fogjuk belátni, hogy 14-re se lehetséges: 4000-nél többet nem fog fizetni senki 4000 forintot legfeljebb 1 ember fizethet: (aki az 1-5 közt van). 3000 forintot legfeljebb 2 ember fizethet: (aki az 1-4 és 2-5 közt van). Vagyis a maximálisan elérhető összeg $4000 + 3000 + 3000 + 2000 + 2000 = 14000$. Ehhez viszont az kéne, hogy egy távolságra legyenek az $1 - 5$, $1 - 4$, $2 - 5$ párok, de ez csak akkor lehet, ha a székek az $1 - 3 - 5 - 4 - 2$ sorrendben vannak, de ekkor csak 12000 forint lesz az összeg. 


2. Egy szabaduló szoba utolsó feladványához értél, egy számszörös lakat van az ajtón. Három számjegyet kell megfejtened, ezek mindegyike 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 valamelyike lehet. Háromjegyű számokkal kérdezhettél rá, de csak négyszer. Ezekre meg is kaptad a választ:

	Kérdezett szám	Ennyi számjegyet eltaláltál	Közülük ennyi van jó helyen
1.	245	0	0
2.	760	2	0
3.	806	1	0
4.	037	2	0


Melyik szám nyitja a lakatot?

Az utolsó három kérdésre adott válaszból látható, hogy a nulla nem szerepel a kódban, mert egyik lehetséges pozíción sem állt jó helyen.

Emiatt a második és a negyedik kérdésben a hét és hat, illetve a három és a hét a jó jegy, csak rossz helyen.

Tehát a hetes csak középen lehet, és mivel a harmadik kérdésre kapott válasz miatt a hat nem a kód végén van, ezért az egyetlen lehetséges kód a 673. Ez megfelel az első kérdésre kapott válasznak is. 

3. Egy téglalap egyik oldalát csökkentettük 24 cm-rel, a másikat viszont a háromszorosára növeltük. Így egy olyan négyzetet kaptunk, melynek területe egyenlő az eredeti téglalap területével. Mekkora a keletkezett négyzet oldala?

Ha az eredeti oldalak hosszát a és b jelöli, akkor a keletkezett négyzet oldalai $a - 24 = 3b$. Mivel a négyzet területe egyenlő a téglalap területével, és egyik oldala háromszorosa a téglalap egyik oldalának, ezért a négyzet másik oldalának harmad akkora kell lennie, mint a téglalap másik oldala: $a - 24 = \frac{a}{3}$. Tehát a 24 pont kétharmada a -nak. Innen $a = 36$ és $b = 4$ adódik, a közös terület pedig $T = 36 \cdot 4 = 144$. Ellenőrizhetjük, hogy $a - 24 = 3b = 12$ és $12 \cdot 12 = 144$, a feladat feltételei teljesülnek. Más egyenletrendszerből is kijöhet a helyes eredmény. 

4. Péter pénztárcájában 5, 10, 20, 50, 100 és 200 forintosok vannak. Tudjuk, hogy mindegyik pénzérme fajtából különböző számú van, illetve tudjuk, hogy 5 forintos érméből kétszer annyi van, mint 200 forintosból, 100 forintos érméből kétszer annyi van, mint 10 forintosból, valamint 50 forintos érméből nyolcszor annyi van, mint 20 forintosból. Mennyi pénze lehet legfeljebb Péternek, ha kevesebb, mint 2000 forintja van?

Jelölje a , b és c a 10, 20 és 200 forintos érmék darabszámát. Ekkor az 100, 50 és 5 forintos érmék száma $2a$, $8b$ és $2c$, így az érmék összesített értéke

$$(10 \cdot a + 100 \cdot 2a) + (20 \cdot b + 50 \cdot 8b) + (200 \cdot c + 5 \cdot 2c) = 210a + 420b + 210c = 210 \cdot (a + 2b + c)$$

Mivel $420 = 2 \cdot 210$, ezért Péternek 210-zel osztható forintja van. A legnagyobb 210-zel osztható 2000-nél kisebb szám az $1890 (= 9 \cdot 210)$. Mutatunk egy példát arra, hogy ez elérhető.

$a + 2b + c = 9$, aminek egy megoldása $a = 2, b = 1, c = 5$ (a másik megoldás az $a = 5, b = 1, c = 2$). Ezekkel az értékekkel az eredeti feladat helyes megoldását kapjuk:

Érme	5	10	20	50	100	200	Összeg
darab betűvel	$2c$	a	b	$8b$	$2a$	c	
darabszám	10	2	1	8	4	5	
érték	50	20	20	400	400	1000	1890



6. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Egy pozitív egész számot szépségesnek nevezünk, ha az elejéről, végéről, vagy mindkét irányból néhány számjegyet törölve éppen az eredeti szám számjegyei összegét kapjuk. (Például a 40, 3126, 333150 számok szépségesek.) Hány háromjegyű szépséges szám van?

Legyen a számunk \overline{abc} , azaz $100a + 10b + c$. Ebben a számjegyek összege $a + b + c$. Meg kell vizsgálnunk néhány esetet, a szerint, hogy honnan törölünk.

Ha az elejéről törölünk egyet, azt kapjuk, hogy $a + b + c = 10b + c$, amiből $a = 9b$. Mivel a nem 0, így ez csak $a = 9, b = 1$ esetén teljesül. Ezek tényleg megfelelőek is: 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919. Ha a végéről törölünk egyet, azt kapjuk, hogy $a + b + c = 10a + b$, amiből $c = 9a$. Mivel a nem 0, így ez csak $a = 1, c = 9$ esetén teljesül. Ezek tényleg megfelelőek is: 109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199. Ha az végéről törölünk kettőt, azt kapjuk, hogy $a + b + c = a$, ami csak akkor teljesülhet, ha $b = c = 0$. Ezek valóban megfelelőek: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900. Ha az elejéről törölünk kettőt, azt kapjuk, hogy $a + b + c = c$, ami nem lehet, mivel $a > 0$ és $b \geq 0$. Ha az elejéről és a végéről is törölünk egyet, azt kapjuk, hogy $a + b + c = b$, ami nem lehet, mivel $a > 0$ és $c \geq 0$. Tehát 29 szépséges szám van, ami háromjegyű.



2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 számjegyek közül minél kevesebb felhasználásával állítsd elő a 2019-et! Indokold meg, hogy miért nem lehet kevesebből! Csak az alapműveleteket lehet használni (zárójeleket nem). Minden számjegyet csak egyszer használhatsz és nem lehet többjegyű számokat alkotni.

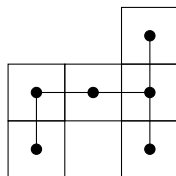
Öt számjeggyel lehetséges az előállítás: $2019 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 + 3$. Belátjuk, hogy négy számjegy nem elegendő. A 2019 a számjegyek közül csak 1-gyel és 3-mal osztható, így csak szorzással biztosan nem lehet előállítani. Legfeljebb négy számjeggyel egy legfeljebb négy tagból álló összeget kaphatunk. Az összegben minden tag legfeljebb $9 \cdot 8 \cdot 7$, hiszen nem lehet négytényezős szorzat. Ekkor viszont az összeg értéke legfeljebb $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 2016$ lehetne, de ez kisebb 2019-nél.



3. Hexominóknak nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeket megkaphatunk úgy, hogy hat darab egységnyi oldalhosszúságú négyzetet összeillesztünk az oldalaiknál fogva. Hány olyan hexominó van, aminek 12 egység a kerülete? (A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető hexominókat azonosnak tekintjük.)

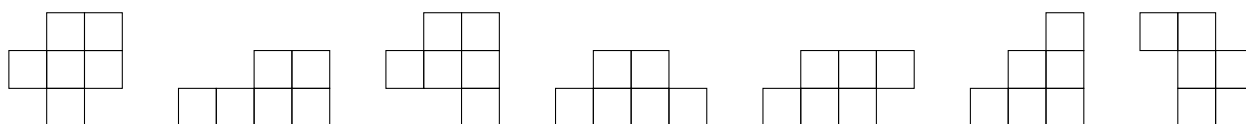
Hat különálló egységnégyzet területének összege 24 egység. Amikor két négyzetet egy élük mentén összeillesztünk, akkor az illesztés kettővel csökkenti az összesített területet (mert az illesztés a kapott alakzat belsejébe kerül). Ahhoz, hogy végül 12 egység kerületű síkidomot kapjunk, hat él-él illeszkedésnek kell lennie.

Ha van egy négyzetekből összerakott alakzatunk, akkor képezhetjük annak „vázát” a következő módon: jelöljük meg a négyzetek középpontját egy-egy kis körrel, és ezek közül kössük össze azokat, amelyek élszomszédos négyzetek középpontját jelölik. Ha az így kapott vázban nincs „kör”, akkor pontosan öt összekötés van benne, ezért a kerület $24 - 10 = 14$, ami túl sok.



Könnyen látható, hogy csak azon vázak tartalmaznak kört, amelyek olyan alakzathoz tartoznak, amelyben van egy kétszer kettes négyzet. Az összes megoldás felsorolásához ezért csak azokat az eseteket kell végignézni, amikor egy kétszer kettes négyzethez még két egységnégyzetet ragasztottunk.

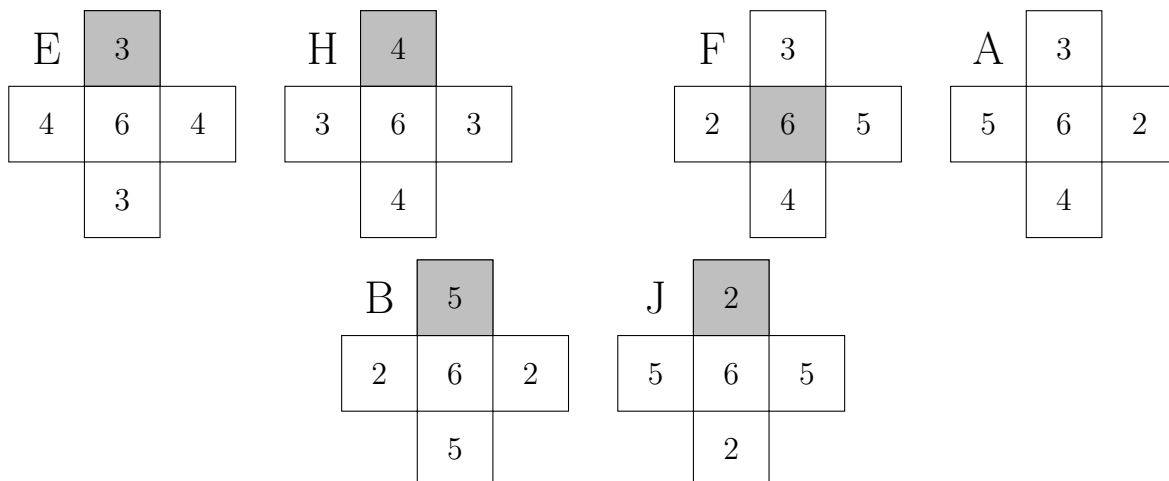
A megoldások:



4. Hét szabályos dobókockát összeragasztottunk úgy, hogy az egyik kocka minden lapjához egy-egy további kocka egy-egy lapját illesztettük. A testre ezután a lapokra merőleges irányokból ránézve, mind a hat lehetséges irányból ugyanannyi pöttyöt látunk. Hány pöttyöt láthatunk legfeljebb? Rajzoljátok le a testet mind a hat irányból (előlről, hátulról, balról, jobbról, alulról és felülről)! (Egy dobókocka szabályos, ha a szemközti lapjain a pöttyök összege hét.)

A hét dobókockán összesen $7 \cdot 21 = 147$ pötty van. A legbelsőből semmit sem látunk így $6 \cdot 21 = 126$ pöttynél nem látható több.

Ezen kívül még minden külső kockának is le van takarva egy oldala, tehát még legalább 6 pötty takarva van. Így legfeljebb 120 pötty látható. Ha ez elérhető, akkor minden irányból 20 pöttyöt kell látnunk. Megadunk egy megfelelő elrendezést. A legfelső kockát más színnel ábrázoljuk, hogy megkönnyítsük a térbeli „tájékozódást”. (A felül- és alulnézet „kívülről” értendő, ezért a hármás és négyes lapok valójában egymással szemben vannak.)

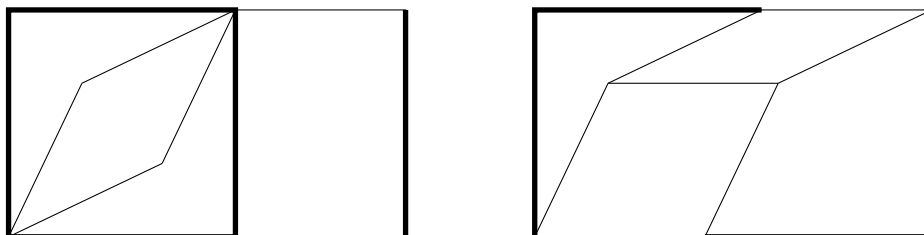


Ha valaki ad egy olyan konstrukciót, amin jók a kockák, és minden irányból ugyanannyi látszik, de kevesebb mint 20, akkor is kapjon 1 pontot.

5. Egy téglalap szomszédos oldalai 4 egység és 7 egység hosszúak. Osszuk fel a téglalapot négy darab tengelyesen szimmetrikus négyszögre úgy, hogy a felosztásban szereplő bármely négyszög bármely oldalának hossza vagy 3 egység, vagy 4 egység legyen!

Első megoldás. Osszuk fel a téglalapot egy 4 egység oldalú négyzetre és egy 3×4 -es téglalagra. A négyzet egyik átlóján jelöljük meg azokat a pontokat, amelyek 3 egység távolságra vannak a másik átló mindkét végpontjától. A megfelelő 3 egységnyi szakaszokat berajzolva a négyzet két konkáv deltoidra és egy rombuszra bomlik, amelyek tengelyesen szimmetrikusak, ahogy a 3×4 -es téglalap is, ezzel a kívánt felosztást megadtuk. (Lásd a bal oldali ábrát!)

Második megoldás. A téglalap egyik belső szögfelezőjén jelöljük meg a csúcshoz legközelebbi olyan pontot, amely 3 egységnyire van a téglalap rövidebb oldalának másik végpontjától. Ezt a csücsöt a szögfelezőre tükrözve, és a megfelelő szakaszokat behúzva egy konkáv deltoidot kapunk, melynek minden oldala vagy 3, vagy 4 egység hosszú. A szemközti csücsből induló szögfelező segítségével, de ezúttal a csücsztől távolabbi pontot választva hasonló módon egy konvex deltoidot kaphatunk. A két deltoid szimmetriaátlóinak a téglalap csücsseitől különböző végpontjait összekötve két rombusz keletkezik. Ezzel megkaptuk a kívánt felosztást. (Lásd a jobb oldali ábrát!)



Az ábrákon a vastag vonalak négy, a vékony vonalak három egység hosszú szakaszokat jelölnek.

6. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Egy tartályban 300 liter víz van. Van négy vödörünk: egy piros, egy zöld, egy kék és egy sárga. A piros vödörbe kétszer annyi víz fér, mint a zöldbe, a zöld vödörbe kétszer annyi víz fér, mint a kékbe és a kék vödörbe kétszer annyi víz fér, mint a sárgába. Miután a négy vödört teljesen megtöltöttük a tartályban lévő vízből, a tartályban 11 literrel több víz maradt, mint amennyi a kék vödörbe került. Hány liter víz fér a zöld vödörbe?

Jelölje P , K , Z és S hogy rendre hány liter víz fér a piros, kék, zöld és sárga vödörünkbe. A feladat adatai alapján $P = 2Z$, $Z = 2K$, $K = 2S$. Tehát $Z = 4S$ és $P = 8S$.

Ezen kívül azt is tudjuk, hogy $300 - P - K - Z - S - 11 = K$.

A fenti egyenleteket behelyettesítve kapjuk, hogy $300 - 8S - 2S - 4S - S - 11 = 2S$. Tehát $289 = 17S$.


Ebből $S = 17$. Tehát $Z = 4S = 4 \cdot 17 = 68$. 

2. Dani digitális órája 13:24-et mutat. Ez azon ritka percek egyike, amikor az órán négy egymás utáni számjegy látható.

a) Hány ilyen perc van egy nap folyamán?

b) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő ilyen állás között?

(A digitális órán mindig négy számjegy látható és 24 órás formátumot használ, pl.: 00:41 vagy 21:29.)

Az órában a tízesek helyén csak 0, 1 vagy 2 állhat, ezért a négy szomszédos jegy közül a legkisebb nem nagyobb kettőnél. Ha a jegyek 0, 1, 2 és 3, akkor az órák helyén 01, 02, 03, 10, 12, 13, 20, 21 és 23 állhat, és a perckre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez $9 \cdot 2 = 18$ lehetőség. Ha a jegyek 1, 2, 3 és 4, akkor az órák helyén 12, 13, 14, 21, 23 állhat, és a perckre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez $5 \cdot 2 = 10$ lehetőség. Ha a jegyek 2, 3, 4 és 5, akkor az órák helyén csak 23 állhat, és a perckre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez 2 lehetőség. Tehát összesen $18 + 10 + 2 = 30$ olyan perc van a nap folyamán, amikor teljesülnek a feltételek. A 03:21 és 10:23 egymást követő állások között 7 óra és 2 perc (422 perc) telik el. Ennél nagyobb különbség nincs, hiszen az órák lehetséges értékeit (01, 02, 03, 10, 12, 13, 14, 20, 21, 23) vizsgálva látható, hogy sehol máshol nincs 6-nál nagyobb eltérés, így az időpontok között máskor nem lehet 7 óránál nagyobb különbség. 

3. Péter pénztárcájában 5, 10, 20, 50, 100 és 200 forintosok vannak. Tudjuk, hogy mindegyik pénzérme fajtából különböző számú van, illetve tudjuk, hogy 5 forintos érméből kétszer annyi van, mint 200 forintosból, 100 forintos érméből kétszer annyi van, mint 10 forintosból, valamint 50 forintos érméből nyolcszor annyi van, mint 20 forintosból. Mennyi pénze lehet legfeljebb Péternek, ha kevesebb, mint 2000 forintja van?

Jelölje a , b és c a 10, 20 és 200 forintos érmék darabszámát. Ekkor az 100, 50 és 5 forintos érmék száma $2a$, $8b$ és $2c$, így az érmék összesített értéke

$$(10 \cdot a + 100 \cdot 2a) + (20 \cdot b + 50 \cdot 8b) + (200 \cdot c + 5 \cdot 2c) = 210a + 420b + 210c = 210 \cdot (a + 2b + c)$$

Mivel $420 = 2 \cdot 210$, ezért Péternek 210-zel osztható forintja van. A legnagyobb 210-zel osztható 2000-nél kisebb szám az $1890 (= 9 \cdot 210)$. Mutatunk egy példát arra, hogy ez elérhető.

$a + 2b + c = 9$, aminek egy megoldása $a = 2, b = 1, c = 5$ (a másik megoldás az $a = 5, b = 1, c = 2$). Ezekkel az értékekkel az eredeti feladat helyes megoldását kapjuk:

Érme	5	10	20	50	100	200	Összeg
darab betűvel	$2c$	a	b	$8b$	$2a$	c	
darabszám	10	2	1	8	4	5	
érték	50	20	20	400	400	1000	1890



4. Egy 5×5 -ös táblázat minden mezőjére egy-egy pozitív egész számot írtunk (lehetnek közöttük egyenlők). Kiszámoltuk minden sorban és minden oszlopban a számok összegét. Ez a 10 összeg csupa különböző pozitív egész. Mennyi a táblázatban szereplő 25 szám összege, ha az a lehető legkisebb?

Mivel mindegyik sor- és oszlopösszeg legalább 5, és ezek különböző pozitív egészek, ezért összegük legalább

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 95.$$

A sorösszegek és oszlopösszegek összege a 25 szám összegének duplája, ezért csak páros szám lehet. A fentiek miatt ez legalább 96, így a 25 szám összege legalább 48. A 48-as összeg el is érhető, például így:

1	1	1	1	2
1	1	1	2	2
1	2	2	2	3
1	2	2	3	4
1	2	3	3	4

A sorösszegek itt: 6, 7, 10, 12, 13; az oszlopösszegek: 5, 8, 9, 11, 15.



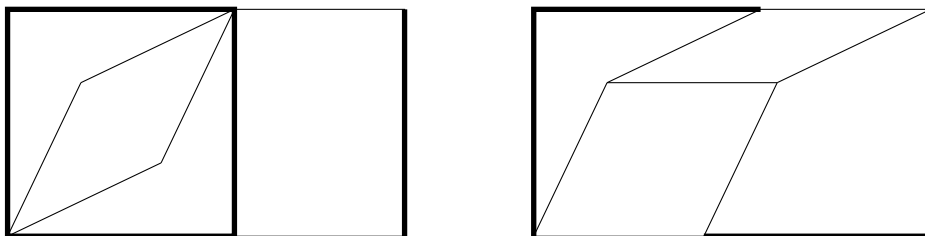
7. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Egy téglalap szomszédos oldalai 4 egység és 7 egység hosszúak. Osszuk fel a téglalapot négy darab tengelyesen szimmetrikus négyszögre úgy, hogy a felosztásban szereplő bármely négyszög bármely oldalának hossza vagy 3 egység, vagy 4 egység legyen!

Első megoldás. Osszuk fel a téglalapot egy 4 egység oldalú négyzetre és egy 3×4 -es téglalagra. A négyzet egyik átlóján jelöljük meg azokat a pontokat, amelyek 3 egység távolságra vannak a másik átló mindkét végpontjától. A megfelelő 3 egységnyi szakaszokat berajzolva a négyzet két konkáv deltoidra és egy rombuszra bomlik, amelyek tengelyesen szimmetrikusak, ahogy a 3×4 -es téglalap is, ezzel a kívánt felosztást megadtuk. (Lásd a bal oldali ábrát!)

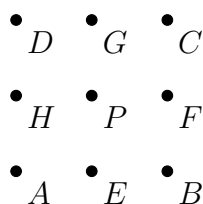
Második megoldás. A téglalap egyik belső szögfelezőjén jelöljük meg a csúcshoz legközelebbi olyan pontot, amely 3 egységnyire van a téglalap rövidebb oldalának másik végpontjától. Ezt a csúcsot a szögfelezőre tükrözve, és a megfelelő szakaszokat behúzva egy konkáv deltoidot kapunk, melynek minden oldala vagy 3, vagy 4 egység hosszú. A szemközti csúcsból induló szögfelező segítségével, de ezúttal a csúcstól távolabbi pontot választva hasonló módon egy konvex deltoidot kaphatunk. A két deltoid szimmetriaátlóinak a téglalap csúcsaitól különböző végpontjait összekötve két rombusz keletkezik. Ezzel megkaptuk a kívánt felosztást. (Lásd a jobb oldali ábrát!)



Az ábrákon a vastag vonalak négy, a vékony vonalak három egység hosszú szakaszokat jelölnek.

2. A sík minden pontjához hozzárendeltünk egy egész számot úgy, hogy a következő teljesül: ha A, B, C és D egy négyzet csúcsai, akkor a hozzájuk rendelt számok összege nulla. Lehetséges-e, hogy a sík valamelyik P pontjához nem a nullát rendeltük?

A sík tetszőleges P pontját tekintjük egy $ABCD$ négyzet középpontjaként (tetszőlegesen választhatjuk a négyzetet). Az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontja legyen E, F, G, H .




A folytatásban egy ponthoz rendelt számot ugyanazzal a betűvel fogunk jelölni, mint a pontot. Az $AEPH$, $EBFP$, $PFCG$ és $PGDH$ négyzetekre alkalmazva a feltételt:

$$0 = (A + E + P + H) + (E + B + F + P) + (P + F + C + G) + (P + D + G + H)$$

$$0 = A + B + C + D + 2E + 2F + 2G + 2H + 4P$$

Mivel $ABCD$ és $EFGH$ is négyzetek, ezért

$$(A + B + C + D) + 2 \cdot (E + F + G + H) = A + B + C + D + 2E + 2F + 2G + 2H = 0.$$

Emiatt viszont $4P = 0$, azaz $P = 0$. Tehát a hozzárendelés csak olyan lehet, amely bármely P ponthoz a nullát rendeli. 

3. Legyen

$$S = 2019^{2019} + 2019^{2018} + 2019^{2017} + \dots + 2019^2 + 2019^1 + 1.$$

Mutasd meg, hogy S -nek van háromjegyű prímosztója.


Első megoldás.

Mivel $2019^{n+1} + 2019^n = 2020 \cdot 2019^n$, ezért az S összegben bármely két egymást követő tag összege osztható 2020-szal. Mivel S páros számú tagból áll, így S is osztható 2020-szal. Viszont $2020 = 20 \cdot 101$, a 101 pedig egy háromjegyű prímszám, ezért S -nek van háromjegyű prímosztója (a 101 biztosan ilyen).

Második megoldás.

Vizsgáljuk meg S osztási maradékát 2020-szal. Mivel 2019 és -1 ugyanolyan maradékot ad 2020-szal, ezért S maradéka megegyezik az

$$S' = (-1)^{2019} + (-1)^{2018} + (-1)^{2017} + \dots + (-1)^2 + (-1)^1 + 1$$

összeg maradékával. Ez az összeg viszont $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots - 1 + 1 = 0$, tehát S' , és így S is osztható 2020-szal. Viszont $2020 = 20 \cdot 101$, a 101 pedig egy háromjegyű prímszám, ezért S -nek van háromjegyű prímosztója (a 101 biztosan ilyen). 

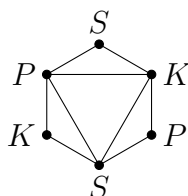
4. Anna egy szabályos hatszög hat csúcsát kiszínezte pirossal, kékkel vagy sárgával úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. Ezután Béla behúzott három átlót úgy, hogy a hatszög belsejében nem keletkezett metszéspont, és mindegyik átló két különböző színű csúcsot kötött össze.

Hányféleképpen nézhet ki ezek után az ábra? A forgatással, tükrözéssel egymásba vihető ábrákat **nem** tekintjük különbözőnek.

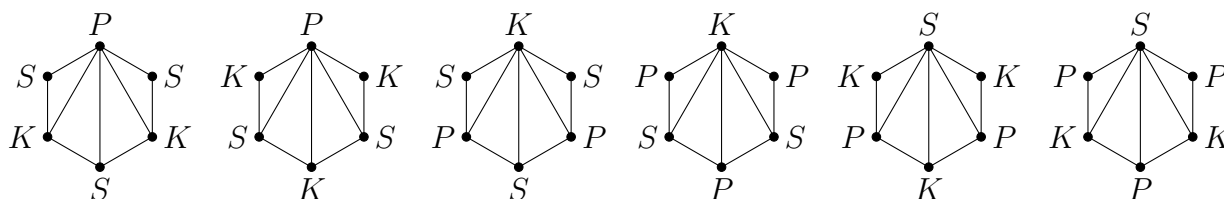
A három átlót háromféle módon lehet behúzni:

- (1) szabályos háromszöget alkotnak;
- (2) egy csúcsból indulnak ki;
- (3) az egyik átló mindkét végpontjából indul egy-egy további.

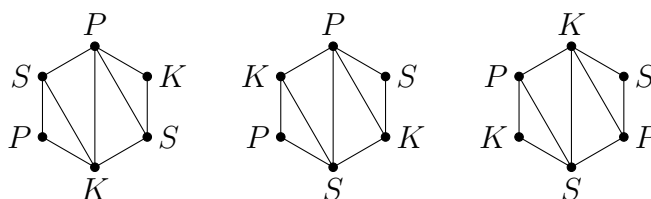
Ha a három átló egy szabályos háromszöget alkot, akkor a végpontjaikat három különböző színnel kell színezni. Ez a színezés a másik három csúcs színét is egyértelműen meghatározza, hiszen nem lehetnek egyszínűek a szomszédokkal. Minden lehetőséget megkaphatunk az alábbi ábrából tükrözéssel és forgatással, tehát ebben az esetben 1 lehetőség van.



Ha a három átló egy csúcsból indul ki, akkor ennek a csúcsnak a színe különbözik az összes többiétől (hiszen vagy szomszédosak, vagy átló köti össze őket). Ez a szín háromféle lehet. A maradék két színnel a többi csúcsot felváltva kell színezni, így az egyiket háromszor, a másikat kétszer használjuk, ez 2 lehetőség. A színeknek tehát $3 \cdot 2 = 6$ lehetséges kombinációja van. Bármely színezésnél a lehetséges ábrák egymásba forgathatók, így ez az eset 6 lehetőséget ad.



Ha az egyik átló mindkét végpontjából indul egy-egy további, akkor tükrözéssel és forgatással elérhető a lenti ábrán látható helyzet. Könnyen látható, hogy a leghosszabb átló két végpontjának a színezése már egyértelműen meghatározza a többi csúcs színét. A leghosszabb átló végpontjait háromféle módon színezhethetjük, hiszen két különböző színt kell használni, de a végpontok 180 fokos forgatással felcserélhetők. Így ebben az esetben 3 lehetőség van.



Ez összesen $1 + 6 + 3 = 10$ lehetőség.



5. Robot Robi a következő számolást végzi: ha megadunk neki egy pozitív egész számot, ő elosztja maradékosan 43-mal, majd összeadja a kapott maradékot és hányadost, és leírja az így kapott számot. Egy napon Robinak sorra az 1, 2, 3, ..., 2019 számokat adták meg, és ő mindegyikkel elvégezte a fenti számolást. A Robi által leírt 2019 darab szám között hány darab 7-tel osztható van?

Első megoldás. Legyen az N szám esetén a kapott hányados h , a maradék m . Ekkor

$$N = 43 \cdot h + m = 42 \cdot h + (h + m).$$

Mivel $42 \cdot h$ biztosan 7-tel osztható, ezért $(h + m)$ akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha N is osztható 7-tel. Tehát Robot Robi éppen annyi 7-tel osztható számot írt le, ahány az 1, 2, 3, ..., 2019 számok között volt. Mivel $2019 = 288 \cdot 7 + 3$, ezért 288 darab 7-tel osztható számot írt le Robi.

Második megoldás. Mivel $2019 = 46 \cdot 43 + 41$, ezért a hányadosok 0-tól 46-ig, a maradékok 0-tól 42-ig terjedhetnek. Közülük csak két eset nem fordul elő: amikor mindkettő 0, illetve amikor a hányados 46 és a maradék 42. Mivel 7-tel osztható összeget akarunk, a hányados 7-tel vett osztási maradéka egyértelműen meghatározza a maradék lehetséges 7-es maradékait. Ez alapján összegyűjthetjük a megfelelő lehetőségeket.

7-es maradék	Hányadosok	Maradékok	Lehetőségek
0 + 0	0, 7, 14, 21, 28, 35, 42	0, 7, 14, 21, 28, 35, 42	$7 \cdot 7 = 49$
1 + 6	1, 8, 15, 22, 29, 36, 43	6, 13, 20, 27, 34, 41	$7 \cdot 6 = 42$
2 + 5	2, 9, 16, 23, 30, 37, 44	5, 12, 19, 26, 33, 40	$7 \cdot 6 = 42$
3 + 4	3, 10, 17, 24, 29, 38, 45	4, 11, 18, 25, 32, 39	$7 \cdot 6 = 42$
4 + 3	4, 11, 18, 25, 32, 39, 46	3, 10, 17, 24, 29, 38	$7 \cdot 6 = 42$
5 + 2	5, 12, 19, 26, 33, 40	2, 9, 16, 23, 30, 37	$6 \cdot 6 = 36$
6 + 1	6, 13, 20, 27, 34, 41	1, 8, 15, 22, 29, 36	$6 \cdot 6 = 36$

A fentiek között szerepel a $(0, 0)$ pár is, ezt ki kell venni. Így a Robi által leírt 7-tel osztható számok száma összesen $49 + 42 + 42 + 42 + 42 + 36 + 36 - 1 = 288$.



7. osztály, 2. nap

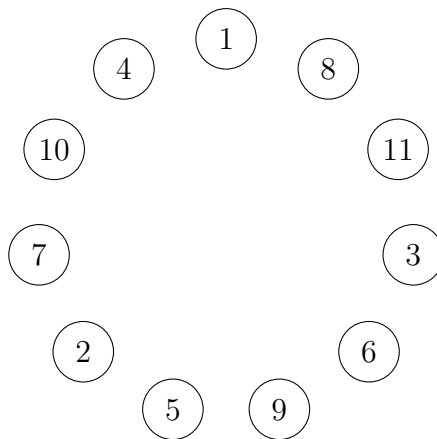
Országos döntő

1. Egy tizenegy tagú baráti társaság egy furcsa étterembe ment ebédelni. Egy olyan kerekasztal köré ültetik le őket, ahol a székek 1-től 11-ig számozottak. Az ebéd végén mindenkinek annyiszor 1000 forintot kell fizetni, amennyi a két szomszédja sorszámának különbsége. A székeket a pincér rendezheti el a társaság érkezése előtt. Mit tegyen a lehető legnagyobb számla elérése érdekében?

A pincér célja, hogy a különbségek összege a lehető legnagyobb legyen. Tekinthesünk erre 22 tagú összegként, amelyben a sorszámok mindegyike pontosan két alkalommal szerepel pozitív vagy negatív előjellel úgy, hogy összesen 11 db pozitív és 11 db negatív előjelet osztunk ki. A legnagyobb ilyen összeget akkor kapjuk, ha a 11 legnagyobb abszolút értékű szám kap pozitív, a többi negatív előjelet. Ekkor az összeg

$$11 + 11 + 10 + 10 + 9 + 9 + 8 + 8 + 7 + 7 + 6 - 6 - 5 - 5 - 4 - 4 - 3 - 3 - 2 - 2 - 1 - 1 = 60.$$

Lehetséges olyan ültetés, amely esetén a számla 60000 forint lesz, például így:



A különbségek összege:

$$(8-4)+(11-1)+(8-3)+(11-6)+(9-3)+(6-5)+(9-2)+(7-5)+(10-2)+(7-4)+(10-1) = 60.$$



2. Dani digitális órája 13:24-et mutat. Ez azon ritka percek egyike, amikor az órán négy egymás utáni számjegy látható.

a) Hány ilyen perc van egy nap folyamán?

b) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő ilyen állás között?

(A digitális órán mindig négy számjegy látható és 24 órás formátumot használ, pl.: 00:41 vagy 21:29.)

Az órában a tízesek helyén csak 0, 1 vagy 2 állhat, ezért a négy szomszédos jegy közül a legkisebb nem nagyobb kettőnél. Ha a jegyek 0, 1, 2 és 3, akkor az órák helyén 01, 02, 03, 10, 12, 13, 20, 21 és 23 állhat, és a percekre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez $9 \cdot 2 = 18$ lehetőség. Ha a jegyek 1, 2, 3 és 4, akkor az órák helyén 12, 13, 14, 21, 23 állhat, és a percekre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez $5 \cdot 2 = 10$ lehetőség. Ha a jegyek 2, 3, 4

és 5, akkor az órák helyén csak 23 állhat, és a percekre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez 2 lehetőség. Tehát összesen $18 + 10 + 2 = 30$ olyan perc van a nap folyamán, amikor teljesülnek a feltételek. A 03:21 és 10:23 egymást követő állások között 7 óra és 2 perc (422 perc) telik el. Ennél nagyobb különbség nincs, hiszen az órák lehetséges értékeit (01, 02, 03, 10, 12, 13, 14, 20, 21, 23) vizsgálva látható, hogy sehol máshol nincs 6-nál nagyobb eltérés, így az időpontok között máskor nem lehet 7 óránál nagyobb különbség.



3. Egy 5×5 -ös táblázat minden mezőjére egy-egy pozitív egész számot írtunk (lehetnek közöttük egyenlők). Kiszámoltuk minden sorban és minden oszlopban a számok összegét. Ez a 10 összeg csupa különböző pozitív egész. Mennyi a táblázatban szereplő 25 szám összege, ha az a lehető legkisebb?

Mivel mindegyik sor- és oszlopösszeg legalább 5, és ezek különböző pozitív egészek, ezért összegük legalább

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 95.$$

A sorösszegek és oszlopösszegek összege a 25 szám összegének duplája, ezért csak páros szám lehet. A fentiek miatt ez legalább 96, így a 25 szám összege legalább 48. A 48-as összeg el is érhető, például így:

1	1	1	1	2
1	1	1	2	2
1	2	2	2	3
1	2	2	3	4
1	2	3	3	4

A sorösszegek itt: 6, 7, 10, 12, 13; az oszlopösszegek: 5, 8, 9, 11, 15.



4. Nevezzük egy háromszög valamely oldalát *kurtának*, ha nem hosszabb a hozzá tartozó magasságnál. Legfeljebb hány *kurta* oldala lehet egy háromszögnek?

Első megoldás. Kettő lehet, például az egyenlőszárú derékszögű háromszög mindkét befogója egyenlő a hozzá tartozó magassággal (de az átfogó hosszabb, mint az átfogóhoz tartozó magasság). Bebizonyítjuk, hogy három kurta oldal nem lehet egy háromszögben. Legyen c a háromszög (valamelyik) leghosszabb oldala, a másik kettő a és b . A szemközti csúcsot a c oldal egyenesével összekötő szakaszok közül az m_c magasságnál nincs rövidebb, ezért $m_c \leq a$ és $m_c \leq b$. Ha a c oldal kurta lenne, akkor $c \leq m_c$ teljesülne. Ekkor $c \leq a$ és $c \leq b$ is igaz lenne. De c a leghosszabb oldal, így ebből az következik, hogy mind a három oldal egyenlő, továbbá m_c is egyenlő velük. Ez ellentmondás, hiszen a szabályos háromszögben a magasság rövidebb az oldalhossznál. Tehát a leghosszabb oldal sosem lehet kurta, így legfeljebb két kurta oldal lehetséges.

Második megoldás. A háromszög egy csúcsát a szemközti oldal egyenesével összekötő szakaszok közül a magasság a legrövidebb. A csúcsból kiinduló két oldal közül legfeljebb az egyik eshet egybe a magassággal, ezért fennállnak az

$$a + b > 2m_c \quad b + c > 2m_a \quad c + a > 2m_b$$

egyenlőtlenségek. Ezeket összeadva, és kettővel osztva az

$$a + b + c > m_a + m_b + m_c$$

összefüggést kapjuk. Ha mindhárom oldal kurta lenne, akkor viszont $a + b + c \leq m_a + m_b + m_c$ teljesülnie, ami a fentiek szerint lehetetlen. Két kurta oldal viszont lehetséges, például az egyenlőszárú derékszögű háromszög mindkét befogója egyenlő a hozzá tartozó magassággal.

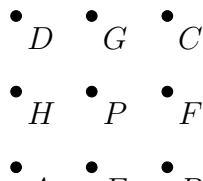


8. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. A sík minden pontjához hozzárendeltünk egy egész számot úgy, hogy a következő teljesül: ha A, B, C és D egy négyzet csúcsai, akkor a hozzájuk rendelt számok összege nulla. Lehetséges-e, hogy a sík valamely P pontjához nem a nullát rendeltük?

A sík tetszőleges P pontját tekintjük egy $ABCD$ négyzet középpontjaként (tetszőlegesen választhatjuk a négyzetet). Az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontjai legyenek E, F, G és H .



A folytatásban egy ponthoz rendelt számot ugyanazzal a betűvel fogunk jelölni, mint a pontot. Az $AEPH, EBFP, PFCG$ és $PGDH$ négyzetekre alkalmazva a feltételt:

$$0 = (A + E + P + H) + (E + B + F + P) + (P + F + C + G) + (P + D + G + H)$$

$$0 = A + B + C + D + 2E + 2F + 2G + 2H + 4P$$

Mivel $ABCD$ és $EFGH$ is négyzetek, ezért

$$(A + B + C + D) + 2 \cdot (E + F + G + H) = A + B + C + D + 2E + 2F + 2G + 2H = 0.$$

Emiatt viszont $4P = 0$, azaz $P = 0$. Tehát a hozzárendelés csak olyan lehet, amely bármely P ponthoz a nullát rendeli.



2. Legyen


$$S = 2019^{2019} + 2019^{2018} + 2019^{2017} + \dots + 2019^2 + 2019^1 + 1.$$

Mutasd meg, hogy S -nek van háromjegyű prímosztója.

1. megoldás Mivel $2019^{n+1} + 2019^n = 2020 \cdot 2019^n$, ezért az S összegben bármely két egymást követő tag összege osztható 2020-szal. Mivel S páros számú tagból áll, így S is osztható 2020-szal. Viszont $2020 = 20 \cdot 101$, a 101 pedig egy háromjegyű prímszám, ezért S -nek van háromjegyű prímosztója (a 101 biztosan ilyen).

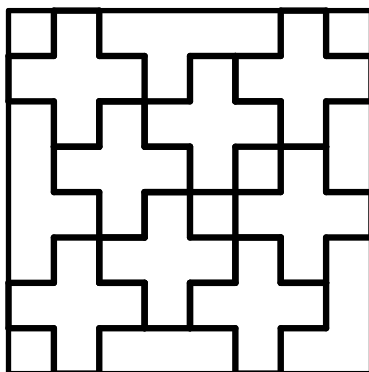
Második megoldás. Vizsgáljuk meg S osztási maradékát 2020-szal. Mivel 2019 és -1 ugyanolyan maradékot ad 2020-szal, ezért S maradéka megegyezik az

$$S' = (-1)^{2019} + (-1)^{2018} + (-1)^{2017} + \dots + (-1)^2 + (-1)^1 + 1$$

összeg maradékával. Ez az összeg viszont $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots - 1 + 1 = 0$, tehát S' , és így S is osztható 2020-szal. Viszont $2020 = 20 \cdot 101$, a 101 pedig egy háromjegyű prímszám, ezért S -nek van háromjegyű prímosztója (a 101 biztosan ilyen). 

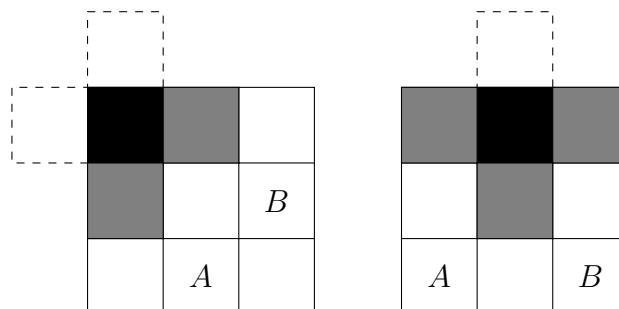
3. Legfeljebb hány kereszt alakú tartomány (egy négyzetből és négy vele oldalszomszédos négyzetből álló alakzat) helyezhető el egy 8×8 -as sakktáblán átfedés nélkül? (A kereszt alakú tartományok nem lóghatnak le a tábláról, és követniük kell a rácsvonalakat.)

Nyolc kereszt kis próbálkozással elhelyezhető, például:



A keresztnek közepe a belső hatszor hatos négyzetbe esik. Ha lehetne kilenc kereszt is a táblán, akkor a belső hatszor hatos valamelyik háromszor hármas negyedébe legalább három középpont esne.

Ez viszont egyszerűen ellenőrizhető, hogy nem lehetséges, nem fér el. Ha egy középpont a háromszor hármas közepébe esik, akkor abban a negyedben már nem lehet másik kereszt középpontja, ha pedig egy sarokba vagy egy él középpontra, akkor csak az ábrákon A -val és B -vel jelölt mezők jöhetnek szóba másik kereszt középpontjaként, de mindig csak az egyik.



4. Robot Robi a következő számolást végzi: ha megadunk neki egy pozitív egész számot, ő elosztja maradékosan 43-mal, majd összeadja a kapott maradékot és hányadost, és leírja az így kapott számot. Egy napon Robinak sorra az 1, 2, 3, ..., 2019 számokat adták meg, és ő mindegyikkel elvégezte a fenti számolást. A Robi által leírt 2019 darab szám között hány darab 7-tel osztható van?


Első megoldás. Legyen az N szám esetén a kapott hányados h , a maradék m . Ekkor

$$N = 43 \cdot h + m = 42 \cdot h + (h + m).$$

Mivel $42 \cdot h$ biztosan 7-tel osztható, ezért $(h + m)$ akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha N is osztható 7-tel. Tehát Robot Robi éppen annyi 7-tel osztható számot írt le, ahány az 1, 2, 3, ..., 2019 számok között volt. Mivel $2019 = 288 \cdot 7 + 3$, ezért 288 darab 7-tel osztható számot írt le Robi.

Második megoldás. Mivel $2019 = 46 \cdot 43 + 41$, ezért a hányadosok 0-tól 46-ig, a maradékok 0-tól 42-ig terjedhetnek. Közülük csak két eset nem fordul elő: amikor mindkettő 0, illetve amikor a hányados 46 és a maradék 42. Mivel 7-tel osztható összeget akarunk, a hányados 7-tel vett osztási maradéka egyértelműen meghatározza a maradék lehetséges 7-es maradékait. Ez alapján összegyűjthetjük a megfelelő lehetőségeket.

7-es maradék	Hányadosok	Maradékok	Lehetőségek
0 + 0	0, 7, 14, 21, 28, 35, 42	0, 7, 14, 21, 28, 35, 42	$7 \cdot 7 = 49$
1 + 6	1, 8, 15, 22, 29, 36, 43	6, 13, 20, 27, 34, 41	$7 \cdot 6 = 42$
2 + 5	2, 9, 16, 23, 30, 37, 44	5, 12, 19, 26, 33, 40	$7 \cdot 6 = 42$
3 + 4	3, 10, 17, 24, 29, 38, 45	4, 11, 18, 25, 32, 39	$7 \cdot 6 = 42$
4 + 3	4, 11, 18, 25, 32, 39, 46	3, 10, 17, 24, 29, 38	$7 \cdot 6 = 42$
5 + 2	5, 12, 19, 26, 33, 40	2, 9, 16, 23, 30, 37	$6 \cdot 6 = 36$
6 + 1	6, 13, 20, 27, 34, 41	1, 8, 15, 22, 29, 36	$6 \cdot 6 = 36$

A fentiek között szerepel a $(0, 0)$ pár is, ezt ki kell venni. Így a Robi által leírt 7-tel osztható számok száma összesen $49 + 42 + 42 + 42 + 42 + 36 + 36 - 1 = 288$. 

5. Az egyenlőszárú ABC háromszögbe beírtunk egy DEF háromszöget úgy, hogy D az AB oldalon, E az AC oldalon és F a BC oldalon van. Tudjuk, hogy $AD = AE$, $BD = BF$ és $DFCE$ egy deltoid. Bizonyítsd be, hogy a DEF háromszög egyenlőszárú! (Sem a $DFCE$ deltoidnál, sem az ABC háromszögnél nem adtuk meg, hogy melyek az egyenlő oldalak.)

Első megoldás. Két esetre bontjuk a feladat megoldását aszerint, hogy a $DFCE$ deltoid melyik átlója a deltoid tükörtengelye.

- a) A deltoid CD átlója a deltoid szimmetriatengelye. Ekkor $ED = FD$, tehát DEF egyenlőszárú.
- b) A deltoid EF átlója a deltoid szimmetriatengelye.
 - i. Az ABC háromszögben AC az alap. (Ha BC az alap, az pont ugyanígy megy.) Tudjuk, hogy $BD = BF$ és $BA = BC$. Tehát a párhuzamos szelők tétele alapján DF párhuzamos AC -vel. Ebből azt kaptuk, hogy $DFCE$ egy olyan deltoid, aminek


az egyik szemközti oldalpárja párhuzamos. Mivel egy deltoid tengelyesen szimmetrikus, így a másik szemközti oldalpár is párhuzamos. Tehát $DFCE$ nem csak egy deltoid hanem egy paralelogramma is. Viszont minden négyszög, ami egy egyszerre deltoid is és paralelogramma is egy rombusz, hiszen bármely két oldala egyenlő hosszúságú.

Ha pedig $DFCE$ rombusz, akkor már a szögek ismerete nélkül is visszakaptuk az előző esetet ($ED = FD$).

- ii. Végül ha az ABC háromszögben AB az alap, akkor $\alpha = \sphericalangle DAE = \sphericalangle FBD$ jelölésekkel és az $AD = AE$, $BD = BF$ feltételeket használva $\sphericalangle DEA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle DFB$. Ebből $\sphericalangle DEC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle DFC$. De mivel EF szimmetriatengely $DFCE$ -ben, ezért innen $\sphericalangle DEF = \sphericalangle DFE$ is következik. Ez pedig azt jelenti, hogy DEF egyenlőszárú.

Második megoldás. 1. eset: ha a $DFCE$ deltoid szimmetriatengelye szimmetriatengelye a DC átló, akkor $ED = FD$, tehát DEF egyenlő szárú.

2. eset: ha a $DFCE$ deltoid szimmetriatengelye az FE átló, legyen az ADE háromszög ED alapján lévő két egyforma szög x , a BDF háromszög DF alapján lévő két egyforma szög y . Ekkor az ABC háromszögben az A csúcsnál lévő szög nagysága $180^\circ - 2x$, a B csúcsnál lévő szög nagysága $180^\circ - 2y$. A deltoid feltételezett szimmetriája miatt a deltoidban a D és a C csúcsnál egyforma szög van, így az ABC háromszögben a C csúcsnál lévő szög $180^\circ - x - y$. Ebből a három szögből kettő egyforma (mert ABC egyenlő szárú): mindhárom esetben azt kapjuk, hogy $x = y$.

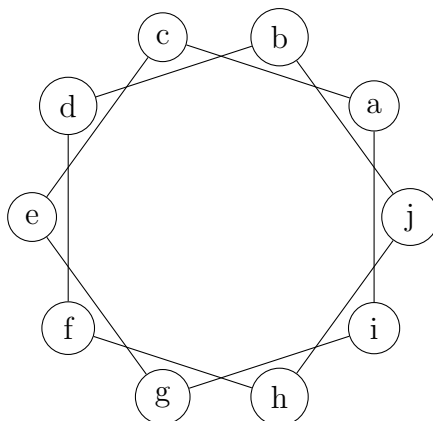
Mivel a deltoidban E -nél $180^\circ - x$, F -nél $180^\circ - y$ a szög nagysága, így ez a két szög is egyforma. A deltoidban így bármely két szemközti szög egyforma, azaz paralelogramma is. Viszont azok a négyszögek, melyek deltoidok és paralelogrammák, azok rombuszok is (két-két szemközti és két-két szomszédos oldala is egyforma, vagyis mind a négy oldalal egyforma), azaz megint szimmetriatengely a DC átló, így készen vagyunk. 

8. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Egy tíztagú baráti társaság egy furcsa étterembe ment ebédelni. Egy kerekasztal köré ültetik le, a székek 1-től 10-ig számozottak. Az ebéd végén mindenkinek annyiszor 1000 forintot kell fizetni, amennyi a két szomszédja sorszámának különbsége (a különbség képzésekor a kisebb számot vonjuk ki a nagyobból). A székeket a pincér rendezheti el a társaság érkezése előtt. Mit tegyen a lehető legnagyobb számla elérése érdekében?

Jelöljük valamilyen körüljárás szerint a székek sorszámát betűkkel: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, és kössük össze azokat, amelyek különbsége szerepel a végösszegben. Számoljunk az egyszerűség kedvéért a különbségek összegével, elég az eredményt a legvégén megszorozni 1000-rel.

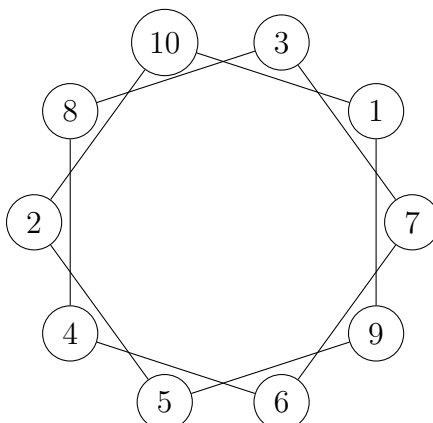


Látható, hogy az $\{a, i, g, e, c\}$, illetve a $\{b, j, h, f, d\}$ „körökben” egymástól függetlenül variálható a székek sorrendje. Tehát a pincér feladata ügyesen két ötös csoportra osztani a tíz széket, majd a két ötös körben megtalálni a legjobb elrendezést.

Mivel minden sorszám két különbségben szerepel, ezért a következők teljesülnek:

- A végösszeg felfogható egy húsztagú összegként,
- amelyben tíz tag pozitív, tíz tag pedig negatív előjelű
- és a tagok abszolútértékei az $1, 1, 2, 2, \dots, 10, 10$ számok.


Az alábbi elrendezésben 48 az összeg.



$$\begin{aligned}
 & (10 - 1) + (9 - 1) + (9 - 5) + (5 - 2) + (10 - 2) + \\
 & + (7 - 3) + (7 - 6) + (6 - 4) + (8 - 4) + (8 - 3) = \\
 & = (9 + 8 + 4 + 3 + 8) + (4 + 1 + 2 + 4 + 5) = 32 + 16 = 48
 \end{aligned}$$


Megmutatjuk, hogy ez az elérhető legnagyobb végösszeg. Rendezzük át a tagokat előjel szerint csoportosítva, és ezen belül abszolútértékük szerint csökkenően rendezve:

$$48 = 10 + 10 + 9 + 9 + 8 + 8 + 7 + 7 + 6 + (5 - 6) - 5 - 4 - 4 - 3 - 3 - 2 - 2 - 1 - 1$$

Mivel pontosan a tagok fele lesz negatív előjelű, egyetlen nagyobb végösszeg lenne elképzelhető, ahol a középen lévő zárójelben $5 - 6$ helyett $-5 + 6$ szerepel. Ekkor ugyanis a húsz szám közül pont a tíz legnagyobb abszolútértékű kapna pozitív előjelet. De ez nem lehetséges, mert egy ötös „körben” öt pozitív és öt negatív előjelű tag keletkezik, és a 10, 9, 8, 7, 6 számok közül valamelyik három egy ötösbe kerül, ott pedig nem tud mind a három kétszer pozitív előjellel szerepelni. Tehát a fenti ábrán látható elrendezés vezet a legnagyobb számlához, ami 48000 forint. 

2. Nevezzük egy háromszög valamely oldalát *kurtának*, ha rövidebb a hozzá tartozó magasságnál. Legfeljebb hány *kurta* oldala lehet egy háromszögnek?

Egy kurta oldal nyilván lehetséges (egy háromszögben tetszőlegesen meg lehet választani egy oldalt és a hozzá tartozó magasságot). Megmutatjuk, hogy egynél több kurta oldal nem lehetséges. Jelölje a háromszög oldalait a , b és c , a hozzájuk tartozó magasságokat m_a , m_b és m_c . Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy $a \leq b \leq c$.

Vegyük észre, hogy egyik magasság sem lehet hosszabb, mint az a két oldal, amely nem tartozik hozzá (tehát pl. $m_a \leq b$ és $m_a \leq c$), hiszen egy pont és egy egyenes között a legrövidebb távolságot a merőleges szakasz határozza meg. Ezek alapján $m_c \leq b \leq c$, azaz c nem lehet kurta, és $m_b \leq a \leq b$, így b sem lehet kurta. Ezzel az állításunkat beláttuk. 

3. Egy sorozat bármely négy (ebben a sorrendben) egymást követő a , b , c és d tagjára teljesül, hogy $a \cdot d = b \cdot c$. A sorozat első tagja 112, negyedik tagja 192, hetedik tagja 378. Mennyi lehet a sorozat 12. tagja? (A sorozatnak lehetnek nem egész tagjai is!)

Első megoldás. A sorozatban nem szerepelhet a 0. Ugyanis az első és a negyedik tagja nem nulla, így a második és a harmadik sem az (a szorzatuk nem nulla). Ha viszont két egymást mellett lévő tag nem nulla, akkor az előttük és a mögöttük lévő tag sem nulla (mert a szorzatuk nem nulla), így tehát a sorozat egyik tagja sem nulla. Ezután keresztbe osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Ebből azonnal következik, hogy bármely két, egymást kettővel követő tagnak ugyanakkora az aránya. Jelölje ezt az arányt q . Mivel ismerjük az első és a hetedik tagot, az eddigiek alapján azt kapjuk, hogy

$$\frac{378}{112} = q^3.$$

Innen kis számolással $q = \frac{3}{2}$. Mivel a 12. tag a 4. tag q^4 -szerese, így a feladat kérdésére a válasz: 972.

Második megoldás. A sorozat második tagja nem lehet nulla, mert a második és a harmadik tag szorzata nem nulla. Dolgozzunk a számok prímtényezősbontásával, és fejezzük ki a

hiányzó tagokat a második taggal, $a_2 = x$ -szel.

$$a_1 = 2^4 \cdot 7, a_2 = x, a_3 = \frac{1}{x} \cdot 2^{10} \cdot 3 \cdot 7, a_4 = 2^6 \cdot 3, a_5 = \frac{1}{x^2} \cdot 2^{16} \cdot 3^2 \cdot 7, a_6 = \frac{1}{x} \cdot 2^{12} \cdot 3^2, a_7 = \frac{1}{x^3} \cdot 2^{22} \cdot 3^3 \cdot 7$$

Az előző felsorolás utolsó tagjának ismerjük értékét: $a_7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = \frac{1}{x^3} \cdot 2^{22} \cdot 3^3 \cdot 7$. Innen $x^3 = 2^{21}$, vagyis $x = 2^7$ adódik. Most már egyértelműen felírható az összes tag, és a_{12} -re $2^2 \cdot 3^5 = 972$ jön ki.

Megjegyzés: A befejezés számolása egyszerűsíthető azzal, ha a 2, 3 és 7 kitevőjét írjuk csak fel.

$$(4, 0, 1) \rightarrow (7, 0, 0) \rightarrow (3, 1, 1) \rightarrow (6, 1, 0) \rightarrow (2, 2, 1) \rightarrow (5, 2, 0) \rightarrow \\ \rightarrow (1, 3, 1) \rightarrow (4, 3, 0) \rightarrow (0, 4, 1) \rightarrow (3, 4, 0) \rightarrow (-1, 5, 1) \rightarrow (2, 5, 0)$$

Az utolsó előtti hármásban a -1 kitevőhöz az $\frac{1}{2}$ hatvány érték tartozik, így a_{11} nem egész.



4. A 8.c osztályba 29 gyerek jár. Azt tudjuk, hogy mindegyik gyerek 14 vagy 15 éves. Az osztályfőnök meg akarja tudni, hogy hány éves az egyik gyerek, de a gyerekek csak úgy hajlandók válaszolni, ha a tanár rámutat 11 gyerekre és akkor elárulják a 11 gyerek életkorának összegét. Mennyi a legkevesebb kérdés, amiből a tanár biztosan ki tudja találni, hogy hány éves a kérdéses személy?

Tegyük fel, hogy Sári életkorát keressük, amit jelöljünk s -sel. A többi diák életkora legyen a_1, a_2, \dots, a_{28} .

Egy kérdés nem lehet elég. Ugyanis ha Sári nem szerepel a kiválasztott 11 diák között, akkor nem tudunk semmit róla, ha pedig igen, akkor legyen mondjuk Júlia is benne az összegben, és akkor nem tudjuk megkülönböztetni a Sári 14, Júlia 15 éves esetet a Sári 15, Júlia 14 éves esettől. Két kérdés sem elég. Ha Sári egyikben sem szerepel, akkor semmit nem tudunk róla. Ha Sári mindkettő kérdésben szerepel, akkor mindkét kérdésben lesz egy párja, aki a másik kérdésben nincs benne (különben a két kérdés azonos lenne, ami az előző eset). Ha eredetileg Sári 14, és a két párja 15, illetve Sári 15 és a két párja 14, akkor ugyanazt a választ kapja a tanár, tehát nem lehet a két eset között különbséget tenni. Ha Sári csak az egyik kérdésben szerepel, akkor két eset lehetséges: ha van olyan diák Sárin kívül, aki csak ebben a kérdésben szerepel, akkor nem lehet megkülönböztetni azt a két esetet, ha Sári 14 és ez a diák 15, vagy Sári 15 és ez a diák 14 éves. Ha nem ez a helyzet, akkor a maradék tíz diák mind a két kérdésben szerepel (legyen köztük egy Lili), és van még egy diák, Róza, aki csak a másik kérdésben szerepel. Ekkor a Sára, 14 Róza, 14 és Lili 15, illetve a Sára 15, Róza 14 és Lili 14 éves eseteket nem lehet megkülönböztetni egymástól.

Három kérdés viszont már elegendő:

$$K_1 : s + (a_1 + \dots + a_5) + (a_6 + \dots + a_{10})$$

$$K_2 : s + (a_1 + \dots + a_5) + (a_{11} + \dots + a_{15})$$

$$K_3 : s + (a_6 + \dots + a_{10}) + (a_{11} + \dots + a_{15})$$



Ha a három kérdésre kapott választ összeadjuk, ismerni fogjuk $3s + 2 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{15})$ értékét. Ennek az összegnek a paritása egyenlő s paritásával. Ha tehát az összeg páros, akkor Sári 14, egyébként pedig 15 éves.

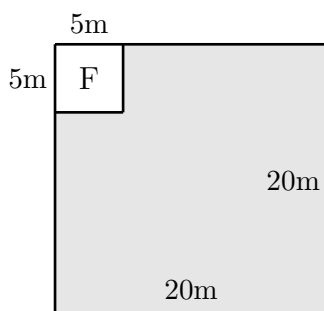


Feladatok

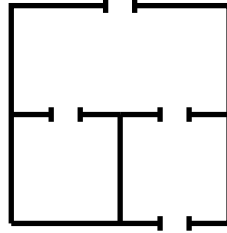
5. osztály

Megyei forduló

1. Anna összeadta 1-től 17-ig a pozitív egész számokat. Bella összeadta 7-től 23-ig a pozitív egész számokat. Mennyivel nagyobb Bella összege, mint Anna összege? 
2. Juss el a 777-ről a 666-ra úgy, hogy minden lépésben az éppen aktuális számból kivonod a számban szereplő egyik jegyet.
(Például a 183-as számról a $183 - 1 = 182$ -re, a $183 - 8 = 175$ -re és a $183 - 3 = 180$ -ra lehet egy lépésben eljutni.) 
3. Három fiú örököl egy 20 méter oldalú négyzet alakú telket, melynek egyik sarkában egy faház (F) áll, amelynek alapja egy 5 méter oldalhosszúságú négyzet. A telk többi részén szántóföld van. A fiúk fel akarják osztani a szántóföldet úgy, hogy mindegyikük egy-egy ugyanakkora területű és ugyanolyan alakú összefüggő részt kapjon. Mutass példát egy ilyen felosztásra.



4. Egy egyszintes lakásról a következőket tudjuk.
- A lakás és a szobák alaprajza téglalap alakú.
 - Bármely két szoba között legfeljebb egy ajtó van.
 - Bármely szobából legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
 - A lakásban összesen 12 ajtó van.
- (Az ábra egy 3-szobás 4-ajtós lakásra mutat példát.)



Legkevesebb hány szoba lehet a lakásban? Rajzolj példát és indokold, hogy miért nem elég kevesebb szoba. ➔

5. Egy négycsapatos focibajnokságban mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért pedig 0 pont járt. A bajnokság végén megkérdeztünk három csapatot, hogy hány pontot értek el. A válaszok a következők voltak: 1, 3 és 7. ➔
- Hány pontot szerezhettek a negyedik csapat?

6. osztály

Megyei forduló

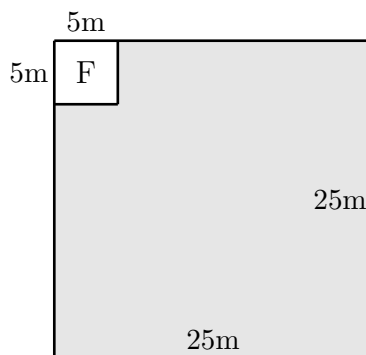
1. Juss el a 888-ról a 777-re úgy, hogy minden lépésben az éppen aktuális számból kivonod a számban szereplő egyik jegyet.
(Például a 183-as számról a $183 - 1 = 182$ -re, a $183 - 8 = 175$ -re és a $183 - 3 = 180$ -ra lehet egy lépésben eljutni.)



2. Hat fiú örököl egy 25 méter oldalú négyzet alakú telket, melynek egyik sarkában egy faház (F) áll, amelynek alapja egy 5 méter oldalhosszúságú négyzet. A telek többi részén szántó föld van.

A fiúk fel akarják osztani a szántóföldet úgy, hogy mindegyikük egy-egy ugyanakkora területű és ugyanolyan alakú, összefüggő részt kapjon, de furfangos édesapjuk kikötötte, hogy a részek nem lehetnek téglalap alakúak.

Mutass példát egy ilyen felosztásra.



3. Egy pozitív egész számot *6-almasnak* nevezünk, ha csupa különböző számjegyből áll, minden számjegye legalább 6, és a szám osztható 6-tal. Hány 6-almas szám van?
4. Egy négycsapatos focibajnokságban mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért pedig 0 pont járt. A bajnokság végén megkérdeztünk három csapatot, hogy hány pontot értek el. A válaszok a következők voltak: 1, 3 és 7.
Hány pontot szerezhetett a negyedik csapat?



5. Egy 4×4 -es táblázat sorait és oszlopait is megszámoztuk 1-től 4-ig. Ezután pöttyöket tettünk néhány mezőbe (egy mezőbe akár többet is) úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban összesen pontosan annyi pötty legyen, mint amennyi az adott sor, illetve oszlop sorszáma. Hány mező maradhatott üresen? Adj példát minden lehetséges értékre, és indokold meg, hogy más érték miért nem lehetséges.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				



7. osztály

Megyei forduló

1. Héphaisztosz, Dionüszosz és Poszeidón összevesztek azon, hogy hármuk közül ki a legszebb, és ki a legokosabb. Az álláspontok a következők voltak:

- Héphaisztosz: Poszeidón a legszebb. Én vagyok a legokosabb.
- Dionüszosz: Héphaisztosz a legszebb. Én vagyok a legokosabb.
- Poszeidón: Én vagyok a legszebb. Dionüszosz a legokosabb.

Ki a legokosabb, és ki a legszebb valójában, ha tudjuk, hogy a legokosabb mindkét kérdésben az igazságnak megfelelően nyilatkozott, míg a legszebbnek mindkét állítása téves volt? →

2. Hány olyan 2020-nál kisebb pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata 20? →

3. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának belsejében levő E pontra teljesül, hogy $AD = DE$, $DC = EC$ és $EB = BC$. Határozd meg a paralelogramma szögeit. →

4. Egy 4×4 -es táblázat sorait és oszlopait is megszámoztuk 1-től 4-ig. Ezután pöttyöket tettünk néhány mezőbe (egy mezőbe akár többet is) úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban összesen pontosan annyi pötty legyen, mint amennyi az adott sor, illetve oszlop sorszáma. Hány mező maradhatott üresen? Adj példát minden lehetséges értékre, és indokold meg, hogy más érték miért nem lehetséges.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				



5. Egy pozitív egész számot *váltakozó osztósorozatúnak* nevezünk, ha növekvő sorrendbe írva az összes osztóját, felváltva következnek a páros és páratlan számok. (Például a 42 váltakozó osztósorozatú, hiszen az osztói növekvő sorrendben: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.)

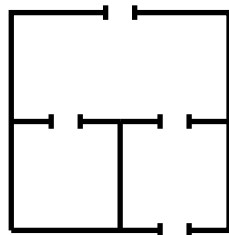
- Adj meg egy váltakozó osztósorozatú számot, amelynek legalább 12 különböző osztója van.
- Van-e 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám? →

8. osztály

Megyei forduló

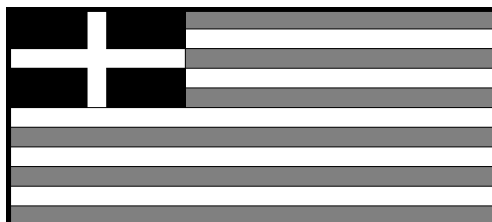
- Hány olyan 2020-nál kisebb pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata 20? →
- Egy egyszintes lakásról a következőket tudjuk.
 - A lakás és a szobák alaprajza téglalap alakú.
 - Bármely két szoba között legfeljebb egy ajtó van.
 - Bármely szobából legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
 - A lakásban összesen 15 ajtó van.

(Az ábra egy 3-szobás 4-ajtós lakásra mutat példát.)



Legkevesebb hány szoba lehet a lakásban? Rajzolj példát és indokold, hogy miért nem elég kevesebb szoba. →

- Bergengócia zászlaja (lásd az ábrát) 11 egyenlő vastag vízszintes sávot tartalmaz, melyek felváltva szürkék és fehérek, szürkével kezdve. A zászló bal felső sarkában egy öt sáv magas, fekete színű, téglalap alakú mezőben egy fehér kereszt található. A kereszt szárainak vastagsága megegyezik a sávok vastagságával.




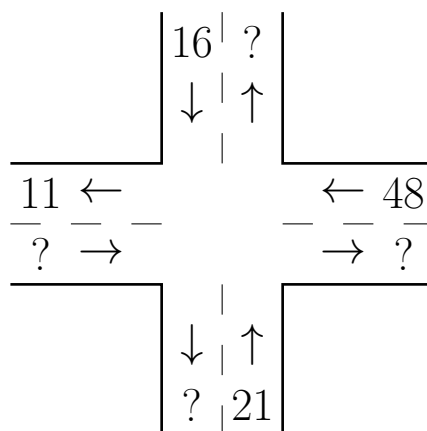
Tudjuk, hogy a zászló szürke területeinek összege pontosan az ötszöröse a fekete területek összegének. A zászló 175 cm hosszú és 55 cm széles. Hány cm^2 a zászló fehér területeinek összege? →






- Egy pozitív egész számot *váltakozó osztósorozatúnak* nevezzük, ha növekvő sorrendbe írva az összes osztóját, felváltva következnek a páros és páratlan számok. (Például a 42 váltakozó osztósorozatú, hiszen az osztói növekvő sorrendben: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.)
 - Adj meg egy váltakozó osztósorozatú számot, amelynek legalább 12 különböző osztója van.
 - Van-e 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám? →
- Az egyenlő szárú ABC háromszög C -nél lévő szöge 100° . Az A -ból húzott szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AD + DC = AB$. →

5. osztály

Országos döntő

- Zoltánnak három lánya van: Anni, Bogi és Cili. Zoltán most éppen annyi idős, mint a három lánya életkora összeadva. 11 év múlva már csak Anni és Bogi (akkori) életkorát kell összeadni, hogy megkapjuk Zoltán életkorát. 13 év múlva Anni és Cili életkorát összeadva lehet majd megkapni Zoltán életkorát; 16 év múlva pedig Bogi és Cili életkorát összeadva. Hány éves most Zoltán? 
- Egy kereszteződésben forgalomfelmérést tartottak. A vizsgált időszakban pontosan 100 autó haladt át a kereszteződésen, ezek közül 10 balra és 27 jobbra kanyarodott, a többi egyenesen ment át. A kereszteződés minden kifelé, illetve befele menő sávjában egy-egy műszer mérte az elhaladó autók számát. Sajnos a nyolc műszerből csak négy működött, az ezek által észlelt autók számát az ábra mutatja. Határozd meg a négy hiányzó értéket.

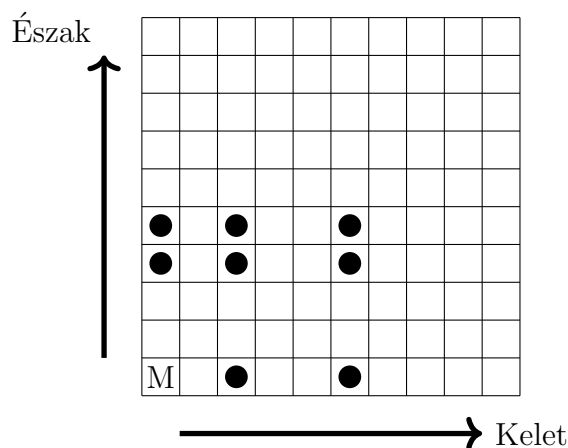
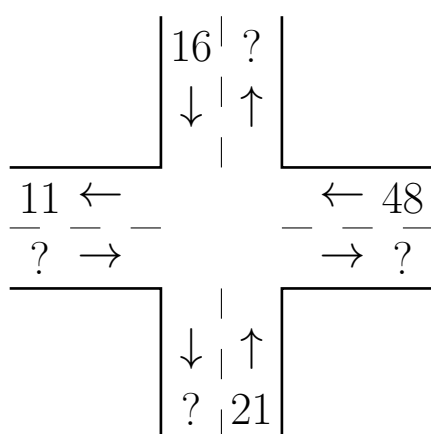


- A labdafalvi focicsapatnak 11 tagja van, és 1-től 11-ig számozott mezeket használnak. A pólón és a nadrágon is szerepel a mezszám. A mai edzés előtt azonban a szertáros összekeverte a nadrágokat, így minden játékosnak más szám van a nadrágján, mint a pólóján. Minden játékos összeadta a pólóján és a nadrágján szereplő számot.
 - Lehetséges-e, hogy mind a 11 játékos páratlan számot kapott összegként? 
 - Lehetséges-e, hogy senki nem kapott 3-mal osztható számot összegként? 
- Anna mindegyik háromjegyű pozitív egész szám esetén kiszámolta a számjegyek szorzatát, és az így kapott 900 darab eredményt leírta egymás után egy sorba. Hányszor fordul elő, hogy két szomszédos eredmény között 36 a különbség? 
- Egy 3 cm élhosszúságú tömör kockát szeretnénk olyan téglatesteből felépíteni, amelyeknek minden élhosszúsága cm-ben mérve egész szám. Ezt úgy szeretnénk megtenni, hogy a téglatestek között semelyik kettő ne legyen egyforma alakú. Fel tudjuk-e a kockát építeni
 - 6 db 
 - 7 db téglatestből, ezen szabályok betartásával? 

6. osztály

Országos döntő

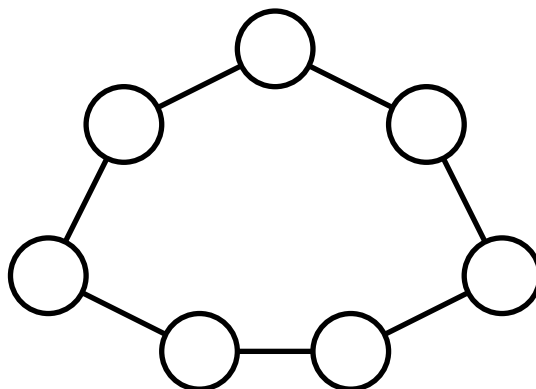
1. Egy kereszteződésben forgalomfelmérést tartottak. A vizsgált időszakban pontosan 100 autó haladt át a kereszteződésen, ezek közül 10 balra és 27 jobbra kanyarodott, a többi egyenesen ment át. A kereszteződés minden kifelé, illetve befele menő sávjában egy-egy műszer mérte az elhaladó autók számát. Sajnos a nyolc műszerből csak négy működött, az ezek által észlelt autók számát a bal oldali ábra mutatja. Határozd meg a négy hiányzó értéket.





2. A Százmezős Pagony az ábra szerint (jobbra fent) fel van osztva 10×10 mezőre. A délnyugati sarokmezőben lakik egy varázsmánó, a többi 99 mezőben egy-egy kincs van, melyek közül a manó szeretne minél többet összegyűjteni. Délelőttönként nyugatról fúj a szél, ilyenkor léghajójával 2 vagy 5 mezővel keletebbre tud leszállni. Délutánonként déli irányból fúj a szél, ha ilyenkor száll fel, akkor léghajójával 3 vagy 4 mezővel északabbra tud eljutni. Nem kell mindkét napszakban felszállnia. (Az ábrán bejelöltük azt a nyolc mezőt, ahová egy nap alatt el tud jutni). A varázsmánó léghajóval nyugati vagy déli irányba nem tud utazni, de ha néhány napnyi utazás után csettint egyet, akkor egyből visszakerül (a léghajójával együtt) a bal alsó mezőbe.

Legfeljebb hány kincset tud a manó így összegyűjteni?

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok közül kiválasztottunk hetet, és beírtuk őket egy-egy karikába. Minden beírt számra igaz, hogy a két szomszédos karikába írt szám szorzatát maradék nélkül eloszthatjuk vele. Hányféleképpen tölthettük ki az ábrát?



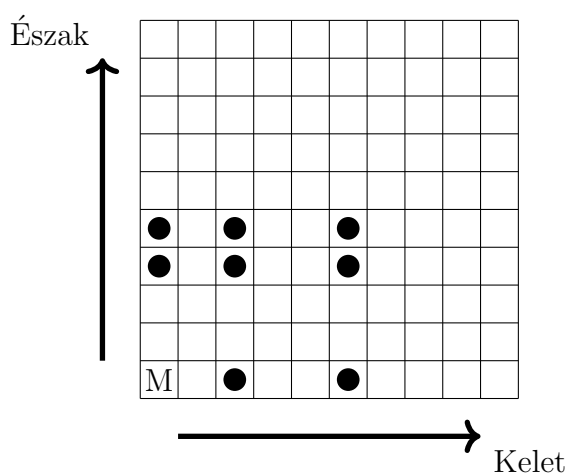
4. Egy órának három mutatója van (kis-, nagy- és másodpercmutató), amelyek folyamatosan járnak. Az órában lévő elem kezd lemerülni, ezért az óra lelassul, ha valamelyik mutatója emelkedik. Ha csak egy mutató emelkedik, akkor az óra az eredeti sebességének felével jár, ha két mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség negyedével jár, ha pedig mindhárom mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség nyolcadával jár az óra. (Egy mutató akkor emelkedik, ha a hatost már elhagyta, de a tizenkettest még nem érte el.) Kezdetben mindhárom mutató legfelül, a tizenkettesen áll. Legkorábban hány óra múlva áll elő újra ugyanez a helyzet? 
5. Egy 3 cm élhosszúságú tömör kockát szeretnénk olyan téglatestekre felbontani, amelyeknek minden élhosszúsága egész. Ezt úgy szeretnénk megtenni, hogy a téglatestek között semelyik kettő ne legyen egyforma alakú. Legfeljebb hány téglatestre tudjuk felbontani a kockát ezen szabályok betartásával? 

7. osztály

Országos döntő

1. A Százmezős Pagony az ábra szerint (balra lent) fel van osztva 10×10 mezőre. A délnyugati sarokmezőben lakik egy varázsmánó, a többi 99 mezőben egy-egy kincs van, melyek közül a manó szeretne minél többet összegyűjteni. Délelőttönként nyugatról fúj a szél, ilyenkor léghajójával 2 vagy 5 mezővel keletebbre tud leszállni. Délutánonként déli irányból fúj a szél, ha ilyenkor száll fel, akkor léghajójával 3 vagy 4 mezővel északabbra tud eljutni. Nem kell mindkét napszakban felszállnia. (Az ábrán bejelöltük azt a nyolc mezőt, ahová egy nap alatt el tud jutni). A varázsmánó léghajójával nyugati vagy déli irányba nem tud utazni, de ha néhány napnyi utazás után csettint egyet, akkor egyből visszakerül (a léghajójával együtt) a bal alsó mezőbe.

Legfeljebb hány kincset tud a manó így összegyűjteni?



2. Egy háromszög egy magasságvonalát *nagyranőttnek* nevezzük, ha legalább 10 cm hosszú. Mi egy olyan háromszög területének legkisebb lehetséges értéke, amelynek két nagyranőtt magasságvonala is van? ➔
3. Egy órának három mutatója van (kis-, nagy- és másodpercmutató), amelyek folyamatosan járnak. Az órában lévő elem kezd lemerülni, ezért az óra lelassul, ha valamelyik mutatója emelkedik. Ha csak egy mutató emelkedik, akkor az óra az eredeti sebességének felével jár, ha két mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség negyedével jár, ha pedig mindhárom mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség nyolcadával jár az óra. (Egy mutató akkor emelkedik, ha a hatost már elhagyta, de a tizenkettest még nem érte el.) Kezdetben mindhárom mutató legfelül, a tizenkettesen áll. Legkorábban hány óra múlva áll elő újra ugyanez a helyzet? ➔

4. Öt különböző pozitív egész számot *ördögi ötösnek* nevezünk, ha igaz rájuk a következő tulajdonság: akárhogyan is választunk ki az öt szám közül kettőt, ezek szorzata mindig osztója a maradék három szám szorzatának. Adj meg egy ördögi ötöst úgy, hogy abban a legnagyobb szám a lehető legkisebb legyen!

Megoldásként elegendő egy jó ördögi ötöst megadni, nem kell szövegesen indokolnod, hogy tényleg ördögi ötöst alkotnak. Azonban javasoljuk, hogy magadnak alaposan ellenőrizd az oszthatósági feltétel teljesülését, mert csak valódi ördögi ötösre kaphatsz pontokat.

Minél kisebb az ördögi ötös legnagyobb száma, annál több pontot érhet a megoldásod. Nincs szükség annak indoklására, hogy a legnagyobb szám értéke tovább már nem csökkenthető.



5. A főnök munkája során négy dossziét használ, melyeket A, B, C és D jelöl. A főnöknek van egy íróasztala, melynek egy fiókja van. A nap kezdetén a dossziék közül néhány a fiókban, néhány pedig az asztalon van egymáson. (Az íróasztalon és a fiókban a négy dosszién kívül nincs semmi.) A dossziékat csak a főnök titkárnője mozgathatja. Amikor a főnök kimondja valamelyik dosszié nevét, akkor a titkárnő a következőt teszi azzal a dossziéval:

- ha a dosszié nem legfelül van az íróasztalon vagy a fiókban van, akkor ezt a dossziét az íróasztalon legfelülre helyezi,
- ha pedig a dosszié az íróasztalon legfelül van, akkor beteszi a dossziét a fiókba.

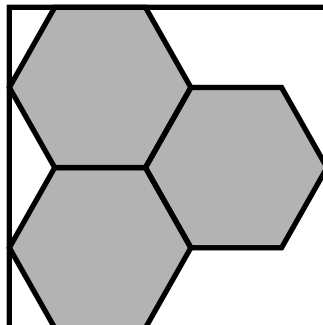
A főnök azt szereti, ha a nap végén mindegyik dosszié a fiókban van. Ehhez szeretne egy olyan betűsorozatot kitalálni, melyet végigmondva az összes dosszié a fiókba kerül, függetlenül attól, hogy kezdetben hogy voltak elrendezve a dossziék. Létezik-e ilyen betűsorozat?



8. osztály

Országos döntő

1. Az ábrán látható módon három egyforma szabályos hatszöget rajzoltunk egy téglalapba. Mekkora egy hatszög területe, ha a téglalap területe 80 cm^2 ?



2. A sakktábla összes mezőjét szeretnénk egy bástyával bejárni, minél kevesebb lépéssel. Ehhez kezdetben a bástyával egy általunk választott mezőre, majd minden lépésben egy olyan mezőre léphetünk, amely az előző mezővel megegyező sorban vagy oszlopban van. Hány lépés kell az összes mező bejárásához? Egy mezőt bejártnak tekintünk, ha arra a bástyával ráléptünk vagy egy lépés során felette áthaladtunk.
3. Öt különböző pozitív egész számot *ördögi ötösnek* nevezünk, ha igaz rájuk a következő tulajdonság: akárhogyan is választunk ki az öt szám közül kettőt, ezek szorzata mindig osztója a maradék három szám szorzatának. Adj meg egy ördögi ötöst úgy, hogy abban a legnagyobb szám a lehető legkisebb legyen!
Megoldásként elegendő egy jó ördögi ötöst megadni, nem kell szövegesen indokolnod, hogy tényleg ördögi ötöst alkotnak. Azonban javasoljuk, hogy magadnak alaposan ellenőrizd az oszthatósági feltétel teljesülését, mert csak valódi ördögi ötösre kaphatsz pontokat. Minél kisebb az ördögi ötös legnagyobb száma, annál több pontot érhet a megoldásod. Nincs szükség annak indoklására, hogy a legnagyobb szám értéke tovább már nem csökkenthető.
4. Egy háromszög egy magasságvonalát *nagyránóttnek* nevezzük, ha legalább 10 cm hosszú. Mi egy olyan háromszög területének legkisebb lehetséges értéke, amelynek mindhárom magasságvonala nagyránótt?
5. A főnök munkája során négy dossziét használ, melyeket A, B, C és D jelöl. A főnöknek van egy íróasztala, melynek egy fiókja van. A nap kezdetén a dossziék közül néhány a fiókban, néhány pedig az asztalon van egymáson. (Az íróasztalon és a fiókban a négy dosszién kívül nincs semmi.) A dossziékat csak a főnök titkárnője mozgathatja. Amikor a főnök kimondja valamelyik dosszié nevét, akkor a titkárnő a következőt teszi azzal a dossziéval:
- ha a dosszié nem legfelül van az íróasztalon vagy a fiókban van, akkor ezt a dossziét az íróasztalon legfelülre helyezi,
 - ha pedig a dosszié az íróasztalon legfelül van, akkor beteszi a dossziét a fiókba.

A főnök azt szereti, ha a nap végén mindegyik dosszié a fiókban van. Ehhez szeretne egy olyan betűsorozatot kitalálni, melyet végigmondva az összes dosszié a fiókba kerül, függetlenül attól, hogy kezdetben hogy voltak elrendezve a dossziék. Létezik-e ilyen betűsorozat?


Megoldások

5. osztály

Megyei forduló

1. Anna összeadta 1-től 17-ig a pozitív egész számokat. Bella összeadta 7-től 23-ig a pozitív egész számokat. Mennyivel nagyobb Bella összege, mint Anna összege?

Első megoldás. Anna és Bella is 17 darab számot adott össze. Bella összeadásában mindegyik szám 6-tal nagyobb, mint a megfelelő szám Anna összeadásában. Ezért Bella összege $17 \cdot 6 = 102$ -vel nagyobb Anna összegénél.

Második megoldás. $1 + 2 + \dots + 17 = 153$ és $7 + 8 + \dots + 23 = 255$, így a különbség: $255 - 153 = 102$. 

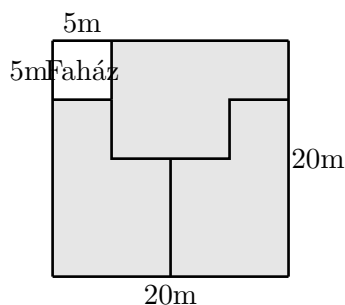
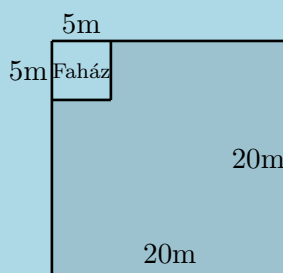
2. Juss el a 777-ről a 666-ra úgy, hogy minden lépésben az éppen aktuális számból kivonod a számban szereplő egyik jegyet.
(Például a 183-as számról a $183 - 1 = 182$ -re, a $183 - 8 = 175$ -re és a $183 - 3 = 180$ -ra lehet egy lépésben eljutni.)

Egy lehetőség:

$$777 \xrightarrow{-7} 770 \xrightarrow{-7} \dots \xrightarrow{-7} 700 \xrightarrow{-7} 693 \xrightarrow{-3} 690 \xrightarrow{-6} 684 \xrightarrow{-6} 678 \xrightarrow{-6} 672 \xrightarrow{-6} 666.$$

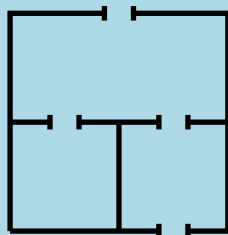


3. Három fiú örököl egy 20 méter oldalú négyzet alakú telket, melynek egyik sarkában egy faház áll, amelynek alapja egy 5 méter oldalhosszúságú négyzet. A telk többi részén szántó föld van. A fiúk fel akarják osztani a szántóföldet úgy, hogy mindegyikük egy-egy ugyanakkora területű és ugyanolyan alakú összefüggő részt kapjon. Mutass példát egy ilyen felosztásra.





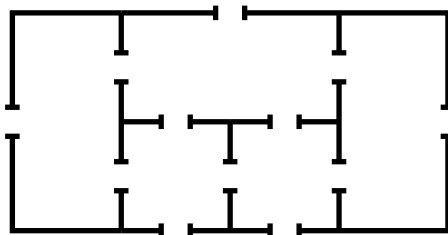
4. Egy egyszintes lakásról a következőket tudjuk.
- A lakás és a szobák alaprajza téglalap alakú.
 - Bármely két szoba között legfeljebb egy ajtó van.
 - Bármely szobából legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
 - A lakásban összesen 12 ajtó van.
- (Az ábra egy 3-szobás 4-ajtós lakásra mutat példát).



Legkevesebb hány szoba lehet a lakásban? Rajzolj példát és indokold, hogy miért nem elég kevesebb szoba.

Ha a lakásban legfeljebb négy szoba lenne, akkor a lakáson kívülre legfeljebb 4 ajtó vezetne, a lakáson belül pedig legfeljebb $4 \cdot 3/2 = 6$ ajtó lehetne, ez összesen legfeljebb csak 10 ajtó.

Öt szobával megoldható:



5. Egy négycsapatos focibajnokságban mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért pedig 0 pont járt. A bajnokság végén megkérdeztünk három csapatot, hogy hány pontot értek el. A válaszok a következők voltak: 1, 3 és 7.
Hány pontot szerezhettek a negyedik csapat?

Első megoldás. Biztos, hogy a 7 pontos csapat kétszer nyert, egyszer döntetlent játszott, míg az 1 pontos csapat egyszer döntetlen játszott és kétszer veszített.
(Máshogyan nem lehet szerezni 7, illetve 1 pontot.)

A 3 pontos csapat kétféleképpen gyűjthette össze pontjait:

- (1) három döntetlent játszott,
- (2) egyszer nyert és kétszer veszített.

Az (1) esetben az 1 pontos és a 7 pontos csapat is a 3 pontossal játszott egyetlen döntetlenjét. Következésképpen, a negyedik csapat legyőzte az 1 pontosat és kikapott a 7 pontostól, így összesen 4 pontot gyűjtött.

A (2) esetben a 3 pontos csapat az 1 pontosat legyőzte, míg a 7 pontostól kikapott (hiszen nem játszott döntetlen). Így a negyedik csapat ellen kellett a másik vereségét elszenvednie. Az 1 pontos és a 7 pontos csapat mérkőzése kétféleképpen érhetett véget:

(2a) a 7 pontos csapat legyőzte az 1 pontosat,

(2b) döntetlen.

A (2a) esetben 7 pontos és az 1 pontos csapat is a negyedik csapat ellen játszotta az egyetlen döntetlenjét. Így ekkor a negyedik csapat 5 pontot gyűjtött.

A (2b) esetben a negyedik csapat is legyőzte az 1 pontosat, és kikapott a 7 pontostól. Ekkor tehát a negyedik csapat 6 pontot gyűjtött.

Ezzel minden lehetőséget megvizsgáltunk, a negyedik csapat 4, 5 vagy 6 pontot gyűjthetett.

A megoldás során mindhárom esetben megadtuk mind a hat meccs kimenetelét, könnyen ellenőrizhető, hogy ezek tényleg a kívánt pontszámokat szolgáltatják.

Megjegyzés. Mindhárom eset megvalósulására volt már példa.

Példa 6 pontos negyedik csapatra: a 2016-os Európa-bajnokság D csoportja.

	CRO	ESP	TUR	CZE	Gy	D	V	Gk	P
Horvátország (CRO)	–	2-1	1-0	2-2	2	1	0	+2	7
Spanyolország (ESP)	1-2	–	3-0	1-0	2	0	1	+3	6
Törökország (TUR)	0-1	0-3	–	2-0	1	0	2	–2	3
Csehország (CZE)	2-2	0-1	0-2	–	0	1	2	–3	1

Példa 5 pontos negyedik csapatra: a 2016-os Európa-bajnokság A csoportja.

	FRA	SUI	ALB	ROM	Gy	D	V	Gk	P
Franciaország (FRA)	–	0-0	2-0	2-1	2	1	0	+3	7
Svájc (SUI)	0-0	–	1-0	1-1	1	2	0	+1	5
Albánia (ALB)	0-2	0-1	–	1-0	1	0	2	–2	3
Románia (ROM)	1-2	1-1	0-1	–	0	1	2	–2	1


Példa 4 pontos negyedik csapatra: a 2013-as Afrikai nemzetek kupája B csoportja.

	GHA	MAL	COD	NIG	Gy	D	V	Gk	P
Ghána (GHA)	–	1-0	2-2	3-0	2	1	0	+4	7
Mali (MAL)	0-1	–	1-1	1-0	1	1	1	0	4
Kongói DK (COD)	2-2	1-1	–	0-0	0	3	0	0	3
Niger (NIG)	0-3	0-1	0-0	–	0	1	2	–4	1

Második megoldás. A 4 csapat összesen 6 mérkőzést játszott le. Ha egy meccs eldőlt (azaz valamelyik csapat győzelmével ért véget), akkor 3 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Ha viszont egy meccs döntetlennel ért véget, akkor 2 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Így ha az eldőlt meccsek számának háromszorosához hozzáadjuk a döntetlenek számának kétszeresét, akkor megkaptjuk a négy csapatnak összesen kiosztott pontok számát.

A 7 pontos csapatnak két győzelme és egy döntetlenje van. Így legalább egy meccs döntetlen lett. Az 1 pontos csapatnak van két veresége, melyek közül az egyiket nem a 7 pontostól szenvedte el, így a 7 pontos győzelmeivel együtt legalább 3 meccs eldőlt. Tehát a következő esetek valamelyike áll fenn:

- 5 eldőlt és 1 döntetlen meccs. Ekkor összesen $5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 17$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $17 - (1 + 3 + 7) = 6$ pontja van.
- 4 eldőlt és 2 döntetlen meccs. Ekkor összesen $4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $16 - (1 + 3 + 7) = 5$ pontja van.
- 3 eldőlt és 3 döntetlen meccs. Ekkor összesen $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 15$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $15 - (1 + 3 + 7) = 4$ pontja van.

Ezen esetek mindegyikére megadható konstrukció, például a fenti megjegyzésben látható módon. 

6. osztály

Megyei forduló

- Juss el a 888-ról a 777-re úgy, hogy minden lépésben az éppen aktuális számból kivonod a számban szereplő egyik jegyet.
(Például a 183-as számról a $183 - 1 = 182$ -re, a $183 - 8 = 175$ -re és a $183 - 3 = 180$ -ra lehet egy lépésben eljutni.)

Két gondolat segíthet a megfelelő lépéssorozat megtalálásában.

- Az aktuális szám első jegye ritkán változik, azért azt kényelmes sokszor használni. Ha ez az első jegy mondjuk 8, akkor ismételten levonva nem változik a 8-cal való osztási maradék.
- Megpróbálhatunk a 777-ből visszafelé elindulni, feltételezve, hogy többnyire 7-et vonunk le, és megnézhetjük, hol kellene átlépni a 800-asokról a 700-asokra.

Az utolsó lépések mondjuk így nézhetnek ki: $\dots \rightarrow 806 \xrightarrow{-8} 798 \xrightarrow{-7} 791 \xrightarrow{-7} 784 \xrightarrow{-7} 777$.

A 806 kettővel hat maradékot ad 8-cal osztva, ellenben 888 nullát, tehát nem lehet csak 8-akat levonva eljutni abba. De ha beiktatunk két eggyel való csökkentést is, akkor már megy a dolog.

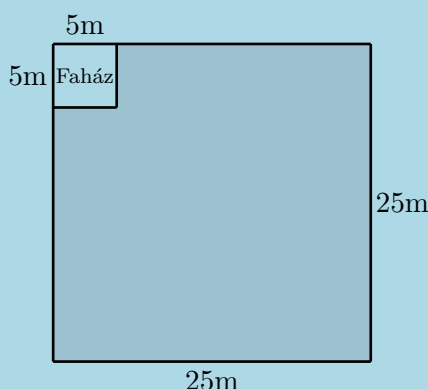
$$888 \xrightarrow{-8} 880 \xrightarrow{-8} 872 \xrightarrow{-8} \dots \xrightarrow{-8} 816 \xrightarrow{-1} 815 \xrightarrow{-1} 814 \xrightarrow{-8} 806$$

A két sorozatunkat egymás után fűzve megkaptuk a feladat egy lehetséges megoldását. 

2. Hat fiú örököl egy 25 méter oldalú négyzet alakú telket, melynek egyik sarkában egy faház áll, amelynek alapja egy 5 méter oldalhosszúságú négyzet. A telk többi részén szántó föld van.

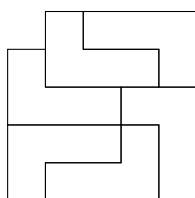
A fiúk fel akarják osztani a szántóföldet úgy, hogy mindegyikük egy-egy ugyanakkora területű és ugyanolyan alakú, összefüggő részt kapjon, de furfangos édesapjuk kikötötte, hogy a részek nem lehetnek téglalap alakúak.

Mutass példát egy ilyen felosztásra.

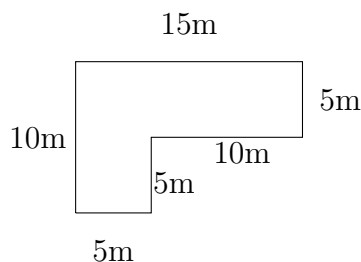


Egyszerűsíti a munkát, ha egy 5×5 -ös négyzetrácson gondolkozunk, ahol minden rácsnégyzet egy 5 méter oldalhosszúságú négyzetnek felel meg a valóságban. Így $5^2 - 1 = 24$ rácsnégyzetet kell a hat testvér között felosztani.

Egy lehetséges megoldás:



Megjegyzés. Akkor is jó a megoldás, ha a versenyző az eredeti méreteket használva ad egy jó felosztást, anélkül, hogy átfogalmazná a kérdést 5×5 -ös négyzetrácsra. A fenti megoldásban egy rész méretei ekkor:



3. Egy pozitív egész számot *6-almasnak* nevezünk, ha csupa különböző számjegyből áll, minden számjegye legalább 6, és a szám osztható 6-tal. Hány 6-almas szám van?

A lehetséges számjegyek a $\{6, 7, 8, 9\}$ halmaz elemei, ezért legfeljebb négyjegyű számok jöhetnek szóba.

Azt is tudjuk, hogy a 6-almas számok párosak és hárommal oszthatók.

A számjegyek száma szerint válogatjuk szét az eseteket.

- **1 jegy:** Csak a 6 jó, ez 1 eset.
- **2 jegy:** A lehetséges végződés 6 vagy 8, mindegyikhez egy kezdő jegy jó a 3-mal való oszthatóság miatt. A 78 és a 96 6-almas, ez 2 eset.
- **3 jegy:** A 3-mal való oszthatóság miatt vagy a 6 vagy a 9 a „kimaradó” számjegy. (A kimaradót itt úgy értjük, hogy a $\{6, 7, 8, 9\}$ halmaz három elemét használjuk, egyet nem.) Utána csak arra kell ügyelni, hogy az egyesek helyén páros jegy álljon, a többi jegy sorrendje tetszőleges. Most a 6-almas számok a következők: 798, 978, 786, 876, 768, 678, ez 6 eset.
- **4 jegy:** Mivel $6 + 7 + 8 + 9 = 30$ osztható hárommal, ezért csak annyi a megkötés, hogy az egyesek helyére páros jegy kerüljön, amúgy tetszőleges a négy számjegy sorrendje. Ez $2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$ eset, mert két páros jegy közül választhatunk, és a maradék három jegy hatféle sorrendbe írható, hiszen különböznek.

Összesen $1 + 2 + 6 + 12 = 21$ db 6-almas szám van.



4. Egy négycsapatos focibajnokságban mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért pedig 0 pont járt. A bajnokság végén megkérdeztünk három csapatot, hogy hány pontot értek el. A válaszok a következők voltak: 1, 3 és 7.

Hány pontot szerezhettek a negyedik csapat?

Biztos, hogy a 7 pontos csapat kétszer nyert, egyszer döntetlent játszott, míg az 1 pontos csapat egyszer döntetlen játszott és kétszer veszített. (Máshogyan nem lehet szerezni 7, illetve 1 pontot.)

A 3 pontos csapat kétféleképpen gyűjthette össze pontjait:

- (1) három döntetlent játszott,
- (2) egyszer nyert és kétszer veszített.

Az (1) esetben az 1 pontos és a 7 pontos csapat is a 3 pontossal játszott egyetlen döntetlenjét. Következésképpen, a negyedik csapat legyőzte az 1 pontosat és kikapott a 7 pontostól, így összesen 4 pontot gyűjtött.

A (2) esetben a 3 pontos csapat az 1 pontosat legyőzte, míg a 7 pontostól kikapott (hiszen nem játszott döntetlent). Így a negyedik csapat ellen kellett a másik vereségét elszenvednie. Az 1 pontos és a 7 pontos csapat mérkőzése kétféleképpen érhetett véget:

- (2a) a 7 pontos csapat legyőzte az 1 pontosat,
- (2b) döntetlen.

A (2a) esetben 7 pontos és az 1 pontos csapat is a negyedik csapat ellen játszott az egyetlen döntetlenjét. Így ekkor a negyedik csapat 5 pontot gyűjtött.

A (2b) esetben a negyedik csapat is legyőzte az 1 pontosat, és kikapott a 7 pontostól. Ekkor tehát a negyedik csapat 6 pontot gyűjtött.

Ezzel minden lehetőséget megvizsgáltunk, a negyedik csapat 4, 5 vagy 6 pontot gyűjthetett.

A megoldás során mindhárom esetben megadtuk mind a hat meccs kimenetelét, könnyen ellenőrizhető, hogy ezek tényleg a kívánt pontszámokat szolgáltatják.

Megjegyzés. Mindhárom eset megvalósulására hozható példa az elmúlt évtized kontinentális labdarúgó-bajnokságaiból.

Példa 6 pontos negyedik csapatra: a 2016-os Európa-bajnokság D csoportja.

	CRO	ESP	TUR	CZE	Gy	D	V	Gk	P
Horvátország (CRO)	–	2-1	1-0	2-2	2	1	0	+2	7
Spanyolország (ESP)	1-2	–	3-0	1-0	2	0	1	+3	6
Törökország (TUR)	0-1	0-3	–	2-0	1	0	2	–2	3
Csehország (CZE)	2-2	0-1	0-2	–	0	1	2	–3	1

Példa 5 pontos negyedik csapatra: a 2016-os Európa-bajnokság A csoportja.

	FRA	SUI	ALB	ROM	Gy	D	V	Gk	P
Franciaország (FRA)	–	0-0	2-0	2-1	2	1	0	+3	7
Svájc (SUI)	0-0	–	1-0	1-1	1	2	0	+1	5
Albánia (ALB)	0-2	0-1	–	1-0	1	0	2	–2	3
Románia (ROM)	1-2	1-1	0-1	–	0	1	2	–2	1

Példa 4 pontos negyedik csapatra: a 2013-as Afrikai nemzetek kupája B csoportja.


	GHA	MAL	COD	NIG	Gy	D	V	Gk	P
Ghána (GHA)	–	1-0	2-2	3-0	2	1	0	+4	7
Mali (MAL)	0-1	–	1-1	1-0	1	1	1	0	4
Kongói DK (COD)	2-2	1-1	–	0-0	0	3	0	0	3
Niger (NIG)	0-3	0-1	0-0	–	0	1	2	–4	1

Második megoldás. A 4 csapat összesen 6 mérkőzést játszott le. Ha egy meccs eldőlt (azaz valamelyik csapat győzelmével ért véget), akkor 3 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Ha viszont egy meccs döntetlennel ért véget, akkor 2 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Így ha az eldőlt meccsek számának háromszorosához hozzáadjuk a döntetlenek számának kétszeresét, akkor megkaptjuk a négy csapatnak összesen kiosztott pontok számát.

A 7 pontos csapatnak két győzelme és egy döntetlenje van. Így legalább egy meccs döntetlen lett. Az 1 pontos csapatnak van két veresége, melyek közül az egyiket nem a 7 pontostól szenvedte el, így a 7 pontos győzelmeivel együtt legalább 3 meccs eldőlt. Tehát a következő esetek valamelyike áll fenn:

- 5 eldőlt és 1 döntetlen meccs. Ekkor összesen $5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 17$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $17 - (1 + 3 + 7) = 6$ pontja van.
- 4 eldőlt és 2 döntetlen meccs. Ekkor összesen $4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $16 - (1 + 3 + 7) = 5$ pontja van.

- 3 eldőlt és 3 döntetlen meccs. Ekkor összesen $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 15$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $15 - (1 + 3 + 7) = 4$ pontja van.

Ezen esetek mindegyikére megadható konstrukció, például a fenti megjegyzésben látható módon. 

5. Egy 4×4 -es táblázat sorait és oszlopait is megszámoztuk 1-től 4-ig. Ezután pöttyöket tettünk néhány mezőbe (egy mezőbe akár többet is) úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban összesen pontosan annyi pötty legyen, mint amennyi az adott sor, illetve oszlop sorszáma.

Hány mező maradhatott üresen? Adj példát minden lehetséges értékre, és indokold meg, hogy más érték miért nem lehetséges.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Minden sorban van pötty, hiszen minden sorban pozitív az összeg. Ezért legalább négy mezőn kell legyen pötty, azaz legfeljebb tizenkét mező lehet üres.

Soranként összeszámolva azt kapjuk, hogy összesen $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ pöttyöt kell elhelyezni a táblázat mezőin.

Ezért legfeljebb tíz mezőre juthat pötty, azaz legalább 6 mező üres.

Tehát az üres mezők száma legalább hat és legfeljebb tizenkettő. Ezen határok között mindegyik eset lehetséges, amint az alábbi példák mutatják.

A példákban pöttyöket nem rajzoltunk, ehelyett beírtuk az egyes mezőkbe, hogy hány pöttyöt tennénk oda.

1			
	2		
		3	
			4

(12 üres mező)

	1		
1	1		
		3	
			4

(11 üres mező)

		1	
1		1	
	2	1	
			4

(10 üres mező)

		1	
	1	1	
1	1	1	
			4

(9 üres mező)

			1
1			1
		2	1
	2	1	1

(8 üres mező)

			1
1			1
	1	1	1
	1	2	1

(7 üres mező)

			1
		1	1
	1	1	1
1	1	1	1

(6 üres mező)



7. osztály

Megyei forduló

1. Héphaisztosz, Dionüszosz és Poszeidón összevesztek azon, hogy hármuk közül ki a legszebb, és ki a legokosabb. Az álláspontok a következők voltak:

- Héphaisztosz: Poszeidón a legszebb. Én vagyok a legokosabb.
- Dionüszosz: Héphaisztosz a legszebb. Én vagyok a legokosabb.
- Poszeidón: Én vagyok a legszebb. Dionüszosz a legokosabb.


Ki a legokosabb, és ki a legszebb valójában, ha tudjuk, hogy a legokosabb mindkét kérdésben az igazságnak megfelelően nyilatkozott, míg a legszebbnek mindkét állítása téves volt?

A kérdésben megfogalmazott feltételből következik, hogy a legszebb és a legokosabb két különböző személy.

A legokosabb ember azt fogja mondani, hogy ő maga a legokosabb. Ezért Poszeidón nem lehet a legokosabb.

Ha Héphaisztosz lenne a legokosabb, akkor Poszeidón a legszebb, vagyis Poszeidón mindkét állítása hamis, de ez ellentmond annak, hogy Poszeidón a legszebb.

Csak az a lehetőség maradt, hogy Dionüszosz a legokosabb, és így állítása alapján Héphaisztosz a legszebb. Ez összhangban van azzal, hogy a legszebb ember mindkét állítása hamis, hiszen Héphaisztosz mindkét állítása ellentmond az eddig rögzített tényeknek.

Tehát Dionüszosz a legokosabb és Héphaisztosz a legszebb. 

2. Hány olyan 2020-nál kisebb pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata 20?

Fel kell bontanunk a 20-at legfeljebb négy darab egyjegyű szám szorzatára. Ha négy tényezőt használunk, akkor legalább az egyiknek egynek kell lennie, különben nem tudnánk 2020-nál kisebb négyjegyű számot összeállítani a számokból. Azt is láthatjuk, hogy a négyjegyű megoldásoknak 1-essel kell kezdődnie.

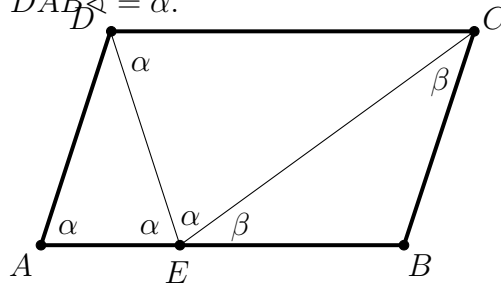
Soroljuk fel a lehetséges felbontásokat, felhasználva, hogy $20 = 2^2 \cdot 5$:

- $20 = 5 \cdot 4$, a lehetséges számok: 45, 54
- $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1$, a lehetséges számok: 145, 154, 415, 451, 514, 541
- $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1145, 1154, 1415, 1451, 1514, 1541
- $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2$, a lehetséges számok: 225, 252, 522
- $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1225, 1252, 1522

Összesen 20 pozitív egész felel meg a feladat feltételeinek. 

3. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának belsejében levő E pontra teljesül, hogy $AD = DE$, $DC = EC$ és $EB = BC$. Határozd meg a paralelogramma szögeit.

Készítsünk ábrát és legyen $\angle DAB = \alpha$.



$AD = DE$ miatt $\angle DEA = \alpha$. Mivel $\angle DEA$ és $\angle EDC$ váltószögek, ezért $\angle EDC = \alpha$.
 $DC = EC$ miatt $\angle DEC = \alpha$ is teljesül.


Végül $EB = BC$ miatt $\angle CEB = \angle ECB = \beta$.

Az E pontnál egy egyenesszöget bontottunk három részre, így $2\alpha + \beta = 180^\circ$.

Emiatt (használva a háromszög belső szögeinek összegére ismert értéket) $\angle ADE = \angle DCE = \beta$.

Most a paralelogramma szemközti szögeinek egyenlőségéből $\alpha = 2\beta$.

Visszatérve az ismert összegre $2\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow 4\beta + \beta = 180^\circ$, innen $\beta = 36^\circ$, ezért $\alpha = 72^\circ$.

Tehát a paralelogramma szögei: 72° , 108° , 72° , 108° , felhasználva, hogy az azonos oldalon fekvő szögek 180 fokra egészítik ki egymást. 

4. Egy 4×4 -es táblázat sorait és oszlopait is megszámoztuk 1-től 4-ig. Ezután pöttyöket tettünk néhány mezőbe (egy mezőbe akár többet is) úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban összesen pontosan annyi pötty legyen, mint amennyi az adott sor, illetve oszlop sorszáma.

Hány mező maradhatott üresen? Adj példát minden lehetséges értékre, és indokold meg, hogy más érték miért nem lehetséges.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Minden sorban van pötty, hiszen minden sorban pozitív az összeg. Ezért legalább négy mezőn kell legyen pötty, azaz legfeljebb tizenkét mező lehet üres.

Soronként összeszámolva azt kapjuk, hogy összesen $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ pöttyöt kell elhelyezni a táblázat mezőin. Ezért legfeljebb tíz mezőre juthat pötty, azaz legalább 6 mező üres.

Tehát az üres mezők száma legalább hat és legfeljebb tizenkettő. Ezen határok között mindegyik eset lehetséges, amint az alábbi példák mutatják.

A példákban pöttyöket nem rajzoltunk, ehelyett beírtuk az egyes mezőkbe, hogy hány pöttyöt tennénk oda.

1			
	2		
		3	
			4

(12 üres mező)

	1		
1	1		
		3	
			4

(11 üres mező)

		1	
1		1	
	2	1	
			4

(10 üres mező)

		1	
	1	1	
1	1	1	
			4

(9 üres mező)

			1
1			1
		2	1
	2	1	1

(8 üres mező)

			1
1			1
	1	1	1
	1	2	1

(7 üres mező)

			1
		1	1
	1	1	1
1	1	1	1

(6 üres mező)



5. Egy pozitív egész számot *váltakozó osztósorozatúnak* nevezünk, ha növekvő sorrendbe írva az összes osztóját, felváltva következnek a páros és páratlan számok. (Például a 42 váltakozó osztósorozatú, hiszen az osztói növekvő sorrendben: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.)

a) Adj meg egy váltakozó osztósorozatú számot, amelynek legalább 12 különböző osztója van.

b) Van-e 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám?

Az (a) részre sokféle példa adható. Például $486 = 2 \cdot 3^5$ megfelelő szám. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1 < 2 < 3 < 6 < 9 < 18 < 27 < 54 < 81 < 162 < 243 < 486.$$

A konstrukció lényege, hogy ha $x < 486$ egy páratlan osztó, akkor $x < 2x < 3x$, ahol $2x$ és $3x$ is osztó, és a $2x$ osztón kívül más osztó nem esik x és $3x$ közé.

A $486 = 2 \cdot 3^5$ számhoz hasonlóan, minden $2 \cdot 3^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$), sőt minden $2 \cdot p^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$ és p egy páratlan prímszám) jó példát szolgáltat.

Egy másik jó példa: $1806 = 42 \cdot 43$. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 43, 86, 129, 258, 301, 602, 903, 1806.$$

Ez a példa működésének kulcsa következő észrevétel: ha egy n páros szám váltakozó osztósorozatú, míg p egy n -nél nagyobb prímszám, akkor $p \cdot n$ is váltakozó osztósorozatú lesz. Ilyenkor ugyanis $p \cdot n$ osztóinak növekedő sorozata úgy állítható elő, hogy az n sorozatának végére odairjuk mégegyszer ugyanezt a sorozatot, csak minden tagot p -szeresére növelve.

A két eddig bemutatott módszer ötvözésével kaphatóak még kisebb váltakozó osztósorozatú számok is, amelynek legalább 12 osztója van. Például a $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$, ennek osztói:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 19, 38, 57, 114, 171, 342.$$

vagy a $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$, ennek osztói:


$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 49, 98, 147, 294.$$

A (b) rész kérdésére a válasz: nincs.

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy létezik 1-nél nagyobb nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám, ezt jelölje n . Világos, hogy n páros szám kell legyen, különben az összes osztója páratlan volna. Innen többféleképpen ellentmondáshoz tudunk jutni:

(1. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. n növekedő osztósorozatának a vége így fog kinézni: $\dots, \frac{n}{2}, n$. Ezek között már nem lehet egyéb osztó, hiszen n -t vele elosztva a hányados 1-nél nagyobb, de 2-nél kisebb lenne, nem lehetne egész. Mivel n osztható 4-gyel így $\frac{n}{2}$ és n egyaránt páros számok, nem teljesül a váltakozás. Ellentmondás.

(2. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. Ekkor minden p páratlan osztójához p páratlan osztóhoz hozzárendelhetjük a $2p$ és $4p$ osztóit. Így minden páratlan osztóhoz két páros osztót rendeltünk hozzá (különböző páratlan számokhoz különböző párosakat), így legalább kétszer annyi páros osztója van n -nek, mint páratlan. Márpedig az 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú számoknak nem lehet több páros osztója, mint páratlan, hiszen a növekvő sorozatban felváltva jönnek a páratlan és a páros osztók, és a sorozat első tagja páratlan. Ellentmondás.

(3. gondolatmenet) A négyzetszámoknak páratlan sok osztójuk van. (Ez az állítás közismert, a versenyen elfogadjuk külön bizonyítás nélkül. Megjegyezzük, hogy osztópárokkal a bizonyítás sem nehéz.) Mivel az n legkisebb osztója (az 1) páratlan és váltakozva következik, ezért a növekvő sorrendben páratlanadik osztók mind páratlanok lesznek. De így a legnagyobb osztó, n maga is páratlan kell legyen. Ellentmondás. 

8. osztály

Megyei forduló

1. Hány olyan 2020-nál kisebb pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata 20?

Fel kell bontanunk a 20-at legfeljebb négy darab egyjegyű szám szorzatára. Ha négy tényezőt használunk, akkor legalább az egyiknek egynek kell lennie, különben nem tudnánk 2020-nál kisebb négyjegyű számot összeállítani a számokból. Azt is láthatjuk, hogy a négyjegyű megoldásoknak 1-essel kell kezdődnie.

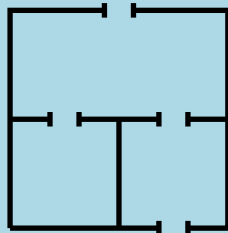
Soroljuk fel a lehetséges felbontásokat, felhasználva, hogy $20 = 2^2 \cdot 5$:

- $20 = 5 \cdot 4$, a lehetséges számok: 45, 54
- $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1$, a lehetséges számok: 145, 154, 415, 451, 514, 541
- $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1145, 1154, 1415, 1451, 1514, 1541
- $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2$, a lehetséges számok: 225, 252, 522
- $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1225, 1252, 1522

Összesen 20 pozitív egész felel meg a feladat feltételeinek.



2. Egy egyszintes lakásról a következőket tudjuk.
- A lakás és a szobák alaprajza téglalap alakú.
 - Bármely két szoba között legfeljebb egy ajtó van.
 - Bármely szobából legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
 - A lakásban összesen 15 ajtó van.
- (Az ábrán egy 3-szobás 4-ajtós lakásra látható példa.)

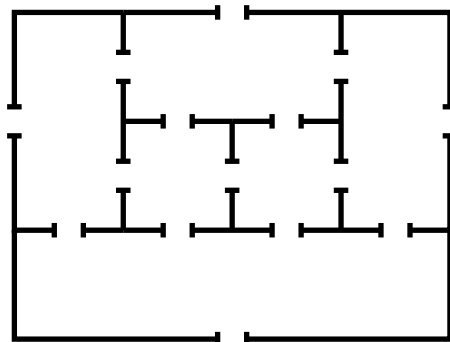


Legkevesebb hány szoba lehet a lakásban? Rajzolj példát és indokold, hogy miért nem elég kevesebb szoba.

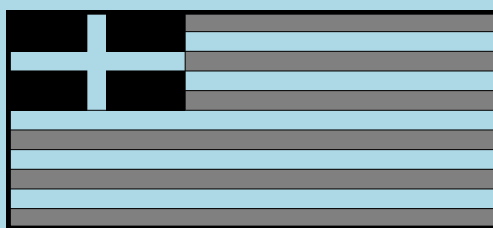
Ha a lakásban legfeljebb négy szoba lenne, akkor a lakáson kívülre legfeljebb 4 ajtó vezetne. A lakáson belül az ajtók két szobához tartoznak, két szobát pedig legfeljebb $4 \cdot 3/2 = 6$ féle módon lehet kiválasztani, azaz az ajtók száma legfeljebb 6. Ez összesen legfeljebb 10 ajtó.

Ha a lakásban öt szoba lenne, akkor a lakáson kívülre legfeljebb 5 ajtó vezethetne, a lakáson belül pedig legfeljebb $5 \cdot 4/2 = 10$ ajtó lehetne. Így 15 ajtót csak úgy kaphatnánk, ha bármely két szoba között lenne pontosan egy. Ez azonban lehetetlen. Válasszunk ki egy szobát, innen négy ajtó nyílna a négy másik szobába. A négy ajtó között van két nem szomszédos, az ezeken át elérhető szobáknak viszont nem lehet közös faluk, így ajtajuk sem.

Hat szoba esetén elérhető a 15 ajtó, például így:



3. Bergengócia zászlaja (lásd az ábrát) 11 egyenlő vastag vízszintes sávot tartalmaz, melyek felváltva szürkék és fehérek, szürkével kezdve. A zászló bal felső sarkában egy öt sáv magas, fekete színű, téglalap alakú mezőben egy fehér kereszt található. A kereszt szárainak vastagsága megegyezik a sávok vastagságával.



Tudjuk, hogy a zászló szürke területeinek összege pontosan az ötszöröse a fekete területek összegének. A zászló 175 cm hosszú és 55 cm széles. Hány cm^2 a zászló fehér területeinek összege?

Legyen egy fekete téglalap hosszúsága x cm, a szélességük két sáv vastagságával, azaz $55 : 11 \cdot 2 = 10$ cm-rel egyezik meg. Ekkor a kereszt melletti sávok hosszúsága (cm-ben) $175 - (2x + 5) = 170 - 2x$.

Így a szürke terület (cm^2 -ben): $3 \cdot 5 \cdot (170 - 2x) + 3 \cdot 5 \cdot 175$.

Mivel ez ötszöröse a fekete területnek, így

$$3 \cdot 5 \cdot (170 - 2x) + 3 \cdot 5 \cdot 175 = 5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot x$$

$$2550 - 30x + 2625 = 200x$$

$$5175 = 230x$$

$$x = \frac{5175}{230} = \frac{45}{2}$$

Innen a fehér terület:

$$2 \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot (170 - 2x) + 3 \cdot 5 \cdot 175 = 4225 \text{ cm}^2.$$



4. Egy pozitív egész számot *váltakozó osztósorozatúnak* nevezzük, ha növekvő sorrendbe írva az összes osztóját, felváltva következnek a páros és páratlan számok. (Például a 42 váltakozó osztósorozatú, hiszen az osztói növekvő sorrendben: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.)
- a) Adj meg egy váltakozó osztósorozatú számot, amelynek legalább 12 különböző osztója van.
- b) Van-e 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám?

Az (a) részre sokféle példa adható. Például $486 = 2 \cdot 3^5$ megfelelő szám. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1 < 2 < 3 < 6 < 9 < 18 < 27 < 54 < 81 < 162 < 243 < 486.$$

A konstrukció lényege, hogy ha $x < 486$ egy páratlan osztó, akkor $x < 2x < 3x$, ahol $2x$ és $3x$ is osztó, és a $2x$ osztón kívül más osztó nem esik x és $3x$ közé.

A $486 = 2 \cdot 3^5$ számhoz hasonlóan, minden $2 \cdot 3^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$), sőt minden $2 \cdot p^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$ és p egy páratlan prímszám) jó példát szolgáltat.

Egy másik jó példa: $1806 = 42 \cdot 43$. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 43, 86, 129, 258, 301, 602, 903, 1806.$$

Ez a példa működésének kulcsa következő észrevétel: ha egy n páros szám váltakozó osztósorozatú, míg p egy n -nél nagyobb prímszám, akkor $p \cdot n$ is váltakozó osztósorozatú lesz. Ilyenkor ugyanis $p \cdot n$ osztóinak növekedő sorozata úgy állítható elő, hogy az n sorozatának végére odaírjuk mégegyszer ugyanezt a sorozatot, csak minden tagot p -szeresére növelve.

A két eddig bemutatott módszer ötvözésével kaphatóak még kisebb váltakozó osztósorozatú számok is, amelynek legalább 12 osztója van. Például a $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$, ennek osztói:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 19, 38, 57, 114, 171, 342.$$

vagy a $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$, ennek osztói:

$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 49, 98, 147, 294.$$


A (b) rész kérdésére a válasz: nincs.

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy létezik 1-nél nagyobb nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám, ezt jelölje n . Világos, hogy n páros szám kell legyen, különben az összes osztója páratlan volna. Innen többféleképpen ellentmondáshoz tudunk jutni:

(1. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. n növekedő osztósorozatának a vége így fog kinézni: $\dots, \frac{n}{2}, n$. Ezek között már nem lehet egyéb osztó, hiszen n -t vele elosztva a hányados 1-nél nagyobb, de 2-nél kisebb lenne, nem lehetne egész. Mivel n osztható 4-gyel így $\frac{n}{2}$ és n egyaránt páros számok, nem teljesül a váltakozás. Ellentmondás.

(2. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. Ekkor minden p páratlan osztójához p páratlan osztóhoz hozzárendelhetjük a $2p$ és $4p$ osztóit. Így minden páratlan osztóhoz két páros osztót rendeltünk hozzá (különböző páratlan számokhoz

különböző párosakat), így legalább kétszer annyi páros osztója van n -nek, mint páratlan. Márpedig az 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú számoknak nem lehet több páros osztója, mint páratlan, hiszen a növekvő sorozatban felváltva jönnek a páratlan és a páros osztók, és a sorozat első tagja páratlan. Ellentmondás.

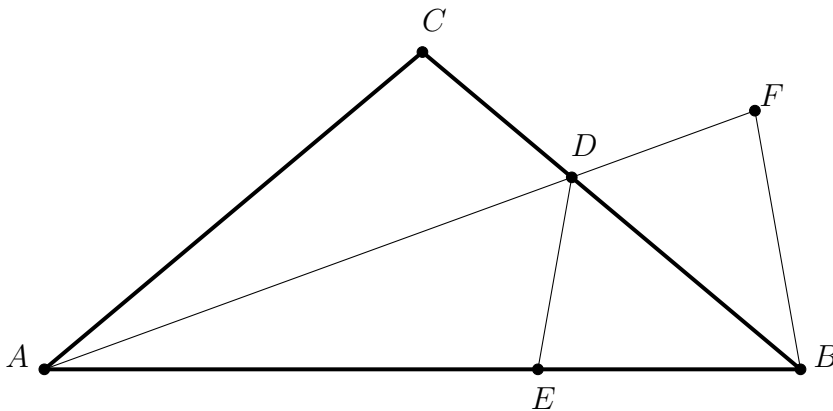
(3. gondolatmenet) A négyzetszámoknak páratlan sok osztójuk van. (Ez az állítás közismert, a versenyen elfogadjuk külön bizonyítás nélkül. Megjegyezzük, hogy osztópárokkal a bizonyítás sem nehéz.) Mivel az n legkisebb osztója (az 1) páratlan és váltakozva következnek, ezért a növekvő sorrendben páratlanodik osztók mind páratlanok lesznek. De így a legnagyobb osztó, n maga is páratlan kell legyen. Ellentmondás. 

5. Az egyenlő szárú ABC háromszög C -nél lévő szöge 100° . Az A -ból húzott szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AD + DC = AB$.

Első megoldás. Mivel C -nél tompaszög van, így csak $AC = BC$ lehetséges. Emiatt $CAB \sphericalangle = CBA \sphericalangle = 40^\circ$, így $CAD \sphericalangle = DAB \sphericalangle = 20^\circ$.

Jelölje a C pontnak az AD egyenesre vett tükörképét E . Az AD szögfelező tulajdonsága miatt E az AB egyenesre esik.

Hosszabbítsuk meg D -n túl az AD szakaszt, és a meghosszabbításon vegyük fel az F pontot úgy, hogy $DC = DE = DF$ teljesüljön. Ekkor $AED \sphericalangle = 100^\circ$, $CDE \sphericalangle = 360^\circ - (100^\circ + 20^\circ + 100^\circ) = 120^\circ$, továbbá a tükrözés miatt $CDF \sphericalangle = EDF \sphericalangle$, így ezek a szögek is 120° -osak. Mivel $EDB \sphericalangle = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, a BC egyenes felezi az EDF szöget.

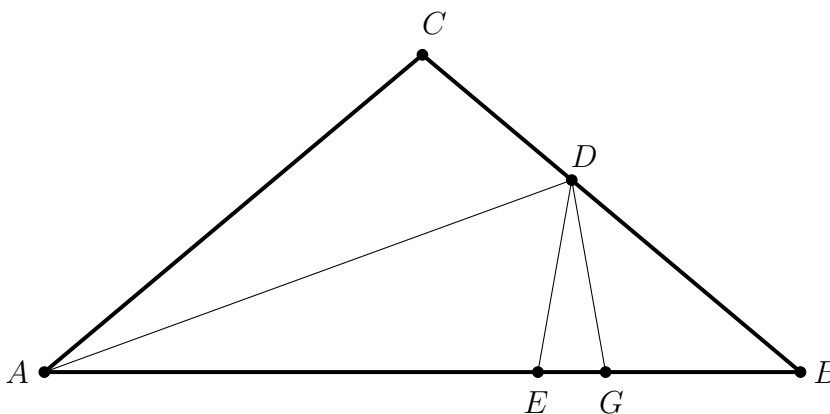


Így $DF = DE$ miatt az F pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe E , tehát $DFB \sphericalangle = DEB \sphericalangle = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, így viszont $FBA \sphericalangle = 180^\circ - (80^\circ + 20^\circ) = 80^\circ$. Tehát az ABF háromszög egyenlő szárú, így $AB = AF = AD + DF = AD + DC$.


Második megoldás.

Az 1. megoldáshoz hasonlóan megállapítjuk az ABC háromszög szögeinek nagyságát.

Vegyük fel az AB oldalon a G pontot úgy, hogy $AD = AG$ teljesüljön. Az ADF egyenlő szárú háromszög szögei 20° , 80° , 80° (az A , D és G csúcsoknál).



Így a BDG háromszög szögeit is ki tudjuk számolni: a G csúcsnál 100° -os a szög, a B csúcsnál 40° -os (az eredeti háromszögből), így a D csúcsnál is 40° -os a szög.

Ezek alapján a BDG háromszög egyenlő szárú, $BG = DG$. Azt kéne tehát még belátni, hogy $DG = DC$. Tükrözzük a C pontot a szögfelezőre, így kapjuk az E pontot az AB szakaszon. Az eddigiekhez hasonló egyszerű szögszámolással meg lehet kapni, hogy a DEG háromszög is egyenlő szárú, így $DE = DG$, a tükrözés miatt pedig $DE = DC$, így készen vagyunk. 

5. osztály

Országos döntő

1. Zoltánnak három lánya van: Anni, Bogi és Cili. Zoltán most éppen annyi idős, mint a három lánya életkora összeadva. 11 év múlva már csak Anni és Bogi (akkori) életkorát kell összeadni, hogy megkapjuk Zoltán életkorát. 13 év múlva Anni és Cili életkorát összeadva lehet majd megkapni Zoltán életkorát; 16 év múlva pedig Bogi és Cili életkorát összeadva. Hány éves most Zoltán?

Első megoldás.

A feladat feltételeiből tudjuk, hogy

- $Z = A + B + C$
- $(Z + 11) = (A + 11) + (B + 11)$
- $(Z + 13) = (A + 13) + (C + 13)$
- $(Z + 16) = (B + 16) + (C + 16)$

Ha a három jövőbeli időpontban összeadjuk Zoltán életkorát (vagyis a 2., 3. és 4. egyenlőség bal oldalát), akkor mostani életkorának háromszorosánál 40-nel ($= 11 + 13 + 16$) többet kapunk: $3Z + 40$.

Ha ugyanezt a feltételekben szereplő lányok életkorával tesszük meg (vagyis a 2., 3. és 4. egyenlőség bal oldala), akkor minden lány jelenlegi életkora kétszer szerepel az összegben és még 80 ($= 11 + 11 + 13 + 13 + 16 + 16$): $2A + 2B + 2C + 80$.

Az első feltételből miatt $2A + 2B + 2C + 80 = 2Z + 80$

Tehát $3Z + 40 = 2Z + 80$, ami azt jelenti, hogy Zoltán 40 éves most.

Második megoldás.

A feladat feltételeiből tudjuk, hogy

- $Z = A + B + C$
- $(Z + 11) = (A + 11) + (B + 11)$
- $(Z + 13) = (A + 13) + (C + 13)$
- $(Z + 16) = (B + 16) + (C + 16)$

Az első két feltételt összeadva: $Z + (A + 11) + (B + 11) = A + B + C + (Z + 11)$

Ebből kiszámolható, hogy $C = 11$

Az első és harmadik feltételt összeadva: $Z + (A + 13) + (C + 13) = A + B + C + (Z + 13)$

Ebből kiszámolható, hogy $B = 13$

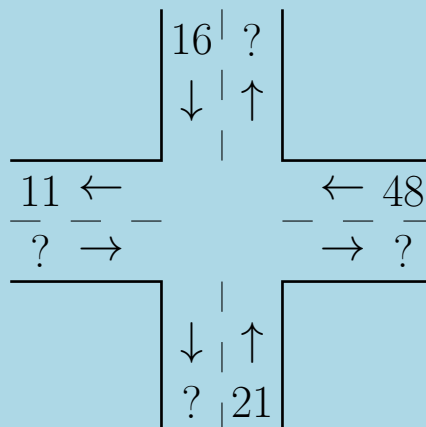
Az első és negyedik feltételt összeadva: $Z + (B + 16) + (C + 16) = A + B + C + (Z + 16)$

Ebből kiszámolható, hogy $A = 16$

Mivel $Z = A + B + C$, ezért Zoltán 40 éves.



2. Egy kereszteződésben forgalomfelmérést tartottak. A vizsgált időszakban pontosan 100 autó haladt át a kereszteződésen, ezek közül 10 balra és 27 jobbra kanyarodott, a többi egyenesen ment át. A kereszteződés minden kifelé illetve befele menő sávjában egy-egy műszer mérte az elhaladó autók számát. Sajnos a nyolc műszerből csak négy működött, az ezek által számolt autók számát az ábra mutatja. Határozd meg a négy hiányzó értéket.



Első megoldás. Mivel összesen 100 autó szerepelt a mérésben, az ábrán „balról” $100 - (16 + 48 + 21) = 100 - 85 = 15$ autó érkezett.

Vizsgáljuk meg, hogy az ábrán „jobbról” érkező 48 autó merre hagyhatta el a kereszteződést. Legfeljebb 11 mehetett egyenesen, mert „balra” annyi hagyta el a kereszteződést. Azt is tudjuk, hogy legfeljebb $10 + 27 = 37$ autó kanyarodhatott valamerre. Ezen számok összege éppen 48, így minden irányba pontosan a fenti darabszámú autó ment. Vagyis a „jobbról” jövő autók közül 27 jobbra kanyarodott, 11 egyenesen áthaladt, 10 pedig balra kanyarodott.

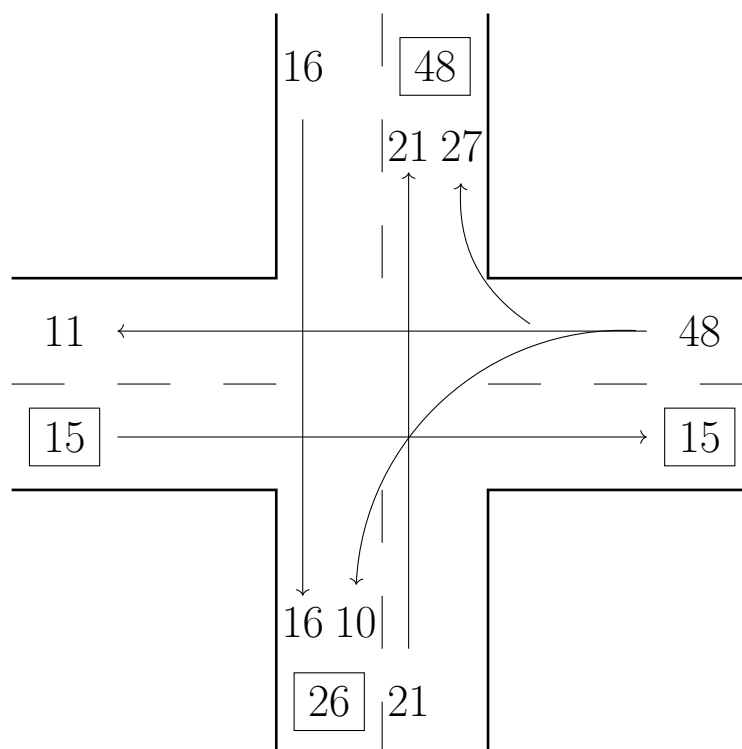
Így viszont az összes többi autó egyenesen haladt át a kereszteződésen, így egyszerű összegzéssel megkapjuk a hiányzó értékeket.

Második megoldás. Mivel összesen 100 autó szerepelt a mérésben, „balról” $100 - (16 + 48 + 21) = 100 - 85 = 15$ autó érkezett.

Mivel balra 10, jobbra pedig 27 autó kanyarodott, ezért a fennmaradó $100 - 10 - 27 = 63$ autó egyenesen haladt át.

Ezen egyenesen áthaladó autók közül, a megadott számok alapján, az ábrán „fentről” legfeljebb 16, „balról” 15, „lentől” 21 érkezett, „jobbról” pedig legfeljebb 11, mert ennyi hagyhatja csak el a kereszteződést „balra”. Ezen számok összege épp 63, tehát a fenti irányokból pontosan ennyi autó haladt át egyenesen.

Innentől a hiányzó értékeket egyértelműen ki tudjuk tölteni.



3. A labdafalvi focicsapatnak 11 tagja van, és 1-től 11-ig számozott mezeket használnak. A pólón és a nadrágon is szerepel a mezszám. A mai edzés előtt azonban a szertáros összekeverte a nadrágokat, így minden játékosnak más szám van a nadrágján, mint a pólóján. Minden játékos összeadta a pólóján és a nadrágján szereplő számot.
- a) Lehetséges-e, hogy mind a 11 játékos páratlan számot kapott összegként?
 b) Lehetséges-e, hogy senki nem kapott 3-mal osztható számot összegként?

a) Nem lehetséges.

1-től 11-ig öt páros és hat páratlan szám van.

A hat páratlan számú póló közül legfeljebb öt olyan lehet, amelyekhez páros számú nadrágot párosítottak. Ezért lesz legalább egy olyan játékos, akinek a pólóján és a nadrágján egyaránt páratlan szám áll.

Mivel két páratlan szám összege biztosan páros, így ez a játékos nem kaphatott páratlan számot összegként.

b) Igen, lehetséges. Például:

nadrág	1	4	7	10	2	5	8	11	3	6	9
póló	3	6	9	1	5	8	11	2	4	7	10
összeg	4	10	16	11	7	13	19	13	7	13	19




4. Anna mindegyik háromjegyű pozitív egész szám esetén kiszámolta a számjegyek szorzatát, és az így kapott 900 darab eredményt leírta egymás után egy sorba.
Hányszor fordul elő, hogy két szomszédos eredmény között 36 a különbség?

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a szomszédos számok közül a kisebbik 9-re végződik-e, vagy nem.

- Ha a kisebbik szám 9-re végződik, akkor a rákövetkező nullára, így a számjegyszorzatok különbsége megegyezik a kisebbik (9-re végződő) szám jegyeinek szorzatával. Akkor lesz ez 36, ha az első két jegy szorzata négy. Ez három esetben fordul elő: 149, 229, 419.
- Ha a kisebbik szám utolsó jegye 9-nél kisebb (mondjuk c), akkor a rákövetkező utolsó jegye $c + 1$. Az első két jegy ilyenkor azonos, és a számjegyszorzatok különbsége éppen az első két jegy szorzata (például $267 \rightarrow 268 \Rightarrow 2 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 6 \cdot 1$).

Két számjegy szorzata az alábbi esetekben lehet 36: $4 \cdot 9$, $6 \cdot 6$, $9 \cdot 4$. A kisebbik szám utolsó jegye pedig 9-től különbözik, tehát a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmaz eleme.

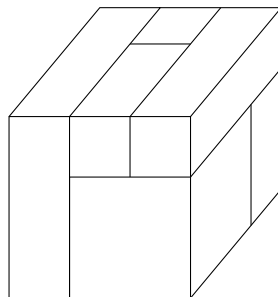
Ez összesen $3 \cdot 9 = 27$ lehetőség. (490, 491, ..., 498, 660, 661, ..., 668, 940, 941, ..., 948)

Tehát összesen $3 + 27 = 30$ esetben fordul elő, hogy a szomszédos számok számjegyszorzatának különbsége 36. 

5. Egy 3 cm élhosszúságú tömör kockát szeretnénk olyan téglatesteből felépíteni, amelyeknek minden élhosszúsága cm-ben mérve egész szám. Ezt úgy szeretnénk megtenni, hogy a téglatestek között semelyik kettő ne legyen egyforma alakú.
Fel tudjuk-e a kockát építeni

- a) 6 db
b) 7 db téglatestből, ezen szabályok betartásával?

a) Lehetséges. A következő téglatesteket használjuk: $1 \times 1 \times 1$, $1 \times 1 \times 2$, $1 \times 1 \times 3$, $1 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 2$, $1 \times 3 \times 3$. (Ettől lényegében különböző megoldás nem létezik.)



b) Nem lehetséges. A következő téglatestek jöhetnek szóba:

a	b	c	térfogat (cm^3)	a	b	c	térfogat (cm^3)
1	1	1	1	1	3	3	9
1	1	2	2	2	2	2	8
1	1	3	3	2	2	3	12
1	2	2	4	2	3	3	18
1	2	3	6	3	3	3	27

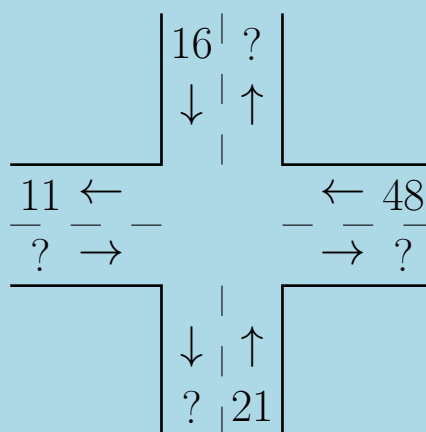
A hét legkisebb lehetséges téglatest térfogatának összege $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 = 33$.

Ez több, mint a kocka térfogata (27). 

6. osztály

Országos döntő

1. Egy kereszteződésben forgalomfelmérést tartottak. A vizsgált időszakban pontosan 100 autó haladt át a kereszteződésen, ezek közül 10 balra és 27 jobbra kanyarodott, a többi egyenesen ment át. A kereszteződés minden kifelé illetve befele menő sávjában egy-egy műszer mérte az elhaladó autók számát. Sajnos a nyolc műszerből csak négy működött, az ezek által számolt autók számát az ábra mutatja. Határozd meg a négy hiányzó értéket.



Első megoldás. Mivel összesen 100 autó szerepelt a mérésben, az ábrán „balról” $100 - (16 + 48 + 21) = 100 - 85 = 15$ autó érkezett.

Vizsgáljuk meg, hogy az ábrán „jobbról” érkező 48 autó merre hagyhatta el a kereszteződést. Legfeljebb 11 mehetett egyenesen, mert „balra” annyi hagyta el a kereszteződést. Azt is tudjuk, hogy legfeljebb $10 + 27 = 37$ autó kanyarodhatott valamerre. Ezen számok összege éppen 48, így minden irányba pontosan a fenti darabszámú autó ment. Vagyis a „jobbról” jövő autók közül 27 jobbra kanyarodott, 11 egyenesen áthaladt, 10 pedig balra kanyarodott.

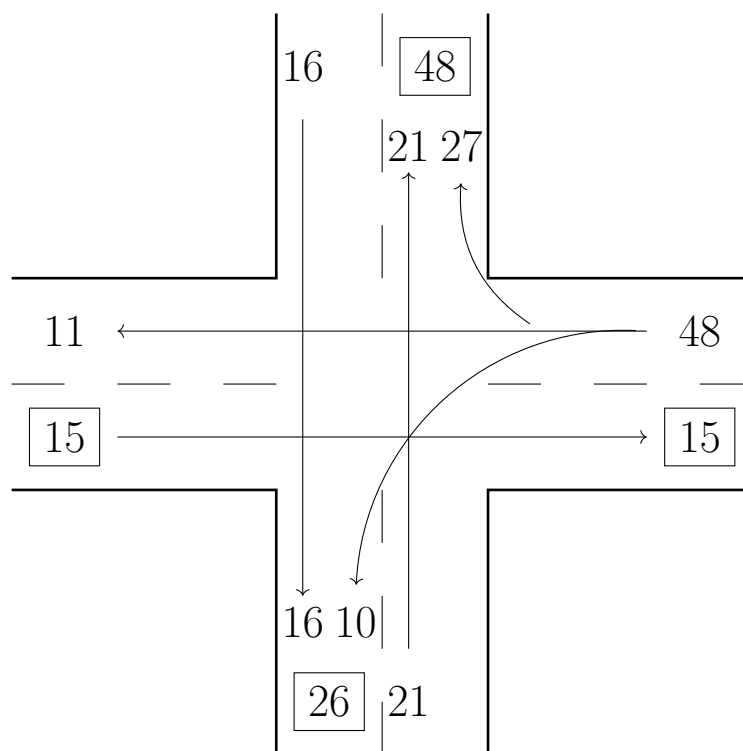
Így viszont az összes többi autó egyenesen haladt át a kereszteződésen, így egyszerű összegzéssel megkapjuk a hiányzó értékeket.

Második megoldás. Mivel összesen 100 autó szerepelt a mérésben, „balról” $100 - (16 + 48 + 21) = 100 - 85 = 15$ autó érkezett.

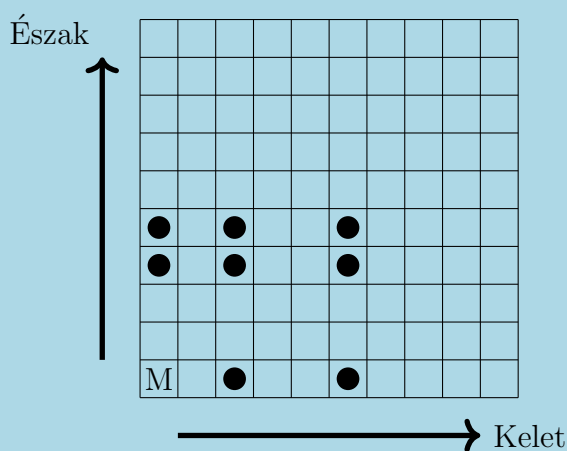
Mivel balra 10, jobbra pedig 27 autó kanyarodott, ezért a fennmaradó $100 - 10 - 27 = 63$ autó egyenesen haladt át.

Ezen egyenesen áthaladó autók közül, a megadott számok alapján, az ábrán „fentről” legfeljebb 16, „balról” 15, „lentől” 21 érkezett, „jobbról” pedig legfeljebb 11, mert ennyi hagyhatja csak el a kereszteződést „balra”. Ezen számok összege épp 63, tehát a fenti irányokból pontosan ennyi autó haladt át egyenesen.

Innentől a hiányzó értékeket egyértelműen ki tudjuk tölteni.



2. A Százmezős Pagony az ábra szerint fel van osztva 10×10 mezőre. A délnyugati sarokmezőben lakik egy varázsmánó, a többi 99 mezőben egy-egy kincs van, melyek közül a manó szeretne minél többet összegyűjteni. Délelőttönként nyugatról fúj a szél, ilyenkor léghajójával 2 vagy 5 mezővel keletebbre tud leszállni. Délutánonként déli irányból fúj a szél, ha ilyenkor száll fel, akkor léghajójával 3 vagy 4 mezővel északabbra tud eljutni. Nem kell mindkét napszakban felszállnia. (Az ábrán bejelöltük azt a nyolc mezőt, ahová egy nap alatt el tud jutni). A varázsmánó léghajóval nyugati vagy déli irányba nem tud utazni, de ha néhány napnyi utazás után csettint egyet, akkor egyből visszakerül (a léghajójával együtt) a bal alsó mezőbe. Legfeljebb hány kincset tud a manó így összegyűjteni?



Mivel a manó dönthet úgy, hogy csak délelőtt vagy csak délután száll fel, ezért elég külön-külön megnézni, hogy melyik o oszlopokba, és melyik s sorokba tud eljutni. Ha ezt már tudjuk, akkor ezekből alkotható összes rendezett (o, s) pár olyan mezőt ír le, ahova a manó el tud jutni, és csak ezek a mezők érhetőek el.

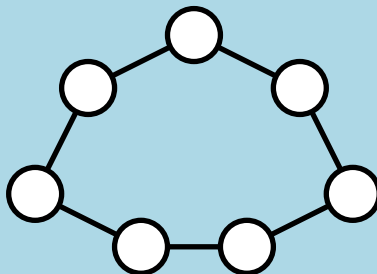
Az elérhető oszlopok sorszáma (balról jobbra számozva) $1 + a \cdot 2 + b \cdot 5$ alakú, ahol a és b nemnegatív egész. a legfeljebb 4, b legfeljebb 1. Az összes eset könnyen végignézhető, az elérhető oszlopok sorszáma: $\{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Az elérhető sorok sorszáma (alulról felfelé számozva) $1 + c \cdot 3 + d \cdot 4$ alakú, ahol $0 \leq c \leq 3$ és $0 \leq d \leq 2$ egészek. Az eseteket végignézve kapjuk, hogy az elérhető sorok sorszáma: $\{1, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

A bevezető megjegyzés alapján a 8 elérhető oszlop és a 7 elérhető sor összesen $8 \cdot 7 = 56$ elérhető mezőt jelent, de a bal alsó mező nem rejt kincset, ezért a manó összesen 55 kincset tud összegyűjteni.



3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok közül kiválasztottunk hetet, és beírtuk őket egy-egy karikába. Minden beírt számra igaz, hogy a két szomszédos karikába írt szám szorzatát maradék nélkül eloszthatjuk vele. Hányféleképpen tölthettük ki az ábrát?



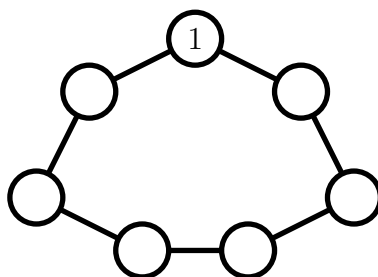
Az 5 és a 7 nem szerepelhet benne, mert 1-től 9-ig csak egyetlen számot osztanak, ezért nem osztói semelyik másik két számjegy szorzatának.

A hét karikába tehát az 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 számokat kell beírni valamilyen sorrendben.

A 9 csak a 3 és a 6 között lehet, mert más párok esetén a szorzat nem osztható 9-cel.

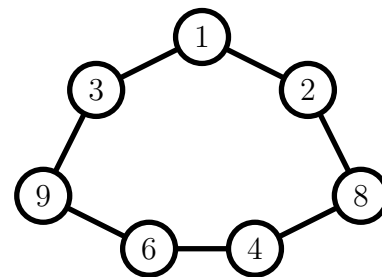
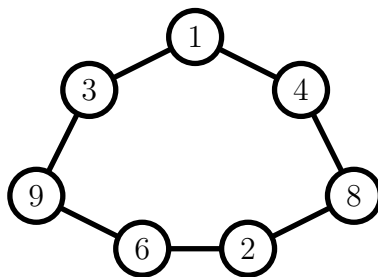
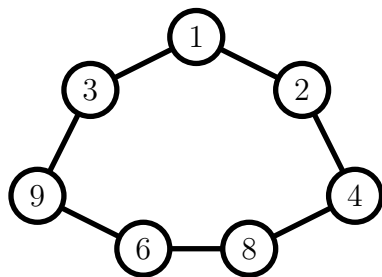
A 8-as számnak egyik oldalán a 4-esnek kell állnia, a másik oldalán a 2-esnek vagy a 6-osnak. Így három páros szám egymás mellett van, ezért a negyedik páros számnak ezek mellett kell helyet foglalnia, vagyis a három páratlan szám is egymás mellett van. Ahhoz, hogy az 1, 3 és 9 egymás mellett legyen, valamint a 9-es a 3-as és a 6-os között legyen, a négy számnak 1, 3, 9, 6 sorrendben kell egymást követnie.

Számoljuk meg először azokat a megoldásokat, amelyekben az 1-es szerepel a felső karikában.



Tegyük fel, hogy a 3 az 1 bal szomszédja az ábrán, és írjuk be 9-et és a 6-ot is.

Ezután már csak azt kell garantálni, hogy a 8 egyik szomszédja a 4 legyen, a másik szomszédja pedig páros. Így három megoldást kapunk:



Ha a 3 az 1 jobb szomszédja, akkor az előző megoldások tükörképeit kapjuk. Így összesen hat olyan kitöltés van, amelyben az 1-es áll a felső karikában.

Végül vegyük észre, hogy:

- egy helyes kitöltés 6 (önmagával együtt 7) „elforgatottja” is helyes megoldás (és ezek egymástól különböző kitöltések)
- minden helyes kitöltés megkapható így.

Így összesen $6 \cdot 7 = 42$ jó kitöltés létezik.



4. Egy órának három mutatója van (kis-, nagy- és másodpercmutató), amelyek folyamatosan járnak. Az órában lévő elem kezd lemerülni, ezért az óra lelassul, ha valamelyik mutatója emelkedik. Ha csak egy mutató emelkedik, akkor az óra az eredeti sebességének felével jár, ha két mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség negyedével jár, ha pedig mindhárom mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség nyolcadával jár az óra. (Egy mutató akkor emelkedik, ha a hatost már elhagyta, de a tizenkettest még nem érte el.) Kezdetben mindhárom mutató legfelül, a tizenkettesen áll. Legkorábban hány óra múlva áll elő újra ugyanez a helyzet?

Első megoldás. A másodpercmutatónak $60 \cdot 12 = 720$ kört kell megtennie, hogy a mutatók visszatérjenek eredeti helyzetükbe, mert 60 kör egy „órával” mozdítatja el a nagymutatót és ezt 12-szer kell megismételni. (Az idézőjeles „óra” itt a nagymutató által megtett egy teljes kört jelent.)

Azt fogjuk nézni, hogy a kismutató és a nagymutató helyzetétől függően hány másodperc alatt tesz meg egy kört a másodpercmutató. Felhasználjuk, hogy a másodpercmutató egy teljes köre alatt az nem változik, hogy a másik két mutató „felfele” vagy „lefele” mozog.

Amikor a nagymutató és a kismutató is lefele megy, akkor a másodpercmutató az első félkört lefelé teszi meg, tehát „valódi” időben, 30 mp alatt végez vele. A második félkörben felfele megy, ezért fele olyan gyors, így ehhez 60 mp kell. Így kapjuk összesen a 90 mp-es köridőt.

Ha nagymutató és a kismutató közül az egyik lefele, a másik felfele megy, akkor 180 mp alatt ér a másodpercmutató körbe. Ha pedig mindkét mutató felfele megy, akkor 360 mp.

Az hogy a nagy- és a kismutató lefele menjen, az 6 „órában” fordul elő, és minden „órának” az első 30 „percében”. Vagyis 180 körben fog mindkét mutató lefele menni. Ugyanígy kiszámolható, hogy 180 körben megy mindkét mutató felfelé. A maradék 360 körben az egyik mutató lefele, a másik felfele fog menni.

Foglaljuk táblázatba a különböző eseteket:

kismutató és nagymutató	körök száma	a másodpercmutató egy körének ideje
le, le	180	90 mp
fel, le	180	180 mp
le, fel	180	180 mp
fel, fel	180	360 mp

Össességében $180 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ másodperc telik el, amíg a mutatók visszatérnek eredeti helyzetükbe.

Ez $3 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ perc, tehát $3 \cdot (\frac{3}{2} + 3 + 3 + 6) = 40,5$ óra.

Tehát 40 és fél óra után áll vissza az eredeti állapot.


Második megoldás. A mutatók egymáshoz képest ugyanúgy mozognak, mint egy pontosan járó óránál. Legközelebb akkor lesz mindhárom mutató a 12-esen, ha a kismutató egyszer

körbeért. Ez háromszor annyi idő, mint amennyi alatt leér a 6-osig, hiszen a táv másik felén minden fele akkora sebességgel történik.

Ahhoz, hogy a kismutató leérjen a 6-oshoz, a nagymutatónak 6 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör háromszor annyi idő, mint amennyi alatt a nagymutató leér a 6-osig – a fentiekhez hasonlóan.

Ahhoz, hogy a nagymutató leérjen a 6-osig, a másodpercmutatónak 30 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör $3 \cdot 30$ másodperc (a kis- és nagymutatók még lefelé haladnak).

Tehát a körbeéréshez szükséges idő $3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 30 \cdot 3 \cdot 30 = 145800$ másodperc, azaz 40,5 óra.

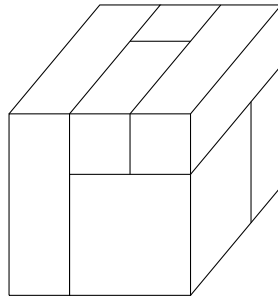
Megjegyzés. A feladat mélyén a következő észrevétel rejlik: mindegyik mutató a mozgása során az út egyik felét fele olyan lassan teszi meg, mint a másikat, így a mozgása másfélszer olyan hosszú ideig tart, mint normálisan. Mivel a mutatók mozgása egymástól „független”, és a mutatók egymást is lassítják, így ezek a másfélszeres szorzók összeszorzódnak, tehát a körbeéréshez szükséges idő az eredeti $1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 27/8$ -szorososa, ami végeredményként $12 \cdot 27/8 = 81/2 = 40,5$ órát ad. 

5. Egy 3 cm élhosszúságú tömör kockát szeretnénk olyan téglatestekre felbontani, amelyeknek minden élhosszúsága egész. Ezt úgy szeretnénk megtenni, hogy a téglatestek között semelyik kettő ne legyen egyforma alakú.

Legfeljebb hány téglatestre tudjuk felbontani a kockát ezen szabályok betartásával?

Először megmutatjuk, hogy 6 téglatestre fel tudjuk bontani.

A következő téglatesteket használjuk: $1 \times 1 \times 1$, $1 \times 1 \times 2$, $1 \times 1 \times 3$, $1 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 2$, $1 \times 3 \times 3$. (Ettől lényegében különböző konstrukció nem létezik.)



Most pedig lássuk be, hogy 7 téglatestre nem lehet felbontani. A következő téglatestek jöhetnek szóba:

a	b	c	térfogat (cm^3)	a	b	c	térfogat (cm^3)
1	1	1	1	1	3	3	9
1	1	2	2	2	2	2	8
1	1	3	3	2	2	3	12
1	2	2	4	2	3	3	18
1	2	3	6	3	3	3	27

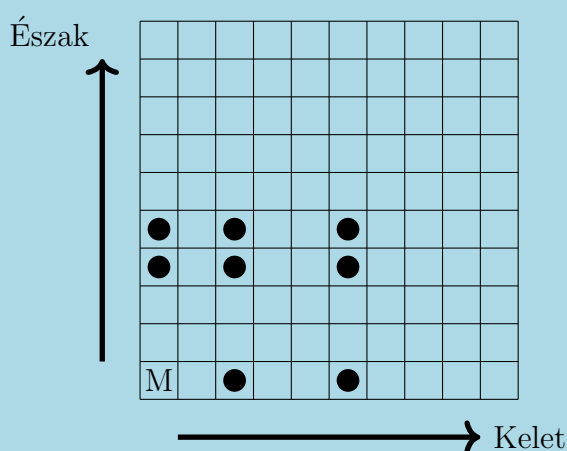
A hét legkisebb lehetséges téglatest térfogatának összege $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 = 33$.

Ez több, mint a kocka térfogata (27). 

7. osztály

Országos döntő


1. A Százmezős Pagony az ábra szerint fel van osztva 10×10 mezőre. A délnyugati sarokmezőben lakik egy varázsmánó, a többi 99 mezőben egy-egy kincs van, melyek közül a manó szeretne minél többet összegyűjteni. Délelőttönként nyugatról fúj a szél, ilyenkor léghajójával 2 vagy 5 mezővel keletebbre tud leszállni. Délutánonként déli irányból fúj a szél, ha ilyenkor száll fel, akkor léghajójával 3 vagy 4 mezővel északabbra tud eljutni. Nem kell mindkét napszakban felszállnia. (Az ábrán bejelöltük azt a nyolc mezőt, ahová egy nap alatt el tud jutni). A varázsmánó léghajóval nyugati vagy déli irányba nem tud utazni, de ha csettint egyet, akkor egyből visszakerül (a léghajójával együtt) a bal alsó mezőbe. Legfeljebb hány kincset tud a manó így összegyűjteni?



Mivel a manó dönthet úgy, hogy csak délelőtt vagy csak délután száll fel, ezért elég külön-külön megnézni, hogy melyik o oszlopokba, és melyik s sorokba tud eljutni. Ha ezt már tudjuk, akkor ezekből alkotható összes rendezett (o, s) pár olyan mezőt ír le, ahova a manó el tud jutni, és csak ezek a mezők érhetőek el.

Az elérhető oszlopok sorszáma (balról jobbra számozva) $1 + a \cdot 2 + b \cdot 5$ alakú, ahol a és b nemnegatív egész. a legfeljebb 4, b legfeljebb 1. Az összes eset könnyen végignézhető, az elérhető oszlopok sorszáma: $\{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Az elérhető sorok sorszáma (alulról felfelé számozva) $1 + c \cdot 3 + d \cdot 4$ alakú, ahol $0 \leq c \leq 3$ és $0 \leq d \leq 2$ egészek. Az eseteket végignézve kapjuk, hogy az elérhető sorok sorszáma: $\{1, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

A bevezető megjegyzés alapján a 8 elérhető oszlop és a 7 elérhető sor összesen $8 \cdot 7 = 56$ elérhető mezőt jelent, de a bal alsó mező nem rejt kincset, ezért a manó összesen 55 kincset tud összegyűjteni. 

2. Egy háromszög egy magasságvonalát *nagyranőttnek* nevezzük, ha legalább 10 cm hosszú. Mi egy olyan háromszög területének legkisebb lehetséges értéke, amelynek két nagyranőtt magasságvonala is van?

Legyen a két nagyranőtt magasságvonal hossza $m_a \geq 10$ és $m_b \geq 10$.

Egy tetszőleges háromszögben $b \geq m_a$, $c \geq m_a$, $a \geq m_b$, $c \geq m_b$. Ez abból következik, hogy egy adott csúcshoz legközelebb eső pontja a vele szemközt lévő oldalegyenesnek az, amellyel az őket összekötő szakasz merőleges az egyenesre.

$$\text{Innen } a \geq m_b \geq 10 \Rightarrow T = \frac{a \cdot m_a}{2} \geq \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

Az alsó becslés éles, megvalósul abban a derékszögű háromszögben, amelynek mindkét befogója 10 cm hosszú.

Tehát a legkisebb lehetséges terület 50 cm^2 .



3. Egy órának három mutatója van (kis-, nagy- és másodpercmutató), amelyek folyamatosan járnak. Az órában lévő elem kezd lemerülni, ezért az óra lelassul, ha valamelyik mutatója emelkedik. Ha csak egy mutató emelkedik, akkor az óra az eredeti sebességének felével jár, ha két mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség negyedével jár, ha pedig mindhárom mutató emelkedik, akkor az eredeti sebesség nyolcadával jár az óra. (Egy mutató akkor emelkedik, ha a hatost már elhagyta, de a tizenkettest még nem érte el.) Kezdetben mindhárom mutató legfelül, a tizenkettesen áll. Legkorábban hány óra múlva áll elő újra ugyanez a helyzet?

Első megoldás. A másodpercmutatónak $60 \cdot 12 = 720$ kört kell megtennie, hogy a mutatók visszatérjenek eredeti helyzetükbe, mert 60 kör egy „órával” mozdítatja el a nagymutatót és ezt 12-szer kell megismételni. (Az idézőjeles „óra” itt a nagymutató által megtett egy teljes kört jelent.)

Azt fogjuk nézni, hogy a kismutató és a nagymutató helyzetétől függően hány másodperc alatt tesz meg egy kört a másodperc mutató. Felhasználjuk, hogy a másodpercmutató egy teljes köre alatt az nem változik, hogy a másik két mutató „felfele” vagy „lefele” mozog.

Amikor a nagymutató és a kismutató is lefele megy, akkor a másodpercmutató az első félkört lefelé teszi meg, tehát „valódi” időben, 30 mp alatt végez vele. A második félkörben felfele megy, ezért fele olyan gyors, így ehhez 60 mp kell. Így kapjuk összesen a 90 mp-es köridőt.

Ha nagymutató és a kismutató közül az egyik lefele, a másik felfele megy, akkor 180 mp alatt ér a másodpercmutató körbe. Ha pedig mindkét mutató felfele megy, akkor 360 mp.

Az hogy a nagy- és a kismutató lefele menjen, az 6 „órában” fordul elő, és minden „órának” az első 30 „percében”. Vagyis 180 körben fog mindkét mutató lefele menni. Ugyanígy kiszámolható, hogy 180 körben megy mindkét mutató felfelé. A maradék 360 körben az egyik mutató lefele, a másik felfele fog menni.

Foglaljuk táblázatba a különböző eseteket:

kismutató és nagymutató	körök száma	a másodpercmutató egy körének ideje
le, le	180	90 mp
fel, le	180	180 mp
le, fel	180	180 mp
fel, fel	180	360 mp

Összességében $180 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ másodperc telik el, amíg a mutatók visszatérnek eredeti helyzetükbe.

Ez $3 \cdot (90 + 180 + 180 + 360)$ perc, tehát $3 \cdot (\frac{3}{2} + 3 + 3 + 6) = 40,5$ óra.


Tehát 40 és fél óra után áll vissza az eredeti állapot.

Második megoldás. A mutatók egymáshoz képest ugyanúgy mozognak, mint egy pontosan járó óránál. Legközelebb akkor lesz mindhárom mutató a 12-esen, ha a kismutató egyszer körbeért. Ez háromszor annyi idő, mint amennyi alatt leér a 6-osig, hiszen a táv másik felén minden fele akkora sebességgel történik.

Ahhoz, hogy a kismutató leérjen a 6-oshoz, a nagymutatónak 6 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör háromszor annyi idő, mint amennyi alatt a nagymutató leér a 6-osig – a fentiekhez hasonlóan.

Ahhoz, hogy a nagymutató leérjen a 6-osig, a másodpercmutatónak 30 teljes kört kell megtennie. Egy ilyen kör $3 \cdot 30$ másodperc (a kis- és nagymutatók még lefelé haladnak).

Tehát a körbeéréshez szükséges idő $3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 30 \cdot 3 \cdot 30 = 145800$ másodperc, azaz 40,5 óra.

Megjegyzés. A feladat mélyén a következő észrevétel rejlik: mindegyik mutató a mozgása során az út egyik felét fele olyan lassan teszi meg, mint a másikat, így a mozgása másfélszer olyan hosszú ideig tart, mint normálisan. Mivel a mutatók mozgása egymástól „független”, és a mutatók egymást is lassítják, így ezek a másfélszeres szorzók összeszorzódnak, tehát a körbeéréshez szükséges idő az eredeti $1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 27/8$ -szorososa, ami végeredményként $12 \cdot 27/8 = 81/2 = 40,5$ órát ad. 


4. Öt különböző pozitív egész számot *ördögi ötösnek* nevezünk, ha igaz rájuk a következő tulajdonság: akárhogyan is választunk ki az öt szám közül kettőt, ezek szorzata mindig osztója a maradék három szám szorzatának. Adj meg egy ördögi ötöst úgy, hogy abban a legnagyobb szám a lehető legkisebb legyen!

Megoldásként elegendő egy jó ördögi ötöst megadni, nem kell szövegesen indokolnod, hogy tényleg ördögi ötöst alkotnak. Azonban javasoljuk, hogy magadnak alaposan ellenőrizd az oszthatósági feltétel teljesülését, mert csak valódi ördögi ötösre kaphatsz pontokat.

Minél kisebb az ördögi ötös legnagyobb száma, annál több pontot érhet a megoldásod. Nincs szükség annak indoklására, hogy a legnagyobb szám értéke tovább már nem csökkenthető.

Néhány lehetséges konstrukció:

- $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, legnagyobb szám: 256.
- $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, $3 \cdot 5 \cdot 7 = 135$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, legnagyobb szám: 210.
- $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 3^2 = 24$, $2^3 \cdot 3 = 36$, $2^3 \cdot 3^2 = 72$, $2^4 \cdot 3^2 = 144$, legnagyobb szám: 144.
- $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 5 = 20$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $3^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$, legnagyobb szám: 120.
- $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^4 = 16$, $2^3 \cdot 3 = 24$, $2^4 \cdot 3 = 48$, $2^5 \cdot 3 = 96$, legnagyobb szám: 96.

Ellenőrizhető, hogy az utolsó konstrukció lesz a legjobb konstrukció, erre a konstrukcióra járt a maximális pontszám. 

5. A főnök munkája során négy dossziét használ, melyeket A, B, C és D jelöl. A főnöknek van egy íróasztala, melynek egy fiókja van. A nap kezdetén a dossziék közül néhány a fiókban, néhány pedig az asztalon van egymáson. (Az íróasztalon és a fiókban a négy dosszién kívül nincs semmi.) A dossziékat csak a főnök titkárnője mozgathatja. Amikor a főnök kimondja valamelyik dosszié nevét, akkor a titkárnő a következőt teszi azzal a dossziéval:
- ha a dosszié nem legfelül van az íróasztalon vagy a fiókban van, akkor ezt a dossziét az íróasztalon legfelülre helyezi,
 - ha pedig a dosszié az íróasztalon legfelül van, akkor beteszi a dossziét a fiókba.

A főnök azt szereti, ha a nap végén mindegyik dosszié a fiókban van. Ehhez szeretne egy olyan betűsorozatot kitalálni, melyet végigmondva az összes dosszié a fiókba kerül, függetlenül attól, hogy kezdetben hogy voltak elrendezve a dossziék. Létezik-e ilyen betűsorozat?

Első megoldás. Az $ABAA$ sorozat beteszi A -t a fiókba. Ennek igazolásához kövessük végig, mi a helyzet az egyes utasítások után. Az első lépésben A vagy felülre vagy (ha már eleve ott volt) a fiókba került. A második lépés után biztos, hogy nem A van felül. Emiatt az utolsó két lépés előbb felülre, majd a fiókba teszi A -t.

Az előbb leírt „algorithmus” segítségével még B -t és C -t is be tudja a főnök tenni a fiókba:

$$ABAABCBBCCDCC$$

A 12 lépés után két lehetséges állapot van. Vagy minden dosszié a fiókba került vagy egyedül D van az asztalon (és így egyben legfelül).

A befejezés lehetséges például a következő parancsokkal:

$$ADDA$$

Itt először A felülre került, majd D felülre került, aztán D és A a fiókba.

Tehát létezik jó betűsorozat, például:

$$ABAABCBBCCDCCADDA$$

Második megoldás. Az $ABCDABCDDCBA$ sorozat megfelelő.

A második A után az A dosszié legfelül van az asztalon. Ha ugyanis az első A fiókba tette, akkor a második értelemszerűen felülre teszi. Ha viszont az első A után felülre került, akkor a következő lépés ráhelyez egy másikat (B -t), ami nem is kerülhet le róla (hiszen nem ismétlődik a következő A -ig), így a második A ismét felülre fogja helyezni.

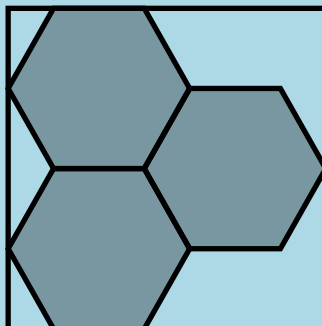
Ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy a második B után B , a második C után C , a második D után D lesz legfelül az asztalon. Tehát $ABCDABCD$ után minden dosszié az asztalon van, alulról felfelé A, B, C, D sorrendben. Innen a $DCBA$ sorozat mindent elpakol a fiókba.



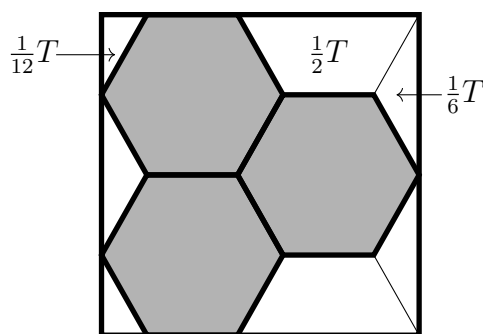
8. osztály

Országos döntő

1. Az ábrán látható módon három egyforma szabályos hatszöget rajzoltam egy téglalapba. Mekkora egy hatszög területe, ha a téglalap területe 80 cm^2 ?



Kifejezzük a téglalap területét a hatszög T területével. Ehhez osszuk fel a téglalapot az ábrán látható részekre. A három hatszögon kívül még háromféle részt kaptunk: két derékszögű háromszöget, három egyenlő szárú háromszöget és két húrtrapézt.



A húrtrapézról világos, hogy a hatszög területének a fele.

A derékszögű háromszög félszabályos, melyből kettőt összeillesztve a hosszabb befogójuknál egy szabályos háromszöget kapok, melynek oldalhossza megegyezik a szabályos hatszög oldalhosszával. Az világos, hogy egy szabályos hatszöget hat ilyen szabályos háromszögre lehet felbontani, tehát a szabályos háromszög területe a hatoda a hatszög területének, a félszabályos háromszög területe pedig a $1/12$ része.

Az egyenlő szárú háromszög felbontható két ilyen derékszögű háromszögre, annak a területe így $1/6$ része a hatszög területének.

Így végül a keresett terület:

$$80 = T \cdot \left(3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12} \right) = T \cdot 4\frac{2}{3} = T \cdot \frac{14}{3} \Rightarrow T = \frac{120}{7}$$



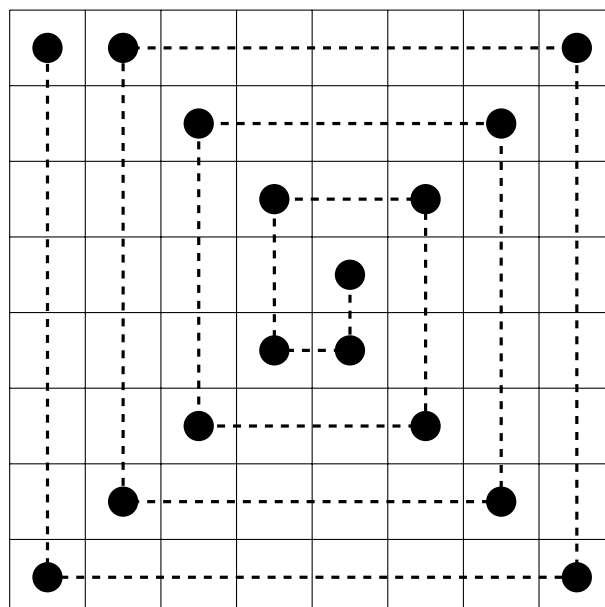
2. A sakktábla összes mezőjét szeretnénk egy bástyával bejárni, minél kevesebb lépéssel. Ehhez kezdetben a bástyával egy általunk választott mezőre, majd minden lépésben egy olyan mezőre léphetünk, amely az előző mezővel megegyező sorban vagy oszlopban van. Hány lépés kell az összes mező bejárásához? Egy mezőt bejártnak tekintünk, ha arra a bástyával ráléptünk vagy egy lépés során felette áthaladtunk.

Első megoldás. Ha minden sorban tesz legalább egy lépést a bástya, az legalább 8 vízszintes lépés. Köztük legalább hétszer sort kell váltani, ami legalább 7 függőleges lépés.

Ugyanígy, ha minden oszlopban tesz legalább egy lépést a bástya, akkor az legalább 8 függőleges, és köztük legalább 7 vízszintes lépés.

Ha lenne olyan sor és oszlop is, amelyben nem tesz lépést a bástya, akkor az ezek metszéspontjában lévő mezőre nem léphetne rá, és felette elhaladni sem tudna, ez tehát lehetetlen.

Így mindenképp kell legalább 15 lépés, ami elég is:



Második megoldás. 15 lépés elég (ld. előző megoldás).

Megmutatjuk, hogy ennél kevesebb lépés nem elég. Még akkor sem, ha több közvetlenül egymás után megtett vízszintes lépést egyetlen lépésnek számolunk (és hasonlóan a szomszédos függőleges lépéseket is összevonjuk).

Mostantól tehát feltehetjük, hogy mondjuk felváltva függőleges és vízszintes lépések követik egymást.

Jellemezzünk egy állást két nyolc hosszú listával. Az első listában szereplő számok azt írják le, hogy oszloponként hány olyan mező maradt amin / ami felett még nem jártunk. A második lista azt tartalmazza, hogy soronként hány olyan mező maradt amin / ami felett még nem jártunk.

A kezdő állapotban mindkét lista 8 darab nyolcast tartalmaz.

Egy függőleges lépés hatása a következő:

- Az első listában egyetlen szám tetszőleges pozitív egész értékkel csökken.

- A második listában minden szám legfeljebb eggyel csökken és legalább egy pontosan eggyel.

Egy vízszintes lépés hatása hasonló, csak a két lista szerepe felcserélődik. Akkor van vége a bejárásnak, ha mindkét lista csupa nullát tartalmaz. Tegyük fel, hogy függőleges lépéssel kezdünk, és kövessük, mit tartalmazhat az első lista.

- Az első lépés után legalább 7 érték legalább 8.
- A második (vízszintes) lépés után 7 érték legalább 7.
- A harmadik lépés után 6 érték legalább 7.
- A negyedik lépés után 6 érték legalább 6.
- Az ötödik lépés után 5 érték legalább 6.
- A hatodik lépés után 5 érték legalább 5.
- ...
- A tizenharmadik lépés után 1 érték legalább 2.
- A tizennegyedik lépés után 1 érték legalább 1.

Tehát 14 lépés nem elegendő.



3. Öt különböző pozitív egész számot *ördögi ötösnek* nevezünk, ha igaz rájuk a következő tulajdonság: akárhogy is választunk ki az öt szám közül kettőt, ezek szorzata mindig osztója a maradék három szám szorzatának. Adj meg egy ördögi ötöst úgy, hogy abban a legnagyobb szám a lehető legkisebb legyen!

Megoldásként elegendő egy jó ördögi ötöst megadni, nem kell szövegesen indokolnod, hogy tényleg ördögi ötöst alkotnak. Azonban javasoljuk, hogy magadnak alaposan ellenőrizd az oszthatósági feltétel teljesülését, mert csak valódi ördögi ötösre kaphatsz pontokat.

Minél kisebb az ördögi ötös legnagyobb száma, annál több pontot érhet a megoldásod. Nincs szükség annak indoklására, hogy a legnagyobb szám értéke tovább már nem csökkenthető.

Néhány lehetséges konstrukció:

- **1. konstrukció:** $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$
Legnagyobb szám: 256
- **2. konstrukció:** $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, $3 \cdot 5 \cdot 7 = 135$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$
Legnagyobb szám: 210
- **3. konstrukció:** $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 3^2 = 24$, $2^3 \cdot 3 = 36$, $2^3 \cdot 3^2 = 72$, $2^4 \cdot 3^2 = 144$
Legnagyobb szám: 144
- **4. konstrukció:** $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^2 \cdot 5 = 20$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $3^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$
Legnagyobb szám: 120
- **5. konstrukció:** $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^4 = 16$, $2^3 \cdot 3 = 24$, $2^4 \cdot 3 = 48$, $2^5 \cdot 3 = 96$
Legnagyobb szám: 96

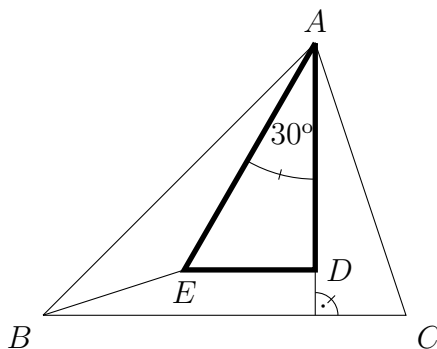
Ellenőrizhető, hogy az utolsó konstrukció lesz a legjobb konstrukció, erre a konstrukcióra járt a maximális pontszám.



4. Egy háromszög egy magasságvonalát *nagyranőttnek* nevezzük, ha legalább 10 cm hosszú. Mi egy olyan háromszög területének legkisebb lehetséges értéke, amelynek mindhárom magasságvonala nagyranőtt?

Első megoldás. A célunk annak megmutatása, hogy a háromszög valamelyik oldalának hossza legalább $20/\sqrt{3}$ cm. Ez azt jelenti, hogy a háromszög területe legalább $(10 \cdot 20/\sqrt{3})/2 = 100/\sqrt{3}$ cm² (hiszen mindegyik oldalhoz legalább 10 cm hosszú magasság tartozik), és ez meg is valósul annál a szabályos háromszögnél, melynek magassága 10 cm.

Tekintsük a háromszög legnagyobb szögét. Az ebből induló magasságvonal mindenképpen a háromszög belsejében halad, és ezt a szöget két részre vágja, így az így keletkező két szög közül az egyik nagysága legalább 30° .



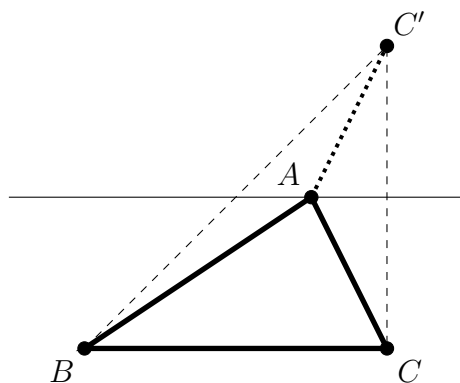
Vizsgáljuk meg a magasságvonal behúzása után létrejött két derékszögű háromszög közül azt, melyben az előbb említett, 30° -nál nem kisebb szög szerepel. Ennek a háromszögnek az egyik befogója (az eredeti háromszög magasságvonala) legalább 10 cm, és az ezen fekvő hegyesszög legalább 30° . Ekkor könnyen láthatóan az átfogója legalább olyan hosszú, mint annak a félszabályos háromszögnek az átfogója, melynek a hosszabbik befogója 10 cm, és ez éppen $20/\sqrt{3}$ cm (lásd ábra: a vizsgált derékszögű háromszögbe belerajzoltuk azt a félszabályos háromszöget, melynek hosszabb befogója 10 cm hosszúságú: AD hossza 10 cm, AE hossza $20/\sqrt{3}$ cm, és az ABE háromszögben E -nél tompaszög van, tehát AE a leghosszabb oldala).

Második megoldás. A válasz: $\frac{100}{\sqrt{3}}$ cm² – ez éppen egy olyan szabályos háromszög területe, amelynek mindhárom magasságvonala 10 cm hosszú.

Legyen ugyanis ABC egy olyan háromszög, amelynek mindhárom magasságvonala nagyranőtt. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $a \geq b \geq c$. Elegendő belátnunk, hogy $a \geq \frac{20}{\sqrt{3}}$ cm, hiszen ekkor a háromszög területe (cm²-ben mérve):

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot m_A \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot 10 = \frac{100\sqrt{3}}{3}.$$

Húzzunk egy párhuzamost az A csúcson keresztül az a oldal egyenesével. Tükrözzük erre a C pontot. $C'A = CA = b$, így BAC' egy $b + c$ hosszú töröttvonal B és C' között, tehát $BC' \leq b + c \leq 2a$.

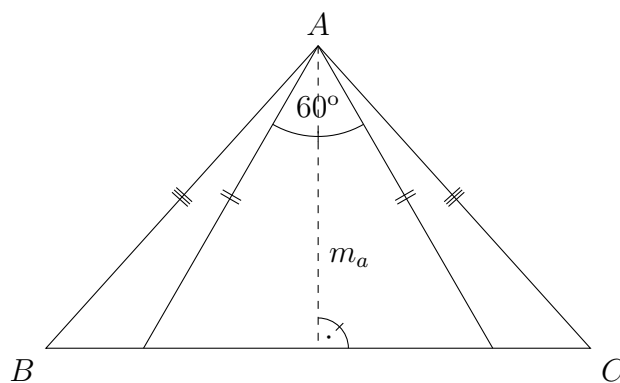


BCC' egy derékszögű háromszög, melyben BC befogó hossza a , CC' befogó hossza $2m_A$ míg a BC' átfogóról azt tudjuk, hogy legfeljebb $2a$ hosszú. Így a Pitagorasztétel szerint:

$$\begin{aligned} (2a)^2 &\geq BC'^2 = a^2 + (2m_A)^2 \\ 3a^2 &\geq 4m_A^2 \\ a &\geq \frac{2}{\sqrt{3}}m_A \geq \frac{20}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

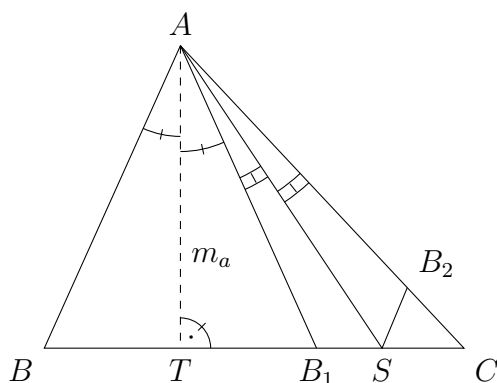
Harmadik megoldás. Legyen az ABC háromszögnek minden magasságvonala nagyra nőtt. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$, amiből $m_a \leq m_b \leq m_c$ is következik, továbbá az, hogy az A csúcsnál lévő belső szög legalább 60° -os.

Ha $b = c$, akkor az m_a magasság a b és a c oldallal is ugyanakkora, méghozzá legalább 30° -os szöget zár be, így az ABC háromszög teljes egészében tartalmaz egy olyan szabályos háromszöget, amelynek magassága m_a . Így $T_{ABC} \geq \frac{m_a^2}{\sqrt{3}} \geq \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ cm}^2$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az A csúcsnál lévő szög 60° -os, azaz az ABC háromszög szabályos, és $m_a = 10 \text{ cm}$.



A továbbiakban $b > c$. A célunk most annak a megmutatása, hogy a háromszögünkbe beledarabolható egy olyan egyenlőszárú háromszög, melynek magassága megegyezik m_a -val, szárszöge pedig az A csúcsnál lévő szöggel.

Legyen az m_a magasság talppontja T . Tükrözzük a B csúcsot az AT egyenesre, a kapott B_1 pont a TC szakasz belső pontja lesz, hiszen $b > c$ miatt $TC > TB$. Húzzuk meg a B_1AC szögfelezőjét, ennek B_1C -vel való metszéspontja legyen S . Tükrözzük a B_1 pontot az AS egyenesre, az így kapott B_2 pont az AC oldal belső pontja.



A tükrözések miatt az ABT és AB_1T háromszögek, valamint az AB_1S és AB_2S háromszögek egybevágóak, így az AB_2S háromszöget az ABT háromszög mellé illesztve megkapjuk a kívánt egyenlőszárú háromszöget, és így a feladatot visszavezettük az előző ($b = c$) esetre.

Ezzel beláttuk, hogy az ABC háromszög területének legkisebb értéke $\frac{100}{\sqrt{3}}$ cm², amelyet a 10 cm magasságú szabályos háromszög esetén (és csakis akkor) vesz fel.

Megjegyzés. A 3. megoldás számolással is befejezhető:

$$T_{ATS} = T_{AB_1T} + T_{AB_1S} = \frac{T_{ABB_1}}{2} + \frac{T_{AB_1SB_2}}{2} = \frac{T_{ABSB_2}}{2} < \frac{T_{ABC}}{2}.$$

A TAS szög fele akkora, mint a BAC szög, így legalább 30°-os. Ezért a TAS háromszög teljes egészében tartalmazza azt a TAS' háromszöget, ahol S' a TS szakasz pontja és $TAS' \sphericalangle = 30^\circ$. Így

$$T_{TAS'} = \frac{m_a^2}{2\sqrt{3}} \leq T_{TAS} < \frac{T_{ABC}}{2},$$

azaz $T_{ABC} > \frac{m_a^2}{\sqrt{3}} \geq \frac{100}{\sqrt{3}}$ cm².



5. A főnök munkája során négy dossziét használ, melyeket A, B, C és D jelöl. A főnöknek van egy íróasztala, melynek egy fiókja van. A nap kezdetén a dossziék közül néhány a fiókban, néhány pedig az asztalon van egymáson. (Az íróasztalon és a fiókban a négy dosszién kívül nincs semmi.) A dossziékat csak a főnök titkárnője mozgathatja. Amikor a főnök kimondja valamelyik dosszié nevét, akkor a titkárnő a következőt teszi azzal a dossziével:
- ha a dosszié nem legfelül van az íróasztalon vagy a fiókban van, akkor ezt a dossziét az íróasztalon legfelülre helyezi,
 - ha pedig a dosszié az íróasztalon legfelül van, akkor beteszi a dossziét a fiókba.

A főnök azt szereti, ha a nap végén mindegyik dosszié a fiókban van. Ehhez szeretne egy olyan betűsorozatot kitalálni, melyet végigmondva az összes dosszié a fiókba kerül, függetlenül attól, hogy kezdetben hogy voltak elrendezve a dossziék. Létezik-e ilyen betűsorozat?

Első megoldás. Az $ABAA$ sorozat beteszi A -t a fiókba. Ennek igazolásához kövessük végig, mi a helyzet az egyes utasítások után. Az első lépésben A vagy felülre vagy (ha már eleve ott volt) a fiókba került. A második lépés után biztos, hogy nem A van felül. Emiatt az utolsó két lépés előbb felülre, majd a fiókba teszi A -t.

Az előbb leírt „algorithmus” segítségével még B -t és C -t is be tudja a főnök tenni a fiókba:

$$ABAABCBBCCDCC$$

A 12 lépés után két lehetséges állapot van. Vagy minden dosszié a fiókba került vagy egyedül D van az asztalon (és így egyben legfelül).

A befejezés lehetséges például a következő parancsokkal:

$$ADDA$$

Itt először A felülre került, majd D felülre került, aztán D és A a fiókba.

Tehát létezik jó betűsorozat, például:

$$ABAABCBBCCDCCADDA$$

Második megoldás. Az $ABCDABCDDCBA$ sorozat megfelelő.

A második A után az A dosszié legfelül van az asztalon. Ha ugyanis az első A fiókba tette, akkor a második értelemszerűen felülre teszi. Ha viszont az első A után felülre került, akkor a következő lépés ráhelyez egy másikat (B -t), ami nem is kerülhet le róla (hiszen nem ismétlődik a következő A -ig), így a második A ismét felülre fogja helyezni.

Ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy a második B után B , a második C után C , a második D után D lesz legfelül az asztalon. Tehát $ABCDABCD$ után minden dosszié az asztalon van, alulról felfelé A, B, C, D sorrendben. Innen a $DCBA$ sorozat mindent elpakol a fiókba.



Feladatok

5. osztály

Megyei forduló

1. Tölts ki egy 4×4 -es táblázatot 1-es és 2-es számjegyekkel úgy, hogy a balról jobbra és fentről lefele kiolvasható négyjegyű számok között a lehető legtöbb különböző legyen.

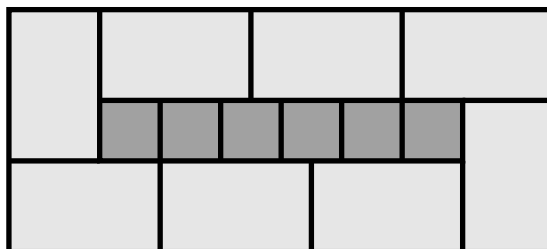
1	2	1	1
2	1	2	2
2	2	1	2
1	2	2	1

Például, az ábrán látható kitöltésből öt különböző négyjegyű szám olvasható ki: 1211, 1212, 1221, 2122, 2212.

A megoldás leírásakor elegendő egy kitöltött táblázatot megadni és felsorolni az ebből kiolvasható négyjegyű számokat. Nem kell indokolni, hogy más kitöltésből nem lehet ennél többféle négyjegyű számot kiolvasni.



2. Nyolc egyforma téglalapról és hat egyforma négyzetből egy nagy téglalapot építettem, az ábrán látható elrendezésben.



Mekkora a nagy téglalap területe, ha a négyzetek területe egyenként 4 cm^2 ?



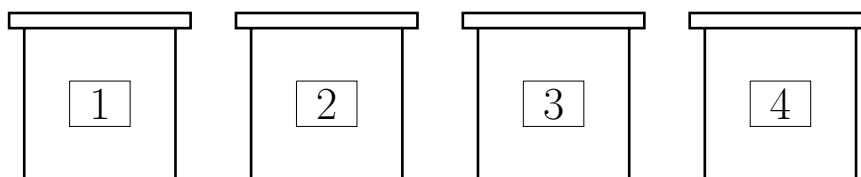
3. a) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni kettő darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és három darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is?
b) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni három darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és négy darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is?
Megengedett, hogy egy szorzatban többször szerepeljen ugyanaz a szorzótényező.



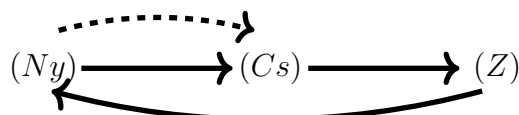
4. Anna, Béla, Csaba és Dóra között kisorsoltak egy-egy csokival töltött dobozt. A dobozok 1-től 4-ig vannak megszámozva, és az egyik dobozban 1, a másikban 2, a harmadikban 3 és a negyedikben 4 tábla csoki van. Miután a gyerekek megtudták, hogy ki melyik dobozt kapta és benne hány tábla csoki volt, a következő igaz kijelentéseket tették:

- Anna: Dóra eggyel több tábla csokit kapott, mint én.
- Béla: Anna eggyel kisebb sorszámú dobozt kapott, mint én.
- Csaba: Anna és Béla összesen annyi tábla csokit kaptak, mint én.
- Dóra: Egyik dobozban sem volt ugyanannyi csoki, mint ahányas számot a dobozra írtak.

Ki melyik dobozt kapta, és melyik dobozban hány tábla csoki volt?



5. Van egy autóm, amely központi zárral van felszerve. Ez háromféle állapotban lehet: (Z) állapotban zárva, (Ny) állapotban nyitva van az összes zár; míg (Cs) állapotban a csomagtartó nyitható, de az utastér nem. A zárhoz távirányító is tartozik, melyen egyetlen gomb van. Ennek megnyomásával a központi zár (Ny) állapotból (Cs) -be, (Cs) -ből (Z) -be míg (Z) -ből (Ny) -be kapcsol. Továbbá, ha a zár (Ny) állásban van és egy teljes percig nem történik gombnyomás, akkor a központi zár automatikusan (Cs) állásba kapcsolja magát.



Sajnos nem emlékszem, hogy bezártam-e az autót, amikor a ház előtt hagytam. Nincs kedvem visszamenni a kocsához, de szerencsére a távirányító az ablakból is működik. Hogyan tudom elérni a lehető legkevesebb gombnyomással, hogy a központi zár biztosan (Z) állapotba kerüljön?

Az autó kezdetben bármelyik állapotban lehet és az ablakból nézve nem lehet megkülönböztetni az állapotokat.



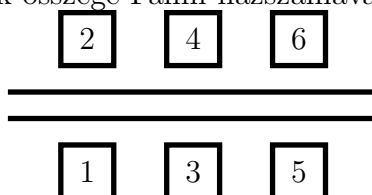
6. osztály

Megyei forduló

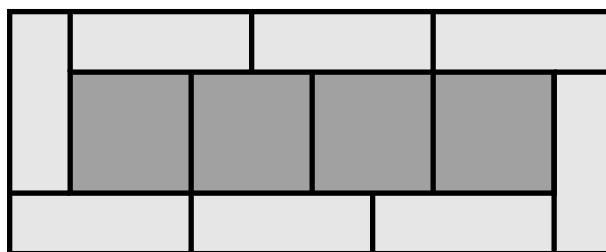
1. Egy utca két oldalán hat ház áll, melyek az ábrán látható módon meg vannak 1-től 6-ig számozva. A hat házban lakik: Anna, Béla, Csaba, Dóra, Endre, Fanni. A következő állításokat tudjuk róluk:

- Mindenki különböző házban lakik.
- Minden fiúval szemben egy lány lakik.
- Anna és Endre házszaainak összege Dóra házszaainal egyenlő.
- Dóra és Béla házszaainak összege Fanni házszaainal egyenlő.

Ki melyik házban lakik?



2. Nyolc egyforma téglalapról és négy egyforma négyzetből egy nagy téglalapot építettem, az ábrán látható elrendezésben.



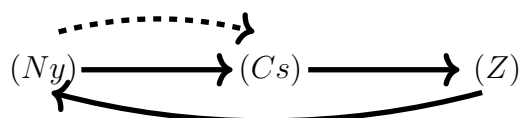
Tudjuk, hogy a nagy téglalap kerülete 42 cm. Határozd meg a nagy téglalap területét.



3. a) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni három különböző háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és négy különböző háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is?
- b) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni három különböző négyjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és négy különböző négyjegyű pozitív egész szám szorzataként is?



4. Van egy autóm, amely központi zárral van felszerve. Ez háromféle állapotban lehet: (Z) állapotban zárva, (Ny) állapotban nyitva van az összes zár; míg (Cs) állapotban a csomagtartó nyitható, de az utastér nem. A zárhoz távirányító is tartozik, melyen egyetlen gomb van. Ennek megnyomásával a központi zár (Ny) állapotból (Cs) -be, (Cs) -ből (Z) -be míg (Z) -ből (Ny) -be kapcsol. Továbbá, ha a zár (Ny) állásban van és egy teljes percig nem történik gombnyomás, akkor a központi zár automatikusan (Cs) állásba kapcsolja magát.



Sajnos nem emlékszem, hogy bezártam-e az autót, amikor a ház előtt hagytam. Nincs kedvem visszamenni a kocsihoz, de szerencsére a távirányító az ablakból is működik. Hogyan tudom elérni a lehető legkevesebb gombnyomással, hogy a központi zár biztosan (Z) állapotba kerüljön?

Az autó kezdetben bármelyik állapotban lehet és az ablakból nézve nem lehet megkülönböztetni az állapotokat.

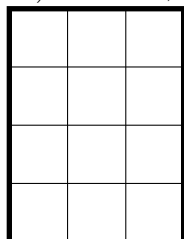


5. Egy robot lépked egy táblázat mezőin. A lépései felváltva a következők:

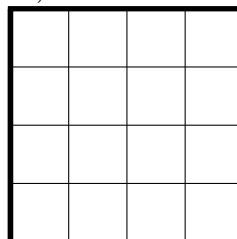
- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel oldalszomszédos
- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel csúcscszomszédos, de nem oldalszomszédos

A robot szeretne egy olyan körsétát tenni a táblázaton, amely a táblázat összes mezőjét pontosan egyszer tartalmazza, és végül visszalép a kiindulási mezőre. Meg tudja-e tenni a robot, ha a táblázat

a) 3×4 -es,



b) 4×4 -es?



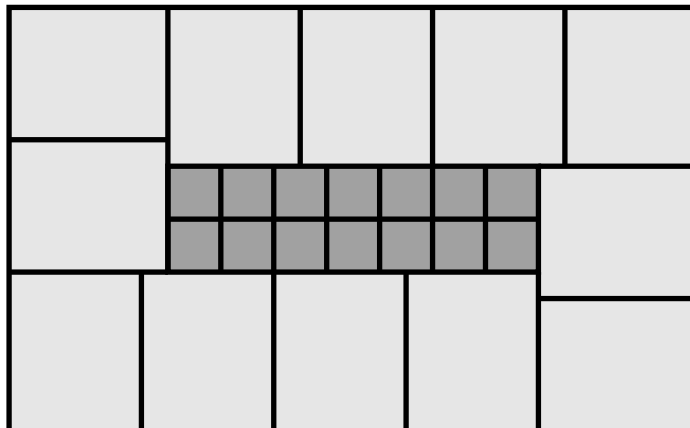
A robot tetszőleges mezőn kezdheti a sétát, és a kezdőlépés típusát is megválaszthatja.



7. osztály

Megyei forduló

1. 12 egyforma téglalapról és 14 egyforma négyzetből egy nagy téglalapot építettem, az ábrán látható elrendezésben.



Milyen hosszú a kis négyzetek oldala, ha a nagy téglalap kerülete 840 cm?



2. Miki, Niki és Viki közt 10 egyforma szelet csokit osztunk ki. A kiosztás után mindenki mondott három állítást, melyből kettő igaz, egy pedig hamis volt.

- Miki: „Niki és Viki is több csokit kapott, mint én. Niki 3 csokit kapott. Szeretem a csokit.”
- Niki: „Nem kapott senki se kevesebb csokit, mint én. Nem kapott senki se több csokit, mint én. Mindenki kapott legalább 1 szelet csokit.”
- Viki: „Én kettővel kevesebb csokit kaptam, mint Niki. Mindenki különböző számú csokit kapott. Miki 3 csokit kapott.”

Ki hány szelet csokit kapott?



3. Határozd meg az alábbi egyenlet összes megoldását a pozitív egész számok körében:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 4.$$



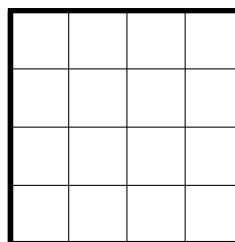
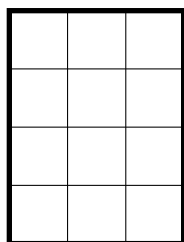
4. Egy robot lépked egy táblázat mezőin. A lépései felváltva a következők:

- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel oldalszomszédos
- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel csúcscszomszédos, de nem oldalszomszédos

A robot szeretne egy olyan sétát tenni a táblázaton, amely a táblázat összes mezőjét pontosan egyszer tartalmazza. Meg tudja-e tenni a robot, ha a táblázat

a) 3×4 -es,

b) 4×4 -es?



A robot tetszőleges mezőn kezdheti a sétát, és a kezdőlépés típusát is megválaszthatja. Nem szükséges a séta végén a kezdőmezőre visszaélnie.



5. Pirossal megjelöltük az $ABCDEF$ szabályos hatszög csúcsait.

Hány olyan háromszög van a síkon, amelyre teljesül, hogy mind a hat piros ponton átmegy a háromszög valamelyik oldalegyenese?

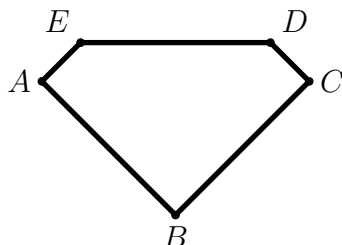


8. osztály

Megyei forduló

1. Az ábrán látható ötszögnek A -nál, B -nél és C -nél derékszöge van, a maradék két szöge pedig 135° -os. Tudjuk továbbá, hogy $AB = BC = DE = 12$ egység. Határozd meg az ötszög területét.

Teljes pontszámhoz a válasz legegyszerűbb alakját kell megadnod.



2. Határozd meg az alábbi egyenlet összes megoldását a pozitív egész számok körében:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 4.$$

3. Pirossal megjelöltük az $ABCDEF$ szabályos hatszög csúcsait.

Hány olyan háromszög van a síkon, amelyre teljesül, hogy mind a hat piros ponton átmegy a háromszög valamelyik oldalegyenese?

4. Egy 4×4 -es táblázatot 1-es és 2-es számjegyekkel kitöltöttünk. A táblázatból balról jobbra, jobbról balra, fentről lefele és letről felfele is kiolvashatók négyjegyű számok.

Legfeljebb hány különböző lehet az így kiolvasható 16 db négyjegyű szám között?

1	2	1	1
2	1	2	2
2	2	1	2
1	2	2	1

Például, az ábrán látható kitöltésből 8 különböző négyjegyű szám olvasható ki: 1121, 1211, 1212, 1221, 2122, 2121, 2212, 2211.

5. Bizonyítsd be, hogy 99 darab egész szám közül, melyek nem adnak csupa egyforma maradékot 100-zal osztva, ki lehet választani néhányat (esetleg csak egyet), melyek összege osztható 100-zal.

5. osztály

Országos döntő

1. Kornél az $1, 2, 3, \dots, 21$ számok közül bekarikázott néhányat úgy, hogy ne legyen két szomszédos szám bekarikázva, de minden be nem karikázott számnak be legyen karikázva valamelyik szomszédja.

Hány számot karikázhatott be? Minden lehetséges értékre mutass példát!

Nem kell bizonyítani, hogy más érték nem lehet.



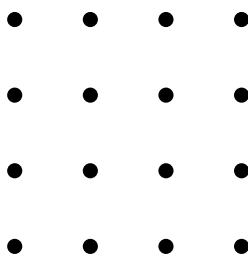
2. 10 ötödikes focizik, 5 az 5 ellen. Közülük öten járnak fociedzésre, öten nem. Ödön nem jár fociedzésre, de olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?



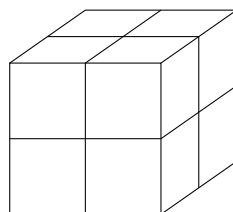
3. Rajzold meg az összes olyan különböző négyszöget, amelynek csúcsai kiválaszthatóak az alábbi 4×4 -es pontrácsból úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból egy-egy csúcsot választunk ki.

A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető négyszögeket nem tekintjük különbözőnek.

Nem kell bizonyítani, hogy az általad talált négyszögeken kívül nincs más.



4. Van 8 egységkockám, melyek mindegyike a következőképpen van kifestve: két lapja piros, két lapja kék és két lapja zöld, méghozzá úgy, hogy mindig a szemközti lapok azonos színűek. A 8 egységkockából összeépítettem egy $2 \times 2 \times 2$ -es kockát. A nagy kockát letettem az asztalra, így most három (páronként szomszédos) lapját látom. Ezeken összesen 5 piros, 4 kék és 3 zöld kiskockalap látszik. Hány piros kiskockalap lehet látható a másik három lapon összesen?



5. Egy iskola fekvőtámaszversenyt rendez. Az első fordulóban 8 gyerek áll fel egy körben. Minden fordulóban 1 perc alatt kell minél több fekvőtámaszt megcsinálni. Aki mindkét szomszédjánál kevesebb fekvőtámaszt csinál, annak a forduló végén ki kell állnia a körből. Viszont ha egy forduló végén két szomszédos gyerek egyikének sem kell kiállnia a körből, akkor a két gyerek közé egy újabb gyereket állítanak.

a) Hány gyerek állhat a körben a második fordulóban? Minden lehetséges esetre mutass példát, azaz add meg, hogy az első fordulóban hány fekvőtámaszt csinált a nyolc gyerek!

Azt nem kell indokolni, hogy más eset nem lehetséges.



b) Tudjuk, hogy a verseny egyik fordulójában 20 gyerek állt a körben.

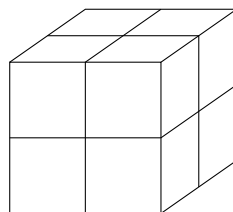
Lehetséges-e, hogy a rákövetkező fordulóban 36-an állnak majd a körben?





6. osztály

Országos döntő


- 12 hatodikos focizik, 6 a 6 ellen. Közülük öten járnak fociedzésre, heten nem. Hanna nem jár fociedzésre, de olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van? 
- Megadható-e 6 egyenes a síkon úgy, hogy semelyik három ne menjen át egy ponton, és a metszéspontok száma pontosan 11 legyen? 
- Van 8 egységkockám, melyek mindegyike a következőképpen van kifestve: két lapja piros, két lapja kék és két lapja zöld, még hozzá úgy, hogy mindig a szemközti lapok azonos színűek. A 8 egységkockából összeépítettem egy $2 \times 2 \times 2$ -es kockát. A nagy kockát letettem az asztalra, így most három (páronként szomszédos) lapját látom. Ezeken összesen 5 piros, 4 kék és 3 zöld kiskockalap látszik. Hány piros kiskockalap lehet látható a másik három lapon összesen?



- 
- Karolina bekarikázott az $1, 2, 3, 4, \dots, 20$ számok közül 11-et úgy, hogy ne legyen köztük kettő, amelyek közül az egyik kétszerese lenne a másiknak. Lujza ránézett a bekarikázott számokra, és megállapította: „Akármelyiket is karikáznám be a maradék 9 szám közül, már lenne két bekarikázott szám, amelyek közül az egyik kétszerese a másiknak.”
 - Bekarikázhatta-e Karolina az 1-et?
 - Bekarikázhatta-e Karolina a 20-at?
 - Adj meg egy olyan hétjegyű számot, melynek értéke megegyezik, ha a számjegyeit növekvő sorrendbe állítjuk!
 - Adj meg minél többféle 11-jegyű számot, melynek értéke megegyezik, ha a számjegyeit növekvő sorrendbe állítjuk!






A 0 számjegy egyik esetben sem használható.

Elegendő a számokat megadni, indoklást nem kérünk.



7. osztály

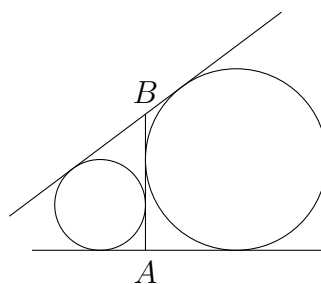
Országos döntő

1. 14 hetedikes focizik, 7 a 7 ellen. Közülük heten járnak fociedzésre, heten nem. Henrik jár fociedzésre, és olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában (vele együtt) többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van? 
2. Megadható-e 7 egyenes a síkon úgy, hogy semelyik három ne menjen át egy ponton, és a metszéspontok száma pontosan 16 legyen? 
3. Annának van 16 doboza négy színben (sárga, piros, kék, zöld) és méretben (kicsi, közepes, nagy, óriás). Ezeket négyesével egymásba pakolja úgy, hogy minden négyes csoportban minden színből és méretből pontosan egy szerepeljen. Miután minden dobozt becsukott, megérkezünk, és szeretnénk megtudni, hogy a négy óriás doboz közül melyik tartalmazza a kicsi sárga dobozt. Állapítsd meg minél kevesebb doboz kinyitásával, hogy melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz!
Ahhoz, hogy egy dobozt kinyithass, mindegyik nála nagyobb, őt tartalmazó dobozt ki kell nyitnod. A kicsi sárga dobozt tartalmazó dobozt nem muszáj ténylegesen kinyitni. Nem kell indokolni, hogy az általad talált megoldás a lehető legkevesebb kinyitásból áll. 
4. Bergengóciában kétféle fizetőeszköz van: garas és tallér. A bergengóc nemzeti bank minden reggel kiírja a két fizetőeszköz közti váltás aznapi arányát (pl: 7 garas = 3 tallér). Andrásnak 1100 garasa és 400 tallérja, Bélának 200 garasa és 1700 tallérja, Csabának 800 garasa és 900 tallérja van.
 - a) Bizonyítsd be, hogy a bank kiírhat olyan váltási arányt, amelynél Csaba vagyona értékesebb Andrásénál és Béléénál is.
 - b) Csaba a húgának adott 100 tallért, András és Béla vagyona nem változott. Kiírhat-e most a bank olyan váltási arányt, amelynél hármuk közül még mindig Csaba vagyona a legértékesebb? 
5. Az 1, 2, 3, . . . , 32 számok közül szeretnék néhányat bekarikázni úgy, hogy egyszerre teljesüljön a következő két feltétel:
 - (i) nincs a bekarikázott számok közt kettő, melyek közül az egyik 2-szerese a másiknak.
 - (ii) nem tudok újabb számot bekarikázni úgy, hogy ne legyen a bekarikázott számok közt kettő, amelyek közül az egyik 2-szerese a másiknak.
 Hányféleképpen tehetem ezt meg? 

8. osztály

Országos döntő

1. 16 nyolcadikos focizik, 8 a 8 ellen. Közülük heten járnak fociedzésre, kilencen nem. Nóri jár fociedzésre, és olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában (vele együtt) többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van? →
2. Annának van 16 doboza négy színben (sárga, piros, kék, zöld) és méretben (kicsi, közepes, nagy, óriás). Ezeket négyesével egymásba pakolja úgy, hogy minden négyes csoportban minden színből és méretből pontosan egy szerepeljen. Miután minden dobozt becsukott, megérkezünk, és szeretnénk megtudni, hogy a négy óriás doboz közül melyik tartalmazza a kicsi sárga dobozt. Állapítsd meg minél kevesebb doboz kinyitásával, hogy melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz!
Ahhoz, hogy egy dobozt kinyithass, mindegyik nála nagyobb, őt tartalmazó dobozt ki kell nyitnod. A kicsi sárga dobozt tartalmazó dobozt nem muszáj ténylegesen kinyitni. Nem kell indokolni, hogy az általad talált megoldás a lehető legkevesebb kinyitásból áll. →
3. Bergengóciában kétféle fizetőeszköz van: garas és tallér. A bergengóc nemzeti bank minden reggel kiírja a két fizetőeszköz közti váltás aznapi arányát (pl: 7 garas = 3 tallér). Andrásnak 1100 garasa és 400 tallérja, Bélának 200 garasa és 1700 tallérja, Csabának 800 garasa és 900 tallérja van.
- a) Bizonyítsd be, hogy a bank kiírhat olyan váltási arányt, amelynél Csaba vagyona értékesebb Andrásénál és Béláénál is.
- b) Csaba a húgának adott 100 tallért, András és Béla vagyona nem változott. Kiírhat-e most a bank olyan váltási arányt, amelynél hármuk közül még mindig Csaba vagyona a legértékesebb? →
4. Két kör érint két egyenest és a két egyenest összekötő AB szakaszt. Az AB szakasz merőleges az A pontot tartalmazó egyenesre. Bizonyítsd be, hogy a két kör sugarának összege egyenlő az AB szakasz hosszával! →



5. Egy iskola fekvőtámaszversenyt rendez. Az első fordulóban 8 gyerek áll fel egy körben. Minden fordulóban 1 perc alatt kell minél több fekvőtámaszt megcsinálni. Aki mindkét szomszédjánál kevesebb fekvőtámaszt csinál, annak a forduló végén ki kell állnia a körből. Viszont ha egy forduló végén két szomszédos gyerek egyikének sem kell kiállnia a körből, akkor a két gyerek közé egy újabb gyereket állítanak. A versenynek vége van, ha egy forduló után legfeljebb 3 gyerek áll a körben.

Lehet-e olyan forduló a verseny folyamán, amelyben pontosan

- (a) 11 (b) 12

gyerek áll a körben? →

Megoldások

5. osztály

Megyei forduló

1. Tölts ki egy 4×4 -es táblázatot 1-es és 2-es számjegyekkel úgy, hogy a balról jobbra és fentről lefele kiolvasható négyjegyű számok között a lehető legtöbb különböző legyen.

1	2	1	1
2	1	2	2
2	2	1	2
1	2	2	1

Például, az ábrán látható kitöltésből öt különböző négyjegyű szám olvasható ki: 1211, 1212, 1221, 2122, 2212.

A megoldás leírásakor elegendő egy kitöltött táblázatot megadni és felsorolni az ebből kiolvasható négyjegyű számokat. Nem kell indokolnod, hogy más kitöltésből nem lehet ennél többféle négyjegyű számot kiolvasni.

Nyolc különböző négyjegyű szám elérhető, például az alábbi kitöltéssel:

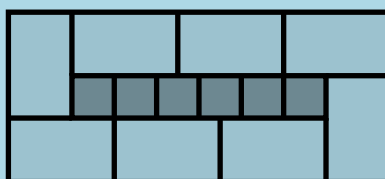
1	1	1	1
2	1	2	2
2	2	1	2
2	2	2	1

Itt a kiolvasható négyjegyű számok: 1111, 1122, 1212, 1221, 1222, 2122, 2212, 2221.

Több nyilván nem lehet, hiszen 4 sor és 4 oszlop van.



2. Nyolc egyforma téglalapról és hat egyforma négyzetből egy nagy téglalapot építettem, az ábrán látható elrendezésben.



Mekkora a nagy téglalap területe, ha a négyzetek területe egyenként 4 cm^2 ?

Mivel a négyzetek területe egyenként 4 cm^2 , ezért oldalhosszuk 2 cm .

Az ábrán látszik, hogy öt ilyen négyzetoldal éppen olyan hosszú, mint a külső téglalapok hosszabbik oldalának kétszerese. Ezért a téglalapok hosszabbik oldala 5 cm .

Az is világos az ábráról, hogy a téglalapok rövidebb oldala éppen egy négyzetoldallal, azaz 2 cm -rel rövidebb a hosszabbiknál. Tehát a rövidebb oldal hossza 3 cm .

Így a nagy téglalap hosszabb oldala $5 + 5 + 5 + 3 = 18 \text{ cm}$, a rövidebb oldala $5 + 3 = 8 \text{ cm}$, így a területe $18 \cdot 8 = 144 \text{ cm}^2$.



3. a) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni kettő darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és három darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is?
 b) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni három darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és négy darab háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is?
Megengedett, hogy egy szorzatban többször szerepeljen ugyanaz a szorzótényező.

a) Nincs. Egy háromjegyű szám legalább 100 és kevesebb, mint 1000. Ezért két háromjegyű szám szorzata legalább 10000 és kevesebb, mint $1000 \cdot 1000 = 1000000$ (egymillió).

Viszont három háromjegyű szám szorzata legalább $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1000000$, ami több, mint a legnagyobb lehetséges kéttényezős szorzat.

b) Van ilyen szám. Például, a 100000000 (százmillió) előáll négy darab háromjegyű és három darab háromjegyű szám szorzataként is:

$$100000000 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 400 \cdot 500 \cdot 500$$

Érdekességképp megjegyezzük, hogy olyan példa is van, amelyben a szorzótényezők csupa különböző számok, például:

$$100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 = 404 \cdot 510 \cdot 515,$$

hiszen

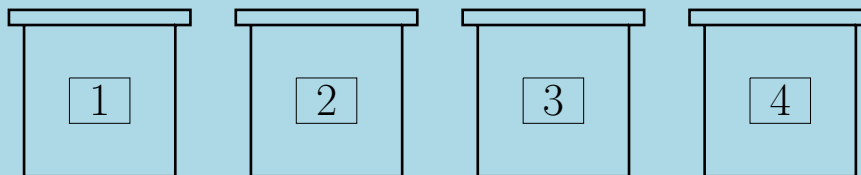
$$(4 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 = (4 \cdot 101) \cdot (5 \cdot 102) \cdot (5 \cdot 103).$$



4. Anna, Béla, Csaba és Dóra között kisorsoltak egy-egy csokival töltött dobozt. A dobozok 1-től 4-ig vannak megszámozva, és az egyik dobozban 1, a másikban 2, a harmadikban 3 és a negyedikben 4 tábla csoki van. Miután a gyerekek megtudták, hogy ki melyik dobozt kapta és benne hány tábla csoki volt, a következő igaz kijelentéseket tették:

- Anna: Dóra eggyel több tábla csokit kapott, mint én.
- Béla: Anna eggyel kisebb sorszámú dobozt kapott, mint én.
- Csaba: Anna és Béla összesen annyi tábla csokit kaptak, mint én.
- Dóra: Egyik dobozban sem volt ugyanannyi csoki, mint ahányas számot a dobozra írtak.

Ki melyik dobozt kapta, és melyik dobozban hány tábla csoki volt?



Anna és Béla összesen annyi csokit kapott, mint Csaba, aki ezért 3 vagy 4 tábla csokit kapott. Ha 3 tábla csokit kapott volna, akkor Dóra kapta volna a 4 táblát, de ekkor nem lenne igaz, hogy Dóra egy táblával többet kapott Annánál. Tehát Csaba 4 táblát kapott,

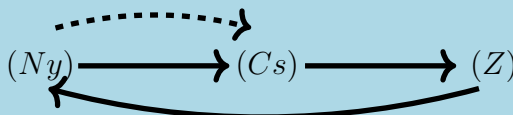
amely csak $1+3$ alakban áll elő összegként, így Dóra 2 táblát, Anna eggyel kevesebbet, tehát 1 táblát, Béla 3 táblát kapott.

A sorszámokat tekintve Anna és Béla két egymást követő számot kapott, amely nem lehet az 1 és 2 (hiszen ekkor Anna dobozának sorszáma megegyezne a csoki mennyiségével), sem a 2 és 3 (ekkor meg Béla sorszáma és csokimennyisége lenne egyenlő), tehát csak 3 és 4 lehet. Mivel Dóráé nem lehet 2-es sorszámú, ezért övé az 1-es, és Csabáé a 2-es. Ekkor valóban minden a négy kijelentés igaz.

	Sorszám	Csoki
Anna	3	1
Béla	4	3
Csaba	2	4
Dóra	1	2



5. Van egy autóm, amely központi zárral van felszerve. Ez háromféle állapotban lehet: (Z) állapotban zárva, (Ny) állapotban nyitva van az összes zár; míg (Cs) állapotban a csomagtartó nyitható, de az utastér nem. A zárhoz távirányító is tartozik, melyen egyetlen gomb van. Ennek megnyomásával a központi zár (Ny) állapotból (Cs) -be, (Cs) -ből (Z) -be míg (Z) -ből (Ny) -be kapcsol. Továbbá, ha a zár (Ny) állásban van és egy teljes percig nem történik gombnyomás, akkor a központi zár automatikusan (Cs) állásba kapcsolja magát.



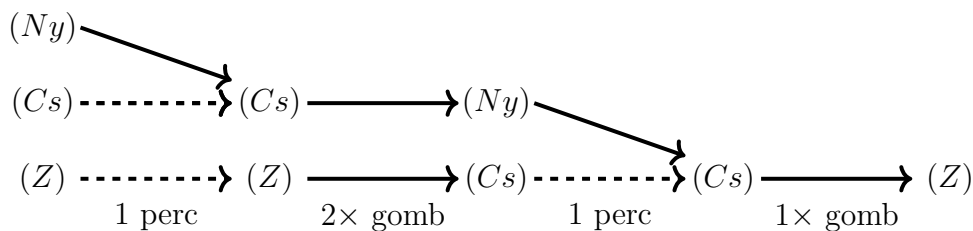
Sajnos nem emlékszem, hogy bezártam-e az autót, amikor a ház előtt hagytam. Nincs kedvem visszamenni a kocsihoz, de szerencsére a távirányító az ablakból is működik. Hogyan tudom elérni a lehető legkevesebb gombnyomással, hogy a központi zár biztosan (Z) állapotba kerüljön?

Az autó kezdetben bármelyik állapotban lehet és az ablakból nézve nem lehet megkülönböztetni az állapotokat.

3 gombnyomással garantálni lehet, hogy a zár (Z) állapotba kerül, amennyiben az első gombnyomás előtt, illetve a második és harmadik gombnyomás között is várunk egy-egy percet.

Miért biztos, hogy ennek a végén (Z) állapotban lesz a zár?

Miután az elején vártunk 1 percet, a zár biztosan (Cs) vagy (Z) állapotban lesz. Ezután kétszer egymás után megnyomjuk a gombot, ezzel a zár (Ny) vagy (Cs) állapotba kerül, tehát további 1 perc várakozás után biztosan (Cs) állapotba kerül. Ha az 1 perc már biztosan letelt, akkor megnyomjuk még egyszer a gombot, és így (Z) állapotban lesz a zár.



Tehát 3 gombnyomással megoldható a feladat. Most gondoljuk meg, hogy kevesebb gombnyomás miért nem elég. Erre kétféle gondolatmenetet is mutatunk.

Nyilván kell legalább egy gombnyomás, különben (Cs) állapotból nem tudnánk kimozdulni.

1. gondolatmenet. Ha csak egyszer nyomjuk meg a gombot, és kezdetben a zár (Z) állapotban volt, akkor a gombnyomás után (Ny) állapotba kerül, onnan 1 perc után (Cs) -be, de tovább már nem változik. Nem jutottunk el (Z) -be.

Ha kétszer nyomjuk meg a gombot, és a zár kezdetben (Cs) állapotban volt, akkor az első gombnyomás után (Z) állapotba kerül, a második gombnyomás után pedig (Ny) -be. Ezeket a változásokat nem befolyásolja az, hogy a gombnyomások között várakozunk-e. Innen 1 perc után automatikusan (Cs) -be fog kerülni, de tovább már nem változik. Tehát nem jutottunk el (Z) -be.

2. gondolatmenet. Nézzük meg, hogy a (Z) állapot esetén hány gombnyomás kell ahhoz, hogy újra (Z) állapotba kerüljön a kocsi. Könnyen látható, hogy 3-nál kevesebb gombnyomás esetén csak 0 vagy 2 nyomással oldható meg.

Ezzel szemben, ha kezdetben (Cs) állapotban voltunk, akkor csak pontosan 1 nyomással juthatunk a zárva állapotba. Vagyis nem lehetséges 3-nál kevesebb nyomásból biztosan bezárni az ajtót.



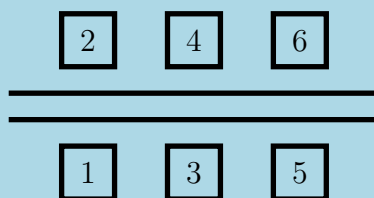
6. osztály

Megyei forduló

1. Egy utca két oldalán hat ház áll, melyek az ábrán látható módon meg vannak 1-től 6-ig számozva. A hat házban lakik: Anna, Béla, Csaba, Dóra, Endre, Fanni. A következő állításokat tudjuk róluk:

- Mindenki különböző házban lakik.
- Minden fiúval szemben egy lány lakik.
- Anna és Endre házsámainak összege Dóra házsámával egyenlő.
- Dóra és Béla házsámainak összege Fanni házsámával egyenlő.

Ki melyik házban lakik?



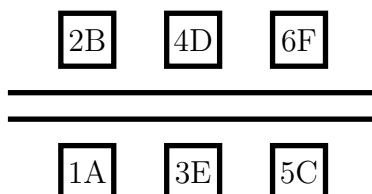
Ha lakók nevének kezdőbetűjével jelöljük a házsámukat, akkor $A + E = D$ és $D + B = F$, ahonnan $A + E + B = F$. Mivel a három legkisebb lehetséges házsám összege $1 + 2 + 3 = 6$, azaz a lehetséges legnagyobb házsám, ezért csak az lehet, hogy $F = 6$, továbbá A , E és B az 1, 2, 3 számú házban lakik, valamilyen sorrendben.

Anna nem lakhat 3-ban, mert akkor Béla és Endre egymással szemben lakna.

Béla sem lakhat a 3-ban, mert akkor $A + E = 3$ miatt Dórának is ott kellene laknia. Tehát a 3-as házban Endre lakik.

Béla az 1-esben sem lakhat, mert akkor $D + B = F$ miatt Dóra és Fanni egymással szemben laknának, így valamelyik fiúval szemben is fiúnak kellene.

Tehát Béla lakik a 2-esben, Anna az 1-esben, Dóra az $1+3 = 4$ -esben, és Csabának marad az 5-ös. Ekkor valamennyi állítás igaz.



2. Nyolc egyforma téglalapról és négy egyforma négyzetből egy nagy téglalapot építettem, az ábrán látható elrendezésben.



Tudjuk, hogy a nagy téglalap kerülete 42 cm. Határozd meg a nagy téglalap területét.

Legyen a nyolc egyforma téglalap rövidebb oldala r , hosszabb oldala h hosszúságú.

A h hosszúság éppen egy négyzetoldallal több az r -nél, így $2h$ két négyzetoldallal több $2r$ -nél, viszont $2h$ éppen három négyzetoldallal egyezik meg. Ezért $2r$ megegyezik egy négyzetoldallal.

A nagy téglalap oldalai $2r$ -rel hosszabbak, mint a belső, 4 négyzetből álló téglalap oldalai. Így a nagy téglalap hosszabbik oldala 5, rövidebbik oldala 2, kerülete 14 négyzetoldal.

Mivel a kerület 42 cm, így egy négyzetoldal 3 cm, a nagy téglalap oldalai $5 \cdot 3 = 15$ cm és $2 \cdot 3 = 6$ cm, területe $15 \cdot 6 = 90$ cm². ↑

3. a) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni három különböző háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és négy különböző háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is?
 b) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni három különböző négyjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és négy különböző négyjegyű pozitív egész szám szorzataként is?

a) Van. A három tényező megtalálásához „nagy” háromjegyű számokkal érdemes kísérletezni. Egy lehetséges megoldás:

$$900 \cdot 800 \cdot 700 = 100 \cdot 120 \cdot 140 \cdot 300 = 504000000.$$

De ezenkívül sok más megoldás is található. Egy lehetséges módszer a megoldás keresésére, ha megnézzük a számok prímtényezősbontását:

$$990 \cdot 960 \cdot 930 = (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 31$$

A fenti prímfelbontásban szereplő tényezőket fel lehet osztani négy csoportra úgy, hogy minden csoportban háromjegyű legyen a számok szorzata:

$$124 \cdot 125 \cdot 176 \cdot 324 = (2 \cdot 2 \cdot 31) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 31.$$

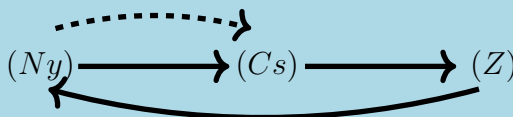
Tehát a $990 \cdot 960 \cdot 930 = 883872000$ szám megfelel a feltételnek.

b) Nincs. Három négyjegyű szám szorzata kevesebb, mint

$$10000 \cdot 10000 \cdot 10000 = 1000000000000 = 10^{12}.$$

Négy négyjegyű szám szorzata viszont legalább $1000^4 = 10^{12}$. ↑

4. Van egy autóm, amely központi zárral van felszerve. Ez háromféle állapotban lehet: (Z) állapotban zárva, (Ny) állapotban nyitva van az összes zár; míg (Cs) állapotban a csomagtartó nyitható, de az utastér nem. A zárhoz távirányító is tartozik, melyen egyetlen gomb van. Ennek megnyomásával a központi zár (Ny) állapotból (Cs) -be, (Cs) -ből (Z) -be míg (Z) -ből (Ny) -be kapcsol. Továbbá, ha a zár (Ny) állásban van és egy teljes percig nem történik gombnyomás, akkor a központi zár automatikusan (Cs) állásba kapcsolja magát.



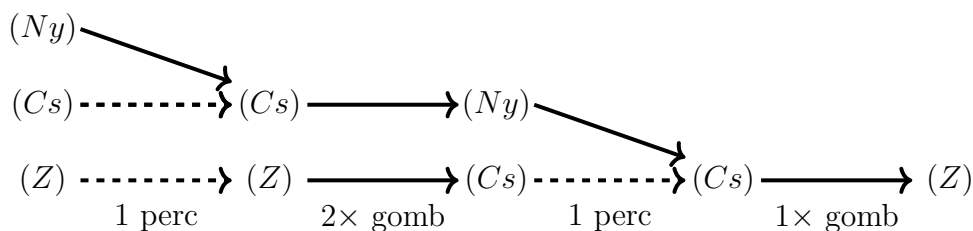
Sajnos nem emlékszem, hogy bezártam-e az autót, amikor a ház előtt hagytam. Nincs kedvem visszamenni a kocsihoz, de szerencsére a távirányító az ablakból is működik. Hogyan tudom elérni a lehető legkevesebb gombnyomással, hogy a központi zár biztosan (Z) állapotba kerüljön?

Az autó kezdetben bármelyik állapotban lehet és az ablakból nézve nem lehet megkülönböztetni az állapotokat.

3 gombnyomással garantálni lehet, hogy a zár (Z) állapotba kerül, amennyiben az első gombnyomás előtt, illetve a második és harmadik gombnyomás között is várunk egy-egy percet.

Miért biztos, hogy ennek a végén (Z) állapotban lesz a zár?

Miután az elején vártunk 1 percet, a zár biztosan (Cs) vagy (Z) állapotban lesz. Ezután kétszer egymás után megnyomjuk a gombot, ezzel a zár (Ny) vagy (Cs) állapotba kerül, tehát további 1 perc várakozás után biztosan (Cs) állapotba kerül. Ha az 1 perc már biztosan telelt, akkor megnyomjuk még egyszer a gombot, és így (Z) állapotban lesz a zár.




Tehát 3 gombnyomással megoldható a feladat. Most gondoljuk meg, hogy kevesebb gombnyomás miért nem elég. Erre kétféle gondolatmenetet is mutatunk.

Nyilván kell legalább egy gombnyomás, különben (Cs) állapotból nem tudnánk kimozdulni.

1. gondolatmenet. Ha csak egyszer nyomjuk meg a gombot, és kezdetben a zár (Z) állapotban volt, akkor a gombnyomás után (Ny) állapotba kerül, onnan 1 perc után (Cs) -be, de tovább már nem változik. Nem jutottunk el (Z) -be.

Ha kétszer nyomjuk meg a gombot, és a zár kezdetben (Cs) állapotban volt, akkor az első gombnyomás után (Z) állapotba kerül, a második gombnyomás után pedig (Ny) -be. Ezeket a változásokat nem befolyásolja az, hogy a gombnyomások között várakozunk-e. Innen 1 perc után automatikusan (Cs) -be fog kerülni, de tovább már nem változik. Tehát nem jutottunk el (Z) -be.

2. *gondolatmenet.* Nézzük meg, hogy a (Z) állapot esetén hány gombnyomás kell ahhoz, hogy újra (Z) állapotba kerüljön a kocsi. Könnyen látható, hogy 3-nál kevesebb gombnyomás esetén csak 0 vagy 2 nyomással oldható meg.

Ezzel szemben, ha kezdetben (Cs) állapotban voltunk, akkor csak pontosan 1 nyomással juthatunk a zárva állapotba. Vagyis nem lehetséges 3-nál kevesebb nyomásból biztosan bezárni az ajtót. 

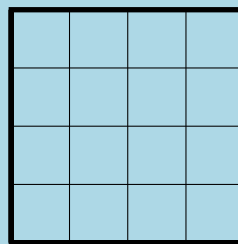
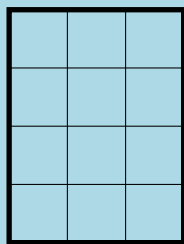
5. Egy robot lépked egy táblázat mezőin. A lépései felváltva a következők:

- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel oldalszomszédos
- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel csúcshomszédos, de nem oldalszomszédos

A robot szeretne egy olyan körsétát tenni a táblázaton, amely a táblázat összes mezőjét pontosan egyszer tartalmazza, és végül visszalép a kiindulási mezőre. Meg tudja-e tenni a robot, ha a táblázat

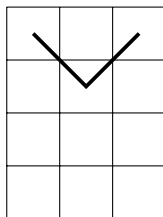
a) 3×4 -es,

b) 4×4 -es?



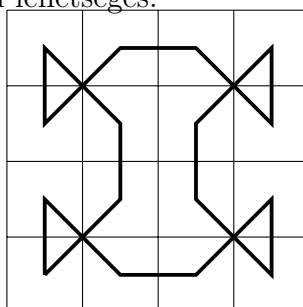
A robot tetszőleges mezőn kezdheti a sétát, és a kezdőlépés típusát is megválaszthatja.

a) Nem lehetséges. Vegyük az egyik sarkot és nézzük meg, hogy melyik az a két mező, amely a körsétán szomszédos ezzel a sarokkal. Mivel minden második lépés átlósan történt, ezért az egyik szomszédja az úton ettől a mezőtől átlósan helyezkedik el. Mivel egy saroknak csak egy átlós szomszédja van, ezért muszáj, hogy az a mező az úton szomszédja legyen a saroknak.



Ekkor a középső sor második mezőjéből két út is átlósan indul ki, vagyis lenne benne két egymás utáni átlós lépés, ami nem lehetséges.

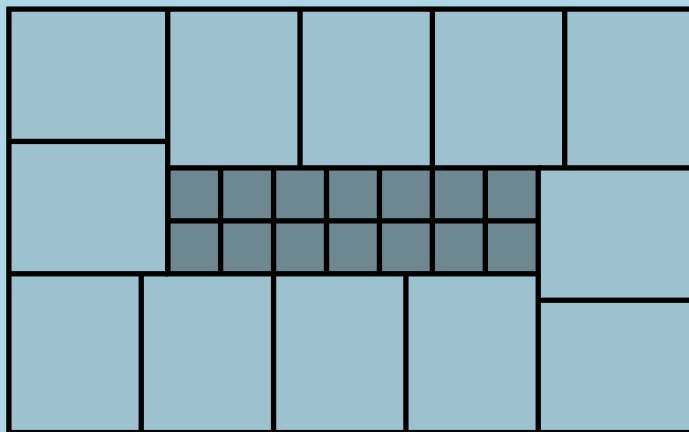
b) Lehetséges, például:



7. osztály

Megyei forduló

1. 12 egyforma téglalapról és 14 egyforma négyzetből egy nagy téglalapot építettem, az ábrán látható elrendezésben.



Milyen hosszú a kis négyzetek oldala, ha a nagy téglalap kerülete 840 cm?

Legyen a 12 egyforma téglalap rövidebb oldala r , hosszabb oldala h , a négyzetek oldalhossza n .

A nagy téglalap rövidebb oldala: $2r + h = 2h + 2n$. Innen $2r - 2n = h$.

A nagy téglalap hosszabb oldala: $4r + h = 2h + 7n$. Innen $4r - 7n = h$.

A fentiek alapján $2r - 2n = 4r - 7n$, azaz $5n = 2r$, és így $h = 5n - 2n = 3n$.

A nagy téglalap kerülete:

$$2 \cdot (2r + h) + 2 \cdot (4r + h) = 2 \cdot 8n + 2 \cdot 13n = 42n = 840.$$

Innen a négyzetek oldala $n = 20$.



2. Miki, Niki és Viki közt 10 egyforma szelet csokit osztunk ki. A kiosztás után mindenki mondott három állítást, melyből kettő igaz, egy pedig hamis volt.

- Miki: „Niki és Viki is több csokit kapott, mint én. Niki 3 csokit kapott. Szeretem a csokit.”
- Niki: „Nem kapott senki se kevesebb csokit, mint én. Nem kapott senki se több csokit, mint én. Mindenki kapott legalább 1 szelet csokit.”
- Viki: „Én kettővel kevesebb csokit kaptam, mint Niki. Mindenki különböző számú csokit kapott. Miki 3 csokit kapott.”

Ki hány szelet csokit kapott?

Első megoldás. Nézzük Vikinek az első és harmadik állítását. Ha mindkettő igaz, akkor Niki és Viki összesen 7 csokit kapott, de ekkor Viki nem kaphatott kettővel kevesebb csokit, mint Niki. Így Viki második állításának igaznak kell lennie.

Niki első és második állítása közül legalább az egyik igaz. Mivel mindenki különböző számú csokit kapott, ezért Niki vagy a legtöbb, vagy a legkevesebb csokit kapta.

Mikinek az az állítása, hogy Niki 3 csokit kapott, nem lehet igaz, mivel ha ő kapta volna a legtöbbet, akkor $3 + 2 + 1 = 6$ csokit, ha a legkevesebbet, akkor legalább $3 + 4 + 5 = 12$ csokit kaptak volna.

Így Mikinek az első állítása igaz, vagyis Miki kapta a legkevesebb csokit. Így pedig Niki kapja a legtöbb csokit, emiatt neki legalább 5 csokit kell kapnia. (Ha csak 4-et kapna, akkor legfeljebb $4 + 3 + 2 = 9$ csokit kaphatnának összesen.)

Miki nem kaphatott 3 csokit, mivel akkor legalább $3 + 4 + 5 = 12$ csokit kaptak volna összesen. Így Vikinek az első két állítása igaz.

Ha Niki legalább 6 csokit kapna, akkor Viki legalább 4-et, és ekkor Mikinek nem jutna csoki. Ez pedig nem lehet, mivel akkor Nikinek két állítása lenne hamis.

Vagyis Niki 5, Viki 3, Miki pedig 2 csokit kapott, és ezek megfelelnek a feladat feltételeinek.

Második megoldás. Ha Niki első két állítása lenne igaz, akkor mindenki ugyanannyi csokit kapott volna, mint Niki, de ez nem lehetséges, mert 10 nem osztható 3-mal. Emiatt Niki hamis állítása az első kettő közül kerül ki. Viszont a másik az első két állítása közül igaz, tehát vagy senki nem kapott nála többet, vagy senki nem kapott nála kevesebbet.

Miki második állítása, hogy Niki 3 csokit kapott nem lehet igaz, mert ez ellentmondása vezet Niki első és második állításával is:

- Ha Niki 3 csokit kapott és bárki más is legfeljebb ennyit, akkor összesen legfeljebb $3 + 3 + 3 = 9$ csoki került volna kiosztásra.
- Ha Niki 3 csokit kapott és mindenki más is legalább ennyit, akkor mégvalaki 3-at kapott, hiszen $3 + 4 + 4 > 10$. Így nem lehet igaz Viki második állítása, hogy mindenki különböző számú csokit kapott. Ezért Viki első és harmadik állítása kell hogy igaz legyen, Miki három csokit kapott és Viki kettővel kevesebbet, mint Niki. De ez ellentmond annak, hogy Nikinél senki nem kapott kevesebbet.


Tehát Miki második állítása hamis, az első és a harmadik igaz. Ebből az is következik (Miki első állítása alapján), hogy Miki kapta a legkevesebb csokit. Azt is tudjuk már, hogy mindenki legalább egy csokit kapott, mert Niki hamis állítása az első kettő közül kerül ki.

Most rátérünk annak vizsgálatára, hogy melyik lehet Viki hamis állítása. Ha a középső lenne a hamis állítás, akkor az első és a harmadik igaz. Ebből az következne, hogy Miki 3 csokit kapott, Niki ennél többet, vagyis senki nem kapott Nikinél többet, és Viki Nikinél kettővel kevesebbet. De ez nem lehetséges, mert ha Niki és Viki azonos paritású számú csokit kapott, akkor nekik összesen páros számú csoki jutott, amit Miki három csokija nem tud 10-re kiegészíteni. Tehát nem lehet Viki első és harmadik állítása egyszerre igaz, amiből az is következik, hogy a középső igaz, mindenki különböző számú csokit kapott.

Ha mindenki különböző számú csokit kapott, akkor mivel Miki kapta a minimális számú csokit, így Nikinek csak a második állítása lehet igaz az első kettőből, miszerint nála többet senki nem kapott.

Az utolsó nyitott kérdés, hogy Vikinek az első vagy a harmadik állítása hamis.

Ha az első hamis, akkor a harmadik igaz, ezért Miki 3 csokit kapott volna. de mivel mindenki különböző számú csokit kapott, ezért ekkor legalább $3 + 4 + 5 > 10$ lennek a csokik száma. Vagyis csak Viki harmadik állítása lehet hamis.

Miki kapta a legkevesebb csokit, vagyis legfeljebb 3-at kapott, és azt is tudjuk, hogy legalább 1 csoki jutott neki. Mivel Viki Nikinél kettővel kevesebb csokit kapott, ezért (a korábbiakhoz hasonlóan) Miki csak páros sok csokit kaphatott, vagyis 2 csokit. Innen pedig azonnal adódik, hogy Niki 5, Viki 3 csokit kapott. 

3. Határozd meg az alábbi egyenlet összes megoldását a pozitív egész számok körében:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 4.$$

Első megoldás. Ha $a, b, c \geq 2$, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \leq \frac{6}{2} < 4.$$

Tehát az ismeretlenek legalább egyike csak 1 lehet.

- $a = 1 \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3$. Innen $2c + 3b = 3bc$, amiből az következik, hogy c osztható 3-mal.

Ha $c = 3$, akkor $b = 1$. Ha $c \geq 6$, akkor nincs megoldás.

- $b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{c} = 2$. Itt $c < 4$, mert $\frac{1}{a} \leq 1$.

A három lehetséges c érték kipróbálása egy új megoldást ad: $a = c = 2$.

- $c = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. Itt ha $a > 1$, akkor $b \leq 4$, különben $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} < 1$.


Végignézve b lehetséges értékeit két új megoldást kapunk: $a = 2, b = 4$ és $a = 3, b = 3$.

Tehát a következő négy (a, b, c) számhármast a megoldás: $(2; 1; 2)$, $(1; 1; 3)$, $(2, 4, 1)$, $(3, 3, 1)$.

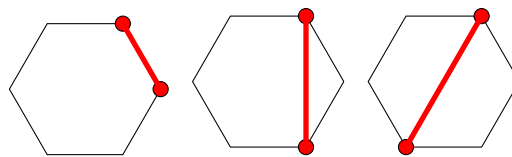
Második megoldás. A három összeadandó legalább egyikének nagyobbak kell lennie 1-nél.

Az első tag nem lehet ilyen. Ha $\frac{2}{b} > 1$, akkor $b = 1$. Ha $\frac{3}{c} > 1$, akkor $c = 1$ vagy $c = 2$.

- $b = 1$ esetén $\frac{1}{a} + \frac{3}{c} = 2$, innen $\frac{1}{a} \leq 1$ miatt $\frac{3}{c} \geq 1$. $c = 1$ nem jó, $c = 2$ esetén $a = 2$, $c = 3$ esetén pedig $a = 1$, más lehetőség nincs.
- $c = 1$ esetén $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. $a = 1$ nem jó, $a = 2$ esetén $b = 4$, $a = 3$ esetén $b = 3$.
Ha $\frac{1}{a}$ -t tovább csökkentenénk, $\frac{2}{b}$ -t növelni kellene, de $b = 2$ már túl nagy értéket ad.
- $c = 2$ esetén $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5}{2}$, ekkor $\frac{2}{b}$ -nek 1-nél nagyobbak kell lennie, ezt már az első esetben vizsgáltuk.

Tehát a megoldások: $(2; 1; 2)$, $(1; 1; 3)$, $(2, 4, 1)$, $(3, 3, 1)$. 

párok által kijelölt egyenesek között semelyik kettő nem párhuzamos, akkor ez a csoportosítás egy jó háromszöget definiál.

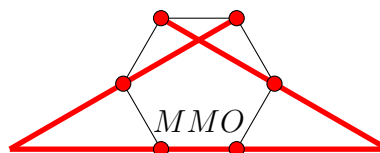
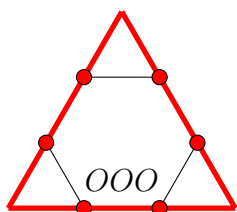


Egy párban szereplő két piros pont háromféle lehet:

Egy jó háromszög oldalegyenese nem mehet át a hatszög középpontján, mert akkor a másik két egyenesre vagy az igaz, hogy ők is átmennek a középponton, vagy az, hogy párhuzamosak, és mindkét lehetőséget kizártuk.

Tehát egy jó háromszög egy oldalegyenese vagy a hatszög egyik oldalegyenese, vagy a hatszög másodsomszédos csúcsait összekötő átló egyenese. Jelöljük az első típusú egyenest O -val, a másodikat M -mel.

Ha egy jó háromszög két oldala O típusú, akkor a harmadiknak is O típusúnak kell lennie. Ha egy jó háromszög két oldala M típusú, akkor a harmadiknak O típusúnak kell lennie. Tehát csak kétféle jó háromszög létezhet, OOO típusú és MMO típusú.



Ezután már egyszerűen megszámolhatjuk a jó háromszögeket.

- OOO típusúból van kettő, mert három nem szomszédos hatszögoldal csak kétféle módon választható ki: $\{AB, CD, EF\}$ vagy $\{BC, DE, FA\}$.
- MMO típusúból van hat, aszerint, hogy a hatszög melyik oldala jelöli ki a háromszög O típusú oldalegyenesét.

Összesen tehát $2 + 6 = 8$ megfelelő háromszög van a síkon.

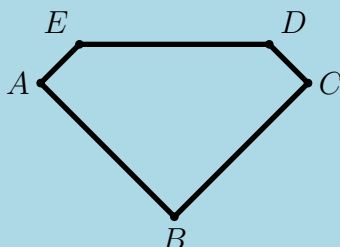


8. osztály

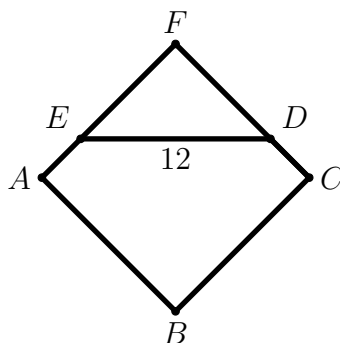
Megyei forduló

1. Az ábrán látható ötszögnek A -nál, B -nél és C -nél derékszöge van, a maradék két szöge pedig 135° -os. Tudjuk továbbá, hogy $AB = BC = DE = 12$ egység. Határozd meg az ötszög területét.

Teljes pontszámhoz a válasz legegyszerűbb alakját kell megadnod.



Első megoldás. Az AE és CD félegyenesek metszéspontja legyen F .



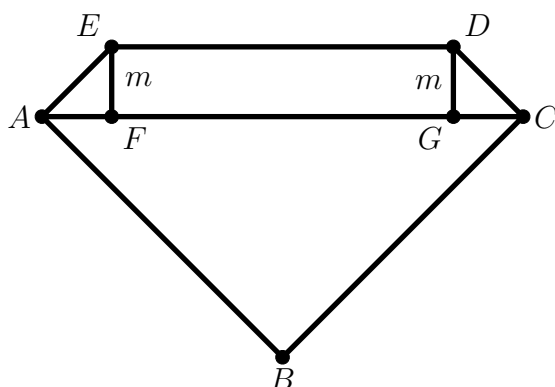
Az $ABCF$ négyszög egy 12 egység oldalhosszúságú négyzet, hiszen minden szöge derékszög, továbbá $AB = BC$. Területe $12^2 = 144$ egység.

Az EDF háromszög derékszögű és egyenlőszárú, mert $AE = DC$, így $FE = 12 - AE = 12 - DC = FD$. Területe megkapható az átfogó felének négyzeteként, mert az átfogóhoz tartozó magassága egyenlő az átfogó felével. Tehát $T_{EDF} = 6^2 = 36$ egység.

Az ötszög területét megkapjuk, ha az $ABCF$ négyzet területéből levonjuk az EDF háromszög területét:

$$T_{ABCDE} = T_{ABCF} - T_{EDF} = 144 - 36 = 108 \text{ (egység)}.$$

Második megoldás. Bontsuk fel az ötszöget az ABC háromszögre és az $ACDE$ négyszögre. Az ABC háromszög derékszögű, területe a két befogó szorzatának fele: $\frac{12 \cdot 12}{2} = 72$ egység.



Rajzoljuk meg az AFE és CGD egyenlőszárú derékszögű háromszögeket. A befogóikat (egyben az $ACDE$ trapéz magasságát) jelölje m .

Ekkor az AC és DE hosszának különbsége egyrészt $2m$, másrészt $12\sqrt{2} - 12$, azaz $m = 6\sqrt{2} - 6$.

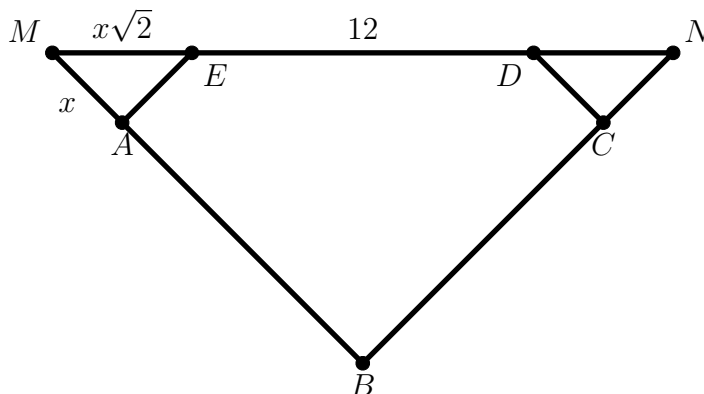
Ezután fel tudjuk írni az $ACDE$ négyzög területét is, hiszen az trapéz, és ismerjük az alapjait ($12\sqrt{2}$ és 12) és a magasságát ($m = 6\sqrt{2} - 6$). Tehát az $ACDE$ négyzög területe

$$\frac{(12 + 12\sqrt{2}) \cdot (6\sqrt{2} - 6)}{2}$$

ami a zárójel felbontása és az összevonások után végül $(144 - 72)/2 = 36$ egység.

Tehát a négyzög területe $72 + 36 = 108$ egység.

Harmadik megoldás. Egészítsük ki az ötszöget egy egyenlőszárú derékszögű BMN háromszöggé az ED egyenes illetve a BA és BC félegyenesek meghosszabbításával, és legyen az AE , DC szakaszok hossza x .



Az AME és DCN háromszögek derékszögű és egyenlőszárú háromszögek,

$$AM = AE = CD = CN = x, \text{ továbbá } ME = DN = x\sqrt{2}.$$

E két háromszög egy x oldalhosszúságú négyzetté illeszthető össze, együttes területük x^2 , ezért

$$T_{ABCDE} = \frac{(12 + x)^2}{2} - x^2.$$

x megjapható az MBN derékszögű háromszög MN átfogójának kétféle felírásából:

$$(12 + x)\sqrt{2} = 12 + 2 \cdot x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{12\sqrt{2} - 12}{\sqrt{2}} = 6 \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

A területre adott formulába visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} T &= \frac{(12 + 6 \cdot (2 - \sqrt{2}))^2}{2} - (6 \cdot (2 - \sqrt{2}))^2 = 36 \cdot \left(\frac{(4 - \sqrt{2})^2}{2} - (2 - \sqrt{2})^2 \right) = \\ &= 36 \cdot (9 - 4\sqrt{2} - (6 - 4\sqrt{2})) = 36 \cdot 3 = 108. \end{aligned}$$



2. Határozd meg az alábbi egyenlet összes megoldását a pozitív egész számok körében:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 4.$$

Első megoldás. Ha $a, b, c \geq 2$, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \leq \frac{6}{2} < 4.$$

Tehát az ismeretlenek legalább egyike csak 1 lehet.

- $a = 1 \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3$. Innen $2c + 3b = 3bc$, amiből az következik, hogy c osztható 3-mal.

Ha $c = 3$, akkor $b = 1$. Ha $c \geq 6$, akkor nincs megoldás.

- $b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{c} = 2$. Itt $c < 4$, mert $\frac{1}{a} \leq 1$.

A három lehetséges c érték kipróbálása egy új megoldást ad: $a = c = 2$.

- $c = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. Itt ha $a > 1$, akkor $b \leq 4$, különben $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} < 1$.

Végignézve b lehetséges értékeit két új megoldást kapunk: $a = 2, b = 4$ és $a = 3, b = 3$.

A következő négy (a, b, c) számhármast a megoldás: $(2; 1; 2)$, $(1; 1; 3)$, $(2, 4, 1)$, $(3, 3, 1)$.

Második megoldás. A három összeadandó legalább egyikének nagyobbának kell lennie 1-nél.

Az első tag nem lehet ilyen. Ha $\frac{2}{b} > 1$, akkor $b = 1$. Ha $\frac{3}{c} > 1$, akkor $c = 1$ vagy $c = 2$.

- $b = 1$ esetén $\frac{1}{a} + \frac{3}{c} = 2$, innen $\frac{1}{a} \leq 1$ miatt $\frac{3}{c} \geq 1$. $c = 1$ nem jó, $c = 2$ esetén $a = 2$, $c = 3$ esetén pedig $a = 1$, más lehetőség nincs.
- $c = 1$ esetén $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. $a = 1$ nem jó, $a = 2$ esetén $b = 4$, $a = 3$ esetén $b = 3$.
Ha $\frac{1}{a}$ -t tovább csökkentenénk, $\frac{2}{b}$ -t növelni kellene, de $b = 2$ már túl nagy értéket ad.
- $c = 2$ esetén $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5}{2}$, ekkor $\frac{2}{b}$ -nek 1-nél nagyobbának kell lennie, ezt már az első esetben vizsgáltuk.

Tehát a megoldások: $(2; 1; 2)$, $(1; 1; 3)$, $(2, 4, 1)$, $(3, 3, 1)$.



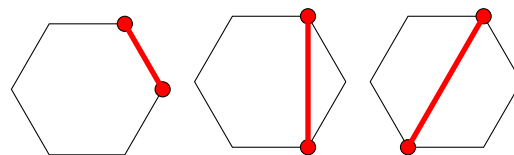
3. Pirossal megjelöltük az $ABCDEF$ szabályos hatszög csúcsait.

Hány olyan háromszög van a síkon, amelyre teljesül, hogy mind a hat piros ponton átmegy a háromszög valamelyik oldalegyenese?

A hat piros pont közül semelyik három nem esik egy egyenesre, ezért egy háromszög három oldalegyenese csak úgy mehet át mind a haton, ha minden oldalegyenes pontosan két piros pontra illeszkedik.

A keresett háromszög oldalegyenesei ezek szerint a hatszög csúcsait három párba sorolják.

Megfordítva: ha a hatszög csúcsait három olyan kételemű csoportba osztjuk szét, amelyekre teljesül, hogy (a) a párok által kijelölt három egyenes nem megy át egy ponton; továbbá (b) a párok által kijelölt egyenesek között semelyik kettő nem párhuzamos, akkor ez a csoportosítás egy jó háromszöget definiál.

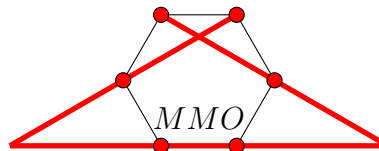
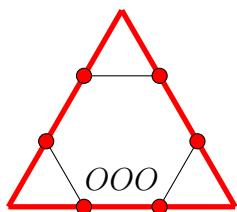


Egy párban szereplő két piros pont háromféle lehet:

Egy jó háromszög oldalegyenese nem mehet át a hatszög középpontján, mert akkor a másik két egyenesre vagy az igaz, hogy ők is átmennek a középponton, vagy az, hogy párhuzamosak, és mindkét lehetőséget kizártuk.

Tehát egy jó háromszög egy oldalegyenese vagy a hatszög egyik oldalegyenese, vagy a hatszög másodsomszédos csúcsait összekötő átló egyenese. Jelöljük az első típusú egyenest O -val, a másodikat M -mel.

Ha egy jó háromszög két oldala O típusú, akkor a harmadiknak is O típusúnak kell lennie. Ha egy jó háromszög két oldala M típusú, akkor a harmadiknak O típusúnak kell lennie. Tehát csak kétféle jó háromszög létezhet, OOO típusú és MMO típusú.



Ezután már egyszerűen megszámolhatjuk a jó háromszögeket.

- OOO típusúból van kettő, mert három nem szomszédos hatszögoldal csak kétféle módon választható ki: $\{AB, CD, EF\}$ vagy $\{BC, DE, FA\}$.
- MMO típusúból van hat, aszerint, hogy a hatszög melyik oldala jelöli ki a háromszög O típusú oldalegyenesét.

Összesen tehát $2 + 6 = 8$ megfelelő háromszög van a síkon.



4. Egy 4×4 -es táblázatot 1-es és 2-es számjegyekkel kitöltöttünk. A táblázatból balról jobbra, jobbról balra, fentről lefele és lentől felfele is kiolvashatók négyjegyű számok.

Legfeljebb hány különböző lehet az így kiolvasható 16 db négyjegyű szám között?

1	2	1	1
2	1	2	2
2	2	1	2
1	2	2	1


Például, az ábrán látható kitöltésből 8 különböző négyjegyű szám olvasható ki: 1121, 1211, 1212, 1221, 2122, 2121, 2212, 2211.

14 különböző négyjegyű szám elérhető, például az alábbi kitöltéssel:

1	1	2	2
2	2	2	2
1	1	1	2
1	2	2	1

Ebből minden kiolvasható, kivéve az 1111 és a 2112.


Elvileg lehetséges négyjegyű számból $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ van. Olyan számból, amely előrefele és hátrafelé kiolvastva is ugyanaz, négy darab van (1111, 1221, 2112, 2222). Ha ezekből legfeljebb kettő szerepel a kiolvasott számok közül, akkor legfeljebb 14 számot lehet kiolvasni.

Ha viszont legalább kettő, akkor ezek kiolvasásánál ugyanazt a számot olvassuk ki, tehát a 16 lehetséges kiolvasásból legalább kettő-kettő ugyanaz, így legfeljebb 14 lesz különböző. 

5. Bizonyítsd be, hogy 99 darab egész szám közül, melyek nem adnak csupa egyforma maradékot 100-zal osztva, ki lehet választani néhányat (esetleg csak egyet), melyek összege osztható 100-zal.

Jelölje a 99 számot a_1, a_2, \dots, a_{99} . Feltehetjük, hogy a_1 és a_2 100-as maradéka különbözik egymástól. Tekintsük most a következő 100 darab összeget:

$$a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{99}.$$

Ha ezek csupa különböző maradékot adnak 100-zal osztva, akkor van köztük 100-zal osztható, így kijött a bizonyítandó. Ha pedig nem fordul elő mind a 100-féle maradék, akkor kell köztük lennie két egyforma maradékúnak. Ez feltevésünk alapján nem lehet a_1 és a_2 , viszont minden más esetben a két összeg különbsége is néhány a_i összege, és ez a különbség pedig osztható 100-zal. 

5. osztály

Országos döntő


1. Kornél az $1, 2, 3, \dots, 21$ számok közül bekarikázott néhányat úgy, hogy ne legyen két szomszédos szám bekarikázva, de minden be nem karikázott számnak be legyen karikázva valamelyik szomszédja.

Hány számot karikázhatott be? Minden lehetséges értékre mutass példát!

Nem kell bizonyítani, hogy más érték nem lehet.

Kornél 7, 8, 9, 10 vagy 11 számot karikázhatott be. Példák:

- 7 karikázott szám: 1 (2) 3 4 (5) 6 7 (8) 9 10 (11) 12 13 (14) 15 16 (17) 18 19 (20) 21
- 8 karikázott szám: (1) 2 (3) 4 (5) 6 7 (8) 9 10 (11) 12 13 (14) 15 16 (17) 18 19 (20) 21
- 9 karikázott szám: (1) 2 (3) 4 (5) 6 (7) 8 (9) 10 (11) 12 13 (14) 15 16 (17) 18 19 (20) 21
- 10 karikázott szám: (1) 2 (3) 4 (5) 6 (7) 8 (9) 10 (11) 12 (13) 14 (15) 16 (17) 18 19 (20) 21
- 11 karikázott szám: (1) 2 (3) 4 (5) 6 (7) 8 (9) 10 (11) 12 (13) 14 (15) 16 (17) 18 (19) 20 (21)

Megjegyzés. Bármely három szomszédos szám közül valamelyiket be kell karikázni, különben a középső (karikázatlan) számnak nem lenne karikázott szomszédja. Ezért nem lehet 7-nél kevesebb karikázott szám. Mivel bármely két szomszédos szám közül legfeljebb egy lehet karikázott, ezért 11-nél több karikázott szám sem lehet. 

2. 10 ötödikes focizik, 5 az 5 ellen. Közülük öten járnak fociedzésre, öten nem. Ödön nem jár fociedzésre, de olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

Ödönnek vagy négy edzésre járó, vagy három edzésre járó és egy edzésre nem járó csapattársra van szüksége. Az első esetben ötféleképpen oszthatjuk el az edzésre járókat (egyalaki kerül a másik csapatba), az edzésre nem járók elosztása egyértelmű.

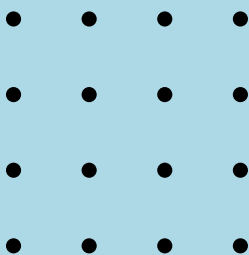
A második esetben 10-féleképpen oszthatjuk el az edzésre járókat, és négyféleképp az edzésre nem járókat. Ez $10 \cdot 4 = 40$ lehetőség.

Összesen tehát $5 + 40 = 45$ megfelelő csapatkiosztás van.

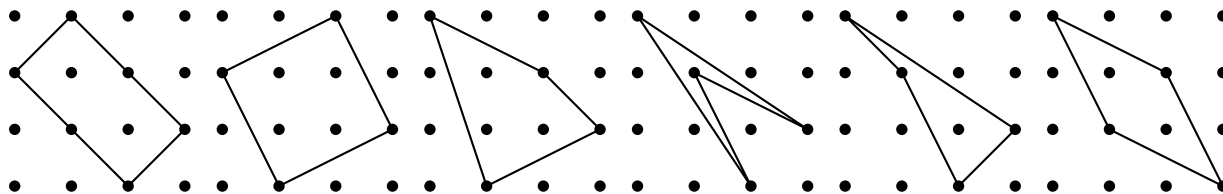


3. Rajzold meg az összes olyan különböző négyszöget, amelynek csúcsai kiválaszthatóak az alábbi 4×4 -es pontrácsból úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból egy-egy csúcsot választunk ki.

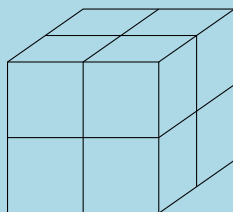
A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető négyszögeket nem tekintjük különbözőnek. Nem kell bebizonyítani, hogy az általad talált négyszögeken kívül nincs más.



Hat különböző négyszög rajzolható.



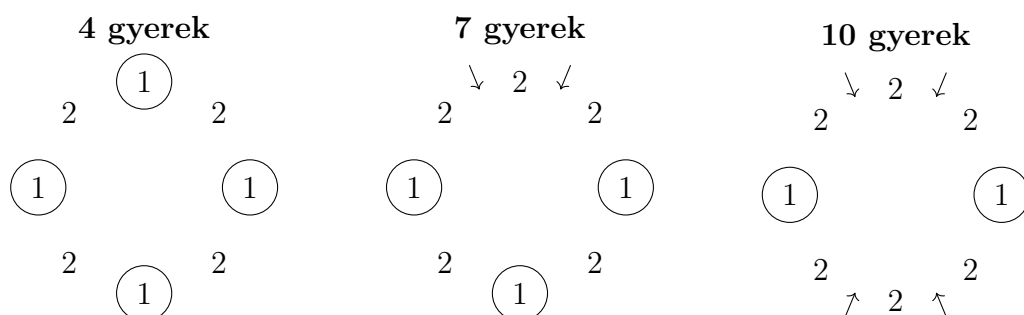
4. Van 8 egységkockám, melyek mindegyike a következőképpen van kifestve: két lapja piros, két lapja kék és két lapja zöld, méghozzá úgy, hogy mindig a szemközti lapok azonos színűek. A 8 egységkockából összeépítettem egy $2 \times 2 \times 2$ -es kockát. A nagy kockát letettem az asztalra, így most három (páronként szomszédos) lapját látom. Ezeken összesen 5 piros, 4 kék és 3 zöld kiskockalap látszik. Hány piros kiskockalap lehet látható a másik három lapon összesen?



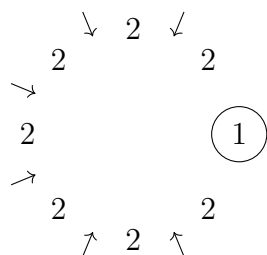
Mindegyik kis kockának pontosan három, páronként szomszédos lapja látható a nagy kocka valamelyik lapján. Ezek minden egyes kis kockán egy-egy piros, kék és zöld lapot jelentenek, hiszen szomszédos lapokon nem lehet azonos szín. Tehát a nagy kocka hat lapján összesen 8 piros (továbbá 8 kék és 8 zöld) kiskockalap látható. Így ha a felénk eső három lapon 5 piros kiskockalap látható, akkor a másik három lapon összesen 3 piros lapnak kell látszódnia. ↑

5. Egy iskola fekvőtámaszversenyt rendez. Az első fordulóban 8 gyerek áll fel egy körben. Minden fordulóban 1 perc alatt kell minél több fekvőtámaszt megcsinálni. Aki mindkét szomszédjánál kevesebb fekvőtámaszt csinál, annak a forduló végén ki kell állnia a körből. Viszont ha egy forduló végén két szomszédos gyerek egyikének sem kell kiállnia a körből, akkor a két gyerek közé egy újabb gyereket állítanak.
- a) Hány gyerek állhat a körben a második fordulóban? Minden lehetséges esetre mutass példát, azaz add meg, hogy az első fordulóban hány fekvőtámaszt csinált a nyolc gyerek! *Azt nem kell indokolni, hogy más eset nem lehetséges.*
- b) Tudjuk, hogy a verseny egyik fordulójában 20 gyerek állt a körben. Lehetséges-e, hogy a rákövetkező fordulóban 36-an állnak majd a körben?

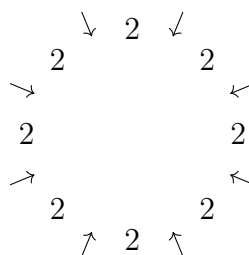
a) A második fordulóban 4, 7, 10, 13 vagy 16 gyerek vehet részt. Az alábbi ábrákon karikázva jelöljük a kieső gyerekeket és nyíllal azokat a pozíciókat, ahova új gyerek fog belépni. A számérték azt mutatja, hogy hány fekvőtámaszt csinált az adott fordulóban az adott pozíción lévő gyermek.



13 gyerek



16 gyerek



b) Ha a 20 résztvevős fordulóban senkinek nem kell kiállnia, akkor bármely két szomszédos gyerek közé beáll még egy, így 40-en lesznek a következő körben. Ha egyetlen gyereknek kell kiállnia, akkor mellé nem áll be kétoldalt egy-egy újabb gyerek, tehát 37-en lesznek ezután. Ha pedig legalább két gyereknek ki kell állnia, akkor ők nem lehetnek szomszédosak, így legalább négy helyre nem fog beállni új gyerek, tehát legfeljebb 34-en lesznek. Így nem lehetséges, hogy pontosan 36-an versenyezzenek a következő fordulóban.

Megjegyzés. Általában, ha egy körben n résztvevő van, akkor a következőben maximum $2n$ résztvevő lehet. Ha k gyereknek kell kiállnia, akkor pedig csak $2n - 3k$ résztvevő lesz, ahol $k \leq n/2$.



6. osztály

Országos döntő

1. 12 hatodikos focizik, 6 a 6 ellen. Közülük öten járnak fociedzésre, heten nem. Hanna nem jár fociedzésre, de olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

Hannának vagy öt edzésre járó, vagy négy edzésre járó és egy edzésre nem járó, vagy három edzésre járó és két edzésre nem járó csapattársra van szüksége.

Az első esetben egyértelmű a csapatkiosztás, Hannának az öt edzésre járó gyerek lesz a csapattársa.

A második esetben az edzésre járók közül ötféleképp választhatjuk azt az egyet, aki a másik csapatba kerül (avagy azt a négyet, aki Hanna csapattársa lesz). Az edzésre nem járók közül pedig hatféleképp választhatjuk azt az egyet, aki Hanna csapattársa lesz. Ez $5 \cdot 6 = 30$ lehetőség.

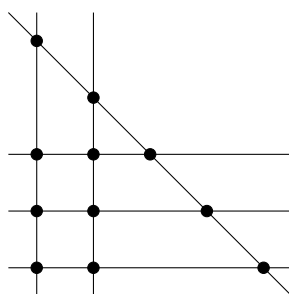
A harmadik esetben az edzésre járók közül tízféleképp választhatjuk azt az egyet, aki a másik csapatba kerül (avagy azt a hármat, aki Hanna csapattársa lesz). Az edzésre nem járók közül pedig 15 különböző módon választhatjuk azt a kettőt, akik Hanna csapattársai lesznek. Ez $10 \cdot 15 = 150$ lehetőség.

Összesen $1 + 30 + 150 = 181$ megfelelő csapatkiosztás van.

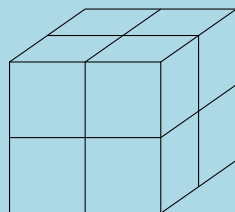


2. Megadható-e 6 egyenes a síkon úgy, hogy semelyik három ne menjen át egy ponton, és a metszéspontok száma pontosan 11 legyen?

Igen, megadható. Vegyünk három egymással párhuzamos egyenest, továbbá kettőt, amelyek egymással párhuzamosak, de az előzőekkel nem, és végül a hatodik egyenes egyik korábbival se legyen párhuzamos.



3. Van 8 egységkockám, melyek mindegyike a következőképpen van kifestve: két lapja piros, két lapja kék és két lapja zöld, méghozzá úgy, hogy mindig a szemközti lapok azonos színűek. A 8 egységkockából összeépítettem egy $2 \times 2 \times 2$ -es kockát. A nagy kockát letettem az asztalra, így most három (páronként szomszédos) lapját látom. Ezeken összesen 5 piros, 4 kék és 3 zöld kiskockalap látszik. Hány piros kiskockalap lehet látható a másik három lapon összesen?



Mindegyik kis kockának pontosan három, páronként szomszédos lapja látható a nagy kocka valamelyik lapján. Ezek minden egyes kis kockán egy-egy piros, kék és zöld lapot jelentenek, hiszen szomszédos lapokon nem lehet azonos szín. Tehát a nagy kocka hat lapján összesen 8 piros (továbbá 8 kék és 8 zöld) kiskockalap látható. Így ha a felénk eső három lapon 5 piros kiskockalap látható, akkor a másik három lapon összesen 3 piros lapnak kell látszódnia. ↑

4. Karolina bekarikázott az 1, 2, 3, 4, ..., 20 számok közül 11-et úgy, hogy ne legyen köztük kettő, amelyek közül az egyik kétszerese lenne a másiknak. Lujza ránézett a bekarikázott számokra, és megállapította: „Akármelyiket is karikáznám be a maradék 9 szám közül, már lenne két bekarikázott szám, amelyek közül az egyik kétszerese a másiknak.”
- a) Bekarikázhatta-e Karolina az 1-et?
b) Bekarikázhatta-e Karolina a 20-at?

a) Lehetséges, hogy Karolina bekarikázta az 1-et, például így:

① 2 3 4 5 ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ 12 ⑬ 14 ⑮ 16 ⑰ 18 ⑲ 20

A bekarikázottak közül egyik sem kétszerese a másiknak. A 3-nak, a 4-nek és az 5-nek szerepel a kétszerese, a 2-nek, 12-nek, 14-nek, 16-nak, 18-nak és 20-nak pedig a fele, így Lujza megállapítása is teljesül.

b) Lujza megállapításából következik, hogy a 11, 13, 15, 17, 19 számok mind be vannak karikázva, hiszen különben bármelyiket hozzávehetnénk a már bekarikázott számokhoz. Hasonló okból az 1-2, 3-6, 5-10, 7-14, 8-16, 9-18 számpárok valamelyik tagja is biztosan be van karikázva. Vagyis a fenti számok közül $5 + 6 = 11$ -et biztosan bekarikáztunk. Így a 20-as szám bekarikázása már $5 + 6 + 1 = 12$ darab bekarikázott számot jelentene. Tehát a 20 nem lehet bekarikázott szám. ↑

5. a) Adj meg egy olyan hétjegyű számot, melynek értéke megefeleződik, ha a számjegyeit növekvő sorrendbe állítjuk!
 b) Adj meg minél többféle 11-jegyű számot, melynek értéke megefeleződik, ha a számjegyeit növekvő sorrendbe állítjuk!
*A 0 számjegy egyik esetben sem használható.
 Elegendő a számokat megadni, indoklást nem kérünk.*

a) Ilyen hétjegyű szám a

$$2491578 = 1245789 \cdot 2.$$

b) Ilyen 11-jegyű számok:


$$24669133578 = 12334566789 \cdot 2$$

$$24691357998 = 12345678999 \cdot 2$$

$$24915799998 = 12457899999 \cdot 2$$

Megjegyzés. Hogyan lehet ezeket a számokat megtalálni? Szorozzuk meg a számjegyeket növekvő sorrendben tartalmazó 123456789 számot írásban 2-vel:

$$\begin{array}{r} 123456789 \cdot 2 \\ \hline 246913578 \end{array}$$

Megfelelő számot kapunk, de kilencjegyűt. Észrevehető, hogy a 3-as és 6-os számjegyek párban állnak, így ezek elhagyásával megfelelő hétjegyű számot kapunk. Az is látszik, hogy 9-esek, valamint egyenlő számú 3-as és 6-os betoldásával növelhetjük a jegyek számát, így eljuthatunk a 11-jegyű megoldásokhoz. Bizonyítható, hogy a fentebb megadott számokon kívül más szám nem felel meg a feltételeknek. 

7. osztály

Országos döntő

1. 14 hetedikes focizik, 7 a 7 ellen. Közülük heten járnak fociedzésre, heten nem. Henrik jár fociedzésre, és olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában (vele együtt) többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

Henrik úgy tud kialakítani edzésre járó többséget a csapatában, ha maga mellé még hat, öt, négy vagy három olyan tagot választ, akik szintén járnak edzésre.

Henriken kívül még hat ember jár edzésre és hét nem. Nevezzük az első csoportot E halmaznak, a másodikat N halmaznak és számoljuk meg a lehetséges kiosztásokat külön-külön a fentebb felsorolt esetekben.

- Henrik 6 embert választ E -ből és nem választ N -ből. Ez egyetlen módon tehető meg.
- Henrik 5 embert választ E -ből és 1-et N -ből. A hatelemű E halmazból 5-öt hatféle módon választhatunk (aszerint, hogy ki marad ki) és a hételemű N -ből egyvalakit hétféle módon választhatunk. Ezek a választások tetszőlegesen kombinálhatók, ezért most összesen $6 \cdot 7 = 42$ lehetőséget kaptunk.
- Henrik 4 embert választ E -ből és 2-t N -ből. Hatból négyet választani ugyanannyiféle módon lehet, mint hatból kettőt. Általában n elemből kettőt kiválasztani $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ -féle módon lehetséges, mert az első választás n -féle lehet, a második már csak $(n-1)$ -féle és a párban a sorrend nem számít, ezért még osztani kell kettővel. Ebben az esetben így N -ből $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ módon választható négy, és N -ből $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ módon választható kettő. Ez összesen $15 \cdot 21 = 315$ lehetőség.
- Henrik 3 embert választ E -ből és 3-at N -ből. Általában n elemből hármat $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$ -féle módon választhatunk ki. Az indoklás a fentihez hasonló, csak most már hat lehetséges sorrendje van egy kiválasztott hármasnak, ezért kellett növelni a nevezőt. Ebben az esetben tehát $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 20 \cdot 35 = 700$ lehetőséget kaptunk.

Összegezve $1 + 42 + 315 + 700 = 1058$ -féle módon tud Henrik kedve szerinti csapatkiosztást választani.

Megjegyzés. A megoldás tömörebb formában is felírható, ha már ismerjük a binomiális együtthatók fogalmát.

$$1058 = \binom{6}{6} \cdot \binom{7}{0} + \binom{6}{5} \cdot \binom{7}{1} + \binom{6}{4} \cdot \binom{7}{2} + \binom{6}{3} \cdot \binom{7}{3} = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 7 + 15 \cdot 21 + 20 \cdot 35$$



2. Megadható-e 7 egyenes a síkon úgy, hogy semelyik három ne menjen át egy ponton, és a metszéspontok száma pontosan 16 legyen?

Ha a hét egyenes általános helyzetű lenne, vagyis bármely kettő metszené egymást és semelyik három nem menne át egy ponton, akkor összesen $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ metszéspontot határoznának meg. Ehhez a maximumomhoz képest egy olyan elrendezést kell keresünk, ahol öttel kevesebb a metszéspontok száma.

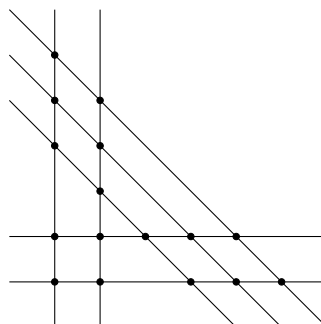
Mivel semelyik három egyenes nem mehet át egy ponton, csak azzal tudjuk csökkenteni a metszéspontok számát (a maximumhoz képest), hogy bizonyos egyeneseket párhuzamosan rajzolunk.


Ha van a darab párhuzamos egyenes és b darab másik egymással párhuzamos, de az eredeti a darabot metsző egyenes, akkor ez az összesen $a + b$ darab egyenes együtt $a \cdot b$ metszéspontot ad ki.

Hasonlóan ha három „párhuzamossági osztályunk” van, amelyek mérete a , b és c , akkor összesen $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$ metszéspont keletkezik.

Ha elkezdjük felsorolni az összes lehetséges módot, ahogy hét egyenes néhány párhuzamossági osztályba sorolható, az derül ki, hogy a 2, 2, 3 felosztás 16 metszésponthoz vezet.

párhuzamossági osztályok mérete	metszéspontok száma
7 (minden egyenes párhuzamos)	0
1, 6	$6 = 1 \cdot 6$
2, 5	$10 = 2 \cdot 5$
3, 4	$12 = 3 \cdot 4$
1, 1, 5	$11 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1$
1, 2, 4	$14 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4$
1, 3, 3	$15 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3$
2, 2, 3	$16 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2$



Megjegyzés. A jó konstrukció megtalálásához nem szükséges felsorolni a különböző eseteket. Érvelhetünk úgy is, hogy a maximumhoz viszonyított csökkenést $3 + 1 + 1$ alakban állítjuk elő. Hármat csökkent a maximumon ha három egyenest párhuzamosnak rajzolunk és egyet csökkent, ha két egyenest párhuzamosnak rajzolunk. 

3. Annának van 16 doboza négy színben (sárga, piros, kék, zöld) és méretben (kicsi, közepes, nagy, óriás). Ezeket négyesével egymásba pakolja úgy, hogy minden négyes csoportban minden színből és méretből pontosan egy szerepeljen. Miután minden dobozt becsukott, megérkezünk, és szeretnénk megtudni, hogy a négy óriás doboz közül melyik tartalmazza a kicsi sárga dobozt. Állapítsd meg minél kevesebb doboz kinyitásával, hogy melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz!

Ahhoz, hogy egy dobozt kinyithass, mindegyik nála nagyobb, őt tartalmazó dobozt ki kell nyitnod. A kicsi sárga dobozt tartalmazó dobozt nem muszáj ténylegesen kinyitni. Nem kell indokolni, hogy az általad talált megoldás a lehető legkevesebb kinyitásból áll.


Mutatunk egy olyan módszert, amely három doboz kinyitásával kideríti, melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz.

Először tegyük félre az óriás sárga dobozt, annak belsejében már nem lehet másik (kisebb) sárga doboz. Most nyissuk ki a piros és a kék óriás dobozt. (Ez idáig két nyitás.) Most már látjuk a bennük lévő két nagy doboz színét.

Két eset lehetséges: vagy látunk egy nagy sárga dobozt, vagy nem.

- Ha nem látunk nagy sárga dobozt, akkor biztosak lehetünk, hogy az a másik érintetlen (a zöld) óriás dobozban van, és abban kisebb sárga doboz nem lehet, ezért tegyük azt is félre. A keresett kicsi sárga doboz vagy a kék vagy a piros óriás dobozban van.
- Ha látunk egy nagy sárga dobozt, akkor az őt tartalmazó óriás dobozt is tegyük félre. Most a keresett kicsi sárga doboz vagy az érintetlen zöld óriás dobozban van, vagy a részben már kinyitott és még félre nem tett dobozban.

Mindkét esetben sikerült két óriás dobozra szűkíteniünk a lehetőségeket, ráadásul e két doboz közül legalább az egyiket már kinyitottuk.

Végül a megmaradt két doboz közül vegyük az egyik nyitottat (ha csak egy nyitott van, akkor azt) és nyissuk ki az abban lévő nagy dobozt is. Ha most egy sárga közepes dobozt pillantunk meg, akkor tudjuk, hogy a kicsi sárgának a másik megmaradt dobozban kell lennie, és ahhoz már nem kell nyúlnunk. Ha pedig egy nem sárga közepes dobozt látunk, akkor a másik megmaradt dobozban kell lennie a sárga közepesnek (hiszen a korábban félretett dobozok között van a nagy és az óriási sárga), és akkor a kicsi sárgának abban az óriás dobozban kell lennie, amiben pont most nyitottuk ki a nagy dobozt. 

4. Bergengóciában kétféle fizetőeszköz van: garas és tallér. A bergengóc nemzeti bank minden reggel kiírja a két fizetőeszköz közti váltás aznapi arányát (pl: 7 garas = 3 tallér). Andrásnak 1100 garasa és 400 tallérja, Bélának 200 garasa és 1700 tallérja, Csabának 800 garasa és 900 tallérja van.
- a) Bizonyítsd be, hogy a bank kiírhat olyan váltási arányt, amelynél Csaba vagyona értékesebb Andrásénál és Béléénál is.
- b) Csaba a húgának adott 100 tallért, András és Béla vagyona nem változott. Kiírhat-e most a bank olyan váltási arányt, amelynél hármuk közül még mindig Csaba vagyona a legértékesebb?

Az egyszerűség kedvéért számoljunk forintban és legyen 100 garas g forint, 100 tallér pedig t forint (megengedve, hogy g és t nem feltétlenül egész szám, de feltéve, hogy mindkettő pozitív). A három fiú vagyona forintban kifejezve: $A = 11g + 4t$, $B = 2g + 17t$ és $C = 8g + 9t$.

a) Ha Csaba a leggazdagabb, akkor $C > A$ és $C > B$ is teljesül. Nézzük meg, mit jelent ez g -re és t -re vonatkozóan.

$$C = 8g + 9t > A = 11g + 4t \Rightarrow 5t > 3g \Rightarrow \frac{5}{3}t > g.$$

$$C = 8g + 9t > B = 2g + 17t \Rightarrow 6g > 8t \Rightarrow g > \frac{4}{3}t.$$

A kapott feltételrendszer egy megoldása $t = 2, g = 3$, mert ekkor $C = 8g + 9t = 4200$, $A = 11g + 4t = 4100$ és $B = 2g + 17t = 4000$ és tényleg C a legnagyobb.

Átváltási arányként megfogalmazva ez azt jelenti, hogy két garas egyenlő három tallérral.

b) *Első megoldás.* Most az előző feltételek egy kicsit módosulnak.

$$C = 8g + 8t > A = 11g + 4t \Rightarrow 4t > 3g \Rightarrow \frac{4}{3}t > g.$$

$$C = 8g + 8t > B = 2g + 17t \Rightarrow 6g > 9t \Rightarrow g > \frac{3}{2}t. \text{ Ez azt jelentené, hogy}$$

$$\frac{4}{3}t > g > \frac{3}{2}t,$$

ami nem lehetséges, hiszen $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ és feltettük, hogy t pozitív, vagyis a pénzeknek van értéke. Tehát a b) feltételnek megfelelő átváltási arány nem létezik.

Második megoldás. Tegyük fel, hogy Csaba vagyona a legértékesebb, azaz $C > A$, és $C > B$.

Ekkor az is igaz, hogy $3C > 2A + B$, ami azt jelentené, hogy 2400 garas + 2400 tallér $>$ 2400 garas + 2500 tallér, ami nem lehetséges. 

5. Az 1, 2, 3, ..., 32 számok közül szeretnék néhányat bekarikázni úgy, hogy egyszerre teljesüljön a következő két feltétel:

- (i) nincs a bekarikázott számok közt kettő, melyek közül az egyik 2-szerese a másiknak.
- (ii) nem tudok újabb számot bekarikázni úgy, hogy ne legyen a bekarikázott számok közt kettő, amelyek közül az egyik 2-szerese a másiknak.

Hányféleképpen tehetem ezt meg?

Nevezzük *lánchnak* az $x, 2x, 4x, \dots$ alakú sorozatokat, ahol $1 \leq x \leq 31$ egy páratlan egész szám. Az 1, 2, 3, ..., 32 számhalmaz felbontható 16 lánc uniójára:

1, 2, 4, 8, 16, 32 (6 szám); 3, 6, 12, 24 (4 szám); 5, 10, 20 (3 szám); 7, 14, 28 (3 szám); 9, 18 (2 szám); 11, 22 (2 szám); 13, 26 (2 szám); 15, 30 (2 szám); és további 8 egyelemű lánc, a 17, ..., 31 páratlan számok. Ez a felbontás azért hasznos, mert a kérdéses számok közül csak úgy lehet egy duplája egy másiknak, ha mindketten ugyanahhoz a lánchoz tartoznak.

Emiatt elég minden láncre külön-külön megszámolni a helyes karikázások számát, és a kapott értékek szorzata lesz az összes lehetőség száma, mert két lánc helyes karikázásai tetszőlegesen kombinálhatók egymással.

Az is könnyen látható, hogy egy láncon belül csak a szomszédos elemekre kell figyelni: nem lehet két szomszédos karikázás, és minden karikázatlannak kell lennie karikázott szomszédjának. Tehát csak az érdekes, hogy a lánc hány elemű, az nem, hogy konkrétan melyik számok alkotják.

Vegyük sorra a különböző hosszúságú láncokat és jelölje $f(n)$ az n hosszúságú lánc helyes karikázásainak számát.

$n = 1$. Kötelező bekarikáznunk az egyetlen elemet az (ii) feltétel miatt. $f(1) = 1$

$n = 2$. A két elem közül pontosan az egyiknek kell bekarikázva lennie, de az szabadon választható, hogy melyiknek. $f(2) = 2$

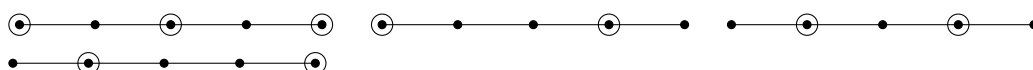
$n = 3$. Két jó karikázás van tehát $f(3) = 2$:



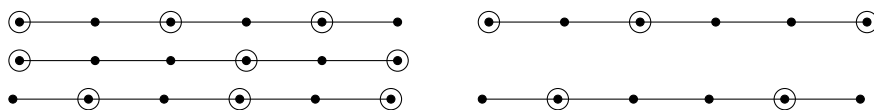
$n = 4$. Három jó karikázás van tehát $f(4) = 3$:



$n = 5$. (A teljesség kedvéért, ilyen lánccunk nincs.) Négy jó karikázás van, tehát $f(5) = 4$:



$n = 6$. Öt jó karikázás van, tehát $f(6) = 5$:



A helyes karikázások egy lehetséges jellemzése: bármely két karikázott között pontosan egy vagy két karikázatlan lehet, továbbá a lánc két szélén legfeljebb egy karikázatlan lehet.

Most már össze tudjuk számolni az eseteket. Van egy hatelemű, egy négyelemű, két háromelemű és négy kételemű láncunk (a maradék nyolc egyelemű láncnál nincs választási lehetőségünk), ezért a helyes karikázások száma

$$f(6) \cdot f(4) \cdot f(3)^2 \cdot f(2)^4 = 5 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 = 15 \cdot 64 = 960$$

Megjegyzés. Bizonyítható, hogy $n > 2$ esetén $f(n) = f(n - 2) + f(n - 3)$.



8. osztály

Országos döntő

1. 16 nyolcadikos focizik, 8 a 8 ellen. Közülük heten járnak fociedzésre, kilencen nem. Nóri jár fociedzésre, és olyan csapatkiosztást szeretne csinálni, hogy az ő csapatában (vele együtt) többen járjanak fociedzésre, mint az ellenfél csapatban. Hányféle ilyen csapatkiosztás van?

Nándi úgy tud kialakítani edzésre járó többséget a csapatában, ha maga mellé még hat, öt, négy vagy három olyan tagot választ, akik szintén járnak edzésre. Nándin kívül még hat ember jár edzésre és kilenc nem. Nevezzük az első csoportot E halmaznak, a másodikat N halmaznak. Nándinak összesen hét csapattársat kell választania úgy, hogy E -ből legalább hármat választ.

A jó eseteket az alábbi táblázat sorolja fel:

E -ből választott játékosok száma	N -ből választott játékosok száma
6	1
5	2
4	3
3	4

Általában egy n elemű halmazból k különböző elem $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$ -féle módon választható ki. Ha E -ből x -féle módon tudunk választani, N -ből pedig y -féle módon, akkor ez összesen $x \cdot y$ lehetőség, mert az edzésre járók és edzésre nem járók csoportja tetszőlegesen párosítható, amennyiben a csoportok mérete rögzített.

A fentiek alapján Nándi lehetőségeinek száma:

$$\binom{6}{6} \cdot \binom{9}{1} + \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{2} + \binom{6}{4} \cdot \binom{9}{3} + \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{4} = 1 \cdot 9 + 6 \cdot 36 + 15 \cdot 84 + 20 \cdot 126 = 4005$$



2. Annának van 16 doboza négy színben (sárga, piros, kék, zöld) és méretben (kicsi, közepes, nagy, óriás). Ezeket négyesével egymásba pakolja úgy, hogy minden négyes csoportban minden színből és méretből pontosan egy szerepeljen. Miután minden dobozt becsukott, megérkezünk, és szeretnénk megtudni, hogy a négy óriás doboz közül melyik tartalmazza a kicsi sárga dobozt. Állapítsd meg minél kevesebb doboz kinyitásával, hogy melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz!

Ahhoz, hogy egy dobozt kinyithass, mindegyik nála nagyobb, őt tartalmazó dobozt ki kell nyitnod. A kicsi sárga dobozt tartalmazó dobozt nem muszáj ténylegesen kinyitni. Nem kell indokolni, hogy az általad talált megoldás a lehető legkevesebb kinyitásból áll.


Mutatunk egy olyan módszert, amely három doboz kinyitásával kideríti, melyik óriás dobozban van a kicsi sárga doboz.

Először tegyük félre az óriás sárga dobozt, annak belsejében már nem lehet másik (kisebb) sárga doboz. Most nyissuk ki a piros és a kék óriás dobozt. (Ez idáig két nyitás.) Most már látjuk a bennük lévő két nagy doboz színét.

Két eset lehetséges: vagy látunk egy nagy sárga dobozt, vagy nem.

- Ha nem látunk nagy sárga dobozt, akkor biztosak lehetünk, hogy az a másik érintetlen (a zöld) óriás dobozban van, és abban kisebb sárga doboz nem lehet, ezért tegyük azt is félre. A keresett kicsi sárga doboz vagy a kék vagy a piros óriás dobozban van.
- Ha látunk egy nagy sárga dobozt, akkor az őt tartalmazó óriás dobozt is tegyük félre. Most a keresett kicsi sárga doboz vagy az érintetlen zöld óriás dobozban van, vagy a részben már kinyitott és még félre nem tett dobozban.

Mindkét esetben sikerült két óriás dobozra szűkítenünk a lehetőségeket, ráadásul e két doboz közül legalább az egyiket már kinyitottuk.

Végül a megmaradt két doboz közül vegyük az egyik nyitottat (ha csak egy nyitott van, akkor azt) és nyissuk ki az abban lévő nagy dobozt is. Ha most egy sárga közepes dobozt pillantunk meg, akkor tudjuk, hogy a kicsi sárgának a másik megmaradt dobozban kell lennie, és ahhoz már nem kell nyúlnunk. Ha pedig egy nem sárga közepes dobozt látunk, akkor a másik megmaradt dobozban kell lennie a sárga közepesnek (hiszen a korábban félretett dobozok között van a nagy és az óriási sárga), és akkor a kicsi sárgának abban az óriás dobozban kell lennie, amiben pont most nyitottuk ki a nagy dobozt. 

3. Bergengóciában kétféle fizetőeszköz van: garas és tallér. A bergengóc nemzeti bank minden reggel kiírja a két fizetőeszköz közti váltás aznapi arányát (pl: 7 garas = 3 tallér). Andrásnak 1100 garasa és 400 tallérja, Bélának 200 garasa és 1700 tallérja, Csabának 800 garasa és 900 tallérja van.

a) Bizonyítsd be, hogy a bank kiírhat olyan váltási arányt, amelynél Csaba vagyona értékesebb Andrásénál és Béláénál is.

b) Csaba a húgának adott 100 tallért, András és Béla vagyona nem változott. Kiírhat-e most a bank olyan váltási arányt, amelynél hármuk közül még mindig Csaba vagyona a legértékesebb?

Az egyszerűség kedvéért számoljunk forintban és legyen 100 garas g forint, 100 tallér pedig t forint (megengedve, hogy g és t nem feltétlenül egész szám, de feltéve, hogy mindkettő pozitív). A három fiú vagyona forintban kifejezve: $A = 11g + 4t$, $B = 2g + 17t$ és $C = 8g + 9t$.

a) Ha Csaba a leggazdagabb, akkor $C > A$ és $C > B$ is teljesül. Nézzük meg, mit jelent ez g -re és t -re vonatkozóan.

$$C = 8g + 9t > A = 11g + 4t \Rightarrow 5t > 3g \Rightarrow \frac{5}{3}t > g.$$

$$C = 8g + 9t > B = 2g + 17t \Rightarrow 6g > 8t \Rightarrow g > \frac{4}{3}t.$$

A kapott feltételrendszer egy megoldása $t = 2, g = 3$, mert ekkor $C = 8g + 9t = 4200$, $A = 11g + 4t = 4100$ és $B = 2g + 17t = 4000$ és tényleg C a legnagyobb.

Átváltási arányként megfogalmazva ez azt jelenti, hogy két garas egyenlő három tallérral.

b) *Első megoldás.* Most az előző feltételek egy kicsit módosulnak.

$$C = 8g + 8t > A = 11g + 4t \Rightarrow 4t > 3g \Rightarrow \frac{4}{3}t > g.$$

$$C = 8g + 8t > B = 2g + 17t \Rightarrow 6g > 9t \Rightarrow g > \frac{3}{2}t. \text{ Ez azt jelentené, hogy}$$

$$\frac{4}{3}t > g > \frac{3}{2}t,$$

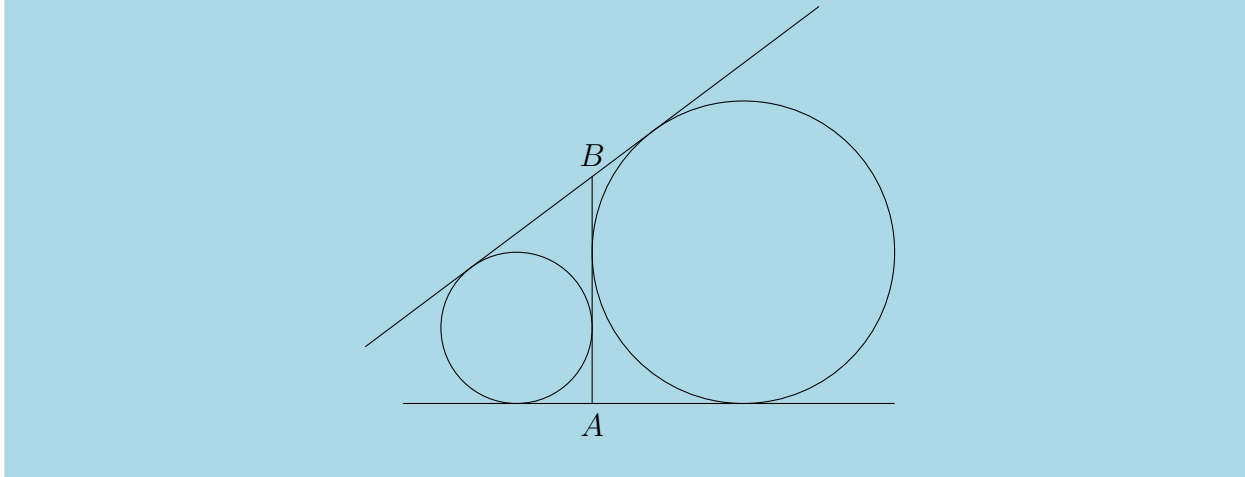
ami nem lehetséges, hiszen $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ és feltettük, hogy t pozitív, vagyis a pénzeknek van értéke. Tehát a b) feltételnek megfelelő átváltási arány nem létezik.

Második megoldás. Tegyük fel, hogy Csaba vagyona a legértékesebb, azaz $C > A$, és $C > B$.

Ekkor az is igaz, hogy $3C > 2A + B$, ami azt jelentené, hogy 2400 garas + 2400 tallér > 2400 garas + 2500 tallér, ami nem lehetséges.



4. Két kör érint két egyenest és a két egyenest összekötő AB szakaszt. Az AB szakasz merőleges az A pontot tartalmazó egyenesre. Bizonyítsd be, hogy a két kör sugarának összege egyenlő az AB szakasz hosszával!



Két egyszerű állítást többször is használni fogunk a megoldásban.

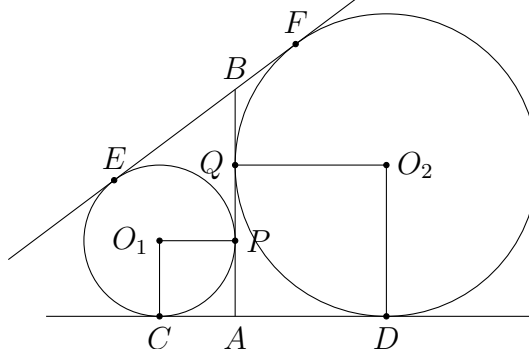
- Ha egy külső pontból érintőket húzunk egy körhöz, akkor a külső ponttól az érintési pontokig tartó érintőszakaszok hossza egyenlő.

Ez egyszerű következménye annak, hogy a kör középpontját a külső ponttal összekötő egyenesre szimmetrikus a két érintőszakasz.

- Ha egy külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egymásra merőlegesek, akkor az érintőszakaszok hossza egyenlő a kör sugarával.

Ez azért igaz, mert a kör középpontja, a két érintési pont és a külső pont együtt egy négyzet négy csúcsa, hiszen egy olyan négyszöget határoznak meg, amelynek három szögéről tudjuk, hogy derékszög, és van két szomszédos oldala, amelyek hossza egyenlő.

Elnevezzük az ábrán az összes érintési pontot illetve a körök középpontját, majd alkalmazzuk a fenti állításokat. Az O_1 középpontú kör sugara r , az O_2 középpontú kör sugara R .



Mivel O_1CAP és ADO_2Q négyzetek, ezért $CA = r$ és $DA = R$, tehát $CD = CA + AD = r + R$. Az O_1O_2 egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el a CD és EF érintőszakaszok, ezért $EF = CD = r + R$. Az AB szakasz hosszát kétféle módon kifejezve és az első segédállítást használva:

$$AB + BE = AP + PB + AQ + QB = AC + CE + AD + DF = AC + AD + CE + DF = 2(r + R),$$

tehát $AB = r + R$.



5. Egy iskola fekvőtámaszversenyt rendez. Az első fordulóban 8 gyerek áll fel egy körben. Minden fordulóban 1 perc alatt kell minél több fekvőtámaszt megcsinálni. Aki mindkét szomszédjánál kevesebb fekvőtámaszt csinál, annak a forduló végén ki kell állnia a körből. Viszont ha egy forduló végén két szomszédos gyerek egyikének sem kell kiállnia a körből, akkor a két gyerek közé egy újabb gyereket állítanak. A versenynek vége van, ha egy forduló után legfeljebb 3 gyerek áll a körben.

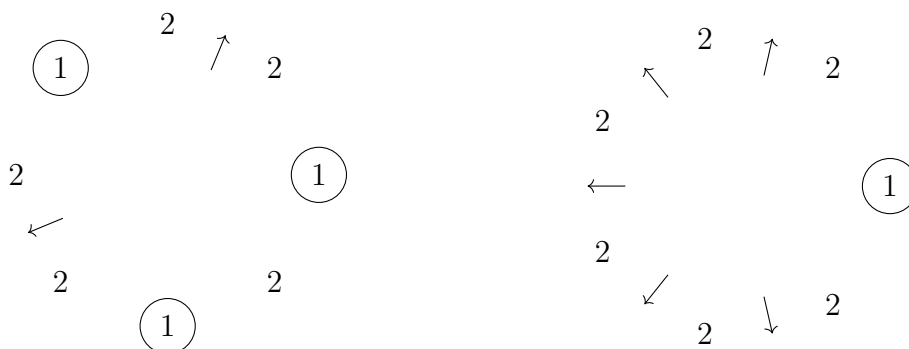
Lehet-e olyan forduló a verseny folyamán, amelyben pontosan

- (a) 11 (b) 12

gyerek áll a körben?

- a) Lehetséges. Ha az első fordulóban három gyerek esik ki (és így kettő lép be), a másodikban pedig egy esik ki (és így öt lép be), akkor a második forduló után pontosan 11-en állnak a körben.

Az alábbi ábrán karikázva jelöljük a kieső gyerekeket és nyíllal azokat a pozíciókat, ahova új gyerek fog belépni. A számérték azt mutatja, hogy hány fekvőtámaszt csinált az adott fordulóban az adott pozíción lévő gyermek.

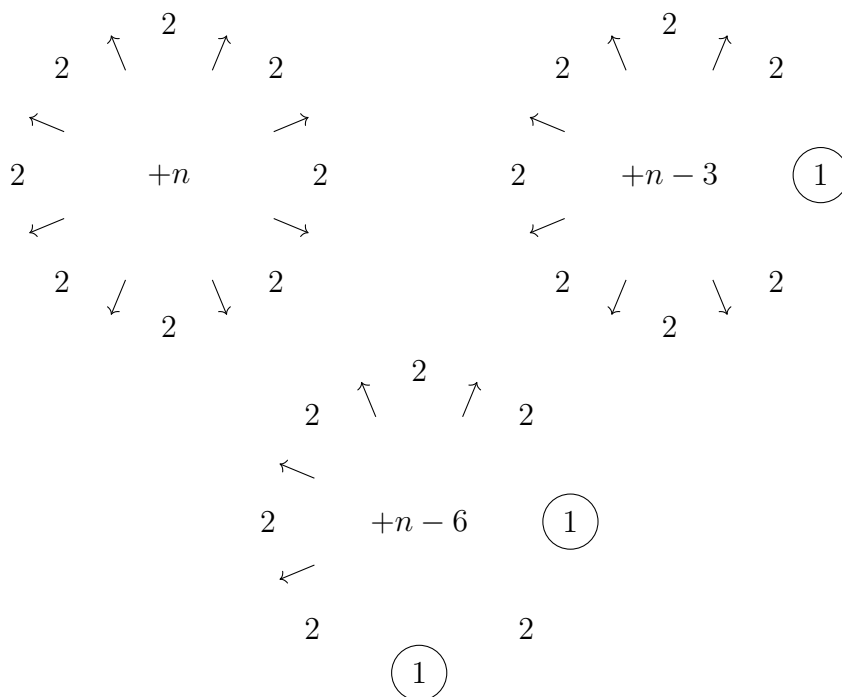


- b) Nem lehetséges. Azt fogjuk vizsgálni, hogy mennyivel változhat a gyerekek száma egy fordulóban.

Ha senki nem esik ki, akkor bármely két gyerek közé belép egy új. Ha eredetileg n gyerek állt a körben, akkor a forduló után ez n -nel nő.

Ha pont egy gyerek esett ki, akkor az előbbiekhöz képest ez 3-mal kisebb növekményt jelent, mert a kieső ember mellett még elvesztünk két belépőt is, akik kieső gyerek és a szomszédai közé léptek volna be.

Minden újabb kieső gyermek további hárommal csökkenti a növekményt (megengedve a negatív növekményt, vagyis a csökkenést is). Ez azért igaz, mert a kiesők (karikázottak) soha nem lehetnek szomszédosak körben, hiszen két szomszédos gyermek közül csak az egyik csinálhatott kevesebb fekvőtámaszt a másiktól.



Általánosságban ha egy fordulóban n gyerek áll a körben és közülük m fog kiesni (mert mindkét szomszédjánál kevesebb fekvőtámaszt nyom, vagyis „karikázott”), akkor a következő fordulóban $n + (n - 3m) = 2n - 3m$ gyerek lesz a körben (feltéve, hogy kezdetben n több volt mint 3, és azt, hogy m nem több, mint n fele, hiszen szomszédos gyerekek nem eshetnek ki).

A lényeges észrevétel az, hogy a létszám változása $(n - 3m)$ és a jelenlegi létszám (n) 3-mal osztva azonos maradékot ad. (Itt a változást előjeles értéként értjük, azaz -2 hárommal osztva 1-et ad maradékul.)

Mivel kezdetben 8 gyerek áll a körben, és 8 hármassal maradéka 2, ezért a második fordulóban a létszám hármassal maradéka biztosan 1 ($2 + 2 = 4$ 1 maradékot ad hárommal). Tovább folytatva a harmadik fordulóban a létszám hármassal maradéka biztosan $1 + 1 = 2$. Innen a létszám hármassal maradéka már ismétlődik: $2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$ és látható, hogy a maradék soha nem lesz nulla, tehát a létszám soha nem lehet 12. 