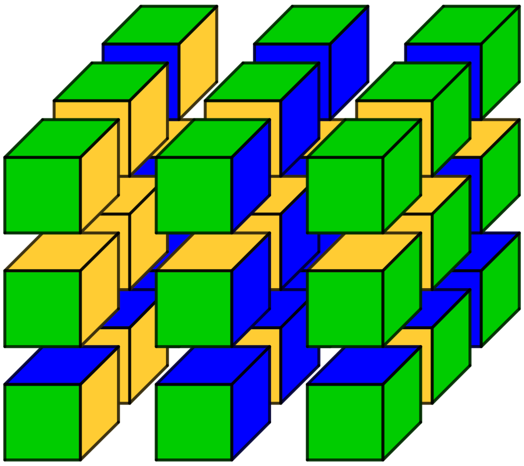
# Szűcs Gábor: A kockák világa



# Tartalomjegyzék

# A kockák világa

Talán nincs olyan diák, aki a térgeometria szó hallatán a szép, érdekes és kreatív feladatokra gondolna. Ez nem csoda, hiszen a tantervben az erre jutó idő meglehetősen csekély. Egy átlagos diák találkozik az egyszerűbb testekkel (kocka, téglatest, hasáb), tanul valamennyit a felszín- és térfogatszámításról, és ezzel végére is ért az általános iskolás térgeometria anyagnak. Ezek alapján joggal gondolhatja bárki, hogy ez egy meglehetősen unalmas és poros része a matematikának. Szeretnénk megmutatni, hogy ez nincsen így.

Az alábbiakban a térgeometriának egy szűk szeletét dolgozzuk fel. A kiadvány fókuszában a kockákból épített konstrukciók állnak. Mintegy 50 feladat szól erről, ez első látásra meglepőnek tűnik. Bár a téma valóban szűk, a bejárást alaposnak, szerteágazónak szánjuk. A konstrukciók mellett előkerülnek bizonyítások, találkozhatunk különféle módszerekkel is: rekurzív megközelítés, kettős leszámlálás, becslés stb.

A kiadvány tanároknak készült, mégis hiányoznak belőle a hosszú elméleti fejtegetések, elemzések. Ennek oka a felfedeztető módszer iránti elkötelezettségünk. Hisszük, hogy egy diák igazán akkor ismerhet meg valamit, ha lehetősége van gondolkozni rajta, saját maga fedezheti fel az összefüggéseket. Ennek szellemében az általunk készített anyag törzsét a feladatok alkotják. Kis egységekben követik egymást, a megoldásoknál olvashatóak azok a kommentárok, megjegyzések, amelyek kiemelik, magyarázzák az egyes feladatok, kérdések szerepét. A kommentárok a diákoknak is szólnak, míg a megjegyzések módszertani javaslatokat tartalmaznak.

Az anyag mélyebb elsajátítását segítik a fejezetek végén található gyakorlatok. Ezek színesítik a feladatokat, általában nem szükségesek a későbbiek megértéséhez (amennyiben igen, akkor hivatkozunk rájuk). Nemcsak gyakorlatok, hanem kérdések is előfordulnak az egyes fejezetekben, ezek a feladatokhoz kapcsolódó, természetes folytatások. Különbség a gyakorlatokhoz képest, hogy megoldásuk nehéz, általában meghaladja az általános iskolai kereteket, sőt, megoldatlan kérdések is szerepelnek köztük. Segítségükkel képet alkothatunk a felsőbb matematikával való kapcsolatokról is.

Néhány általános kérést, megjegyzést szeretnénk tenni. Fontosnak tartjuk, hogy a feladatokon gondolkozzanak, igazán csak úgy élvezhető a megoldás, ha látjuk az odavezető út nehézségeit is. A feladatok egymásra épülnek, egy-egy megoldásnál feltételezzük, hogy az Olvasó birtokában van az addig leírt ismereteknek. Emiatt javasoljuk a kiadvány lineáris olvasását.

A kiadvány készítése során többekkel gondolkodtam közösen a feladatokról, közülük Nagy Kartal és Fehér Zsombor értékes gondolatait szeretném kiemelni. Végezetül köszönetemet szeretném kifejezni Juhász Péternek, Hujter Bálintnak és Kutas Péternek. Az ő tanácsaikra, feladatjavaslataikra, észrevételeikre jelentős mértékben támaszkodtam az anyag összeállítása során. Részvételük indokolja a többes szám első személy használatát is. Természetesen a hibákért a szerzőt terheli felelősség.

Szűcs Gábor

Szikszó, 2016. május 10.

## Bemelegítő konstrukciók

Az alábbiakban egyszerű konstrukciók megvalósítását várjuk a diákoktól. A feladatok egyszerűek, de spekulatív úton nem könnyű megtalálni a megoldást. A gondolkozáshoz mindenképpen szükséges, hogy valódi, megfogható kockákkal[1] dolgozzunk. Ezért ezen a ponton a Kedves Olvasót is kérjük, hogy az alábbi építményeket próbálja meg elkészíteni a gyakorlatban is. Ehhez jó szolgálatot tehet, ha van nálunk nagyobb mennyiségű dobókocka, de ennek hiányában akár kockacukorral is bátran kísérletezhetünk.

Az alábbi feladatokban két kockát szomszédosnak nevezünk, ha van közös, érintkező lapjrészük (a csak élben érintkező kockákat nem tekintjük szomszédosaknak). További feltétel, hogy a kockákat összefüggően helyezzük el.

**1. feladat.** *a) Helyezzünk el* 8 *kockát úgy, hogy mindegyiknek páratlan sok szomszédja legyen.*

*b) Próbáljuk meg elérni, hogy páros sok szomszédja legyen a kockáknak.*

**2. feladat.** *Helyezzünk el* 8 *kockát úgy, hogy mindegyiknek pontosan* 4 *szomszédja legyen.*

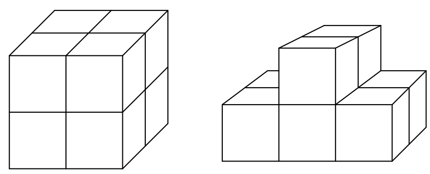
**3. feladat.** *a) Helyezzünk el* 9 *kockát úgy, hogy mindegyiknek pontosan* 3 *szomszédja legyen.*

*b) Mit mondhatunk akkor, ha azt szeretnénk elérni, hogy minden kockának pontosan* 4 *szomszédja legyen?*

### Megoldások

**1. feladat. a)** Az első kérdésre könnyen találhatunk megoldást, hiszen egy $2 \times 2 \times 2$-es kocka is megfelelő (természetesen sok más jó megoldás is létezik).

**b)** Ebben az esetben is többféle építmény hozható létre, mi egyet mutatunk (1. ábra).



1. ábra. a) $2 \times 2 \times 2$-es kocka; b) T-betű

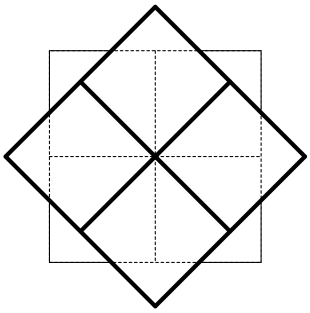
*Megjegyzés:* A feladat az alapvető fogalmakkal való ismerkedést szolgálja, a megoldás minden diák számára elérhető.

**2. feladat.** A 2. ábrán látható konstrukció kielégíti a feltételeket. A könnyebb érthetőség kedvéért a testet felülnézetből ábrázoltuk.

*Kommentár:* Zsákutcába jutunk, ha tengelypárhuzamos példában gondolkodunk. A jó megoldáshoz vezető döntő momentum az, amikor ezt az (egyébként megszokott) feltételezést elhagyjuk.

*Megjegyzés:* Segítségképpen elárulhatjuk azt, hogy nem tengelypárhuzamos kockákban érdemes gondolkodni.

[1] Nagyobb taneszköz boltokban széles választék áll rendelkezésre a célnak megfelelő kockákból.



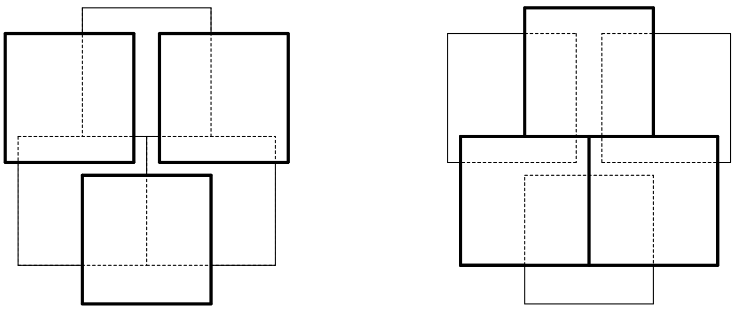
2. ábra. 8 kocka, $4-4$ szomszéddal (felülnézet).

**3. feladat. a)** A feltételeket semmilyen test sem elégíti ki. Indirekten okoskodunk. Tegyük fel, hogy létezik a feltételeket kielégítő test. Számoljuk meg a szomszédságokat. Kockánként 3 van, tehát összesen $9 \cdot 3$, de minden szomszédságot pontosan kétszer számoltunk, tehát osztanunk kell kettővel. Ezek szerint $\frac{9 \cdot 3}{2} = 13,5$ szomszédság lenne. A szomszédságok száma viszont nyilvánvalóan egész. Ezzel ellenmondásra jutottunk, tehát az indirekt feltevésünk hamisnak bizonyult. Így az állítást beláttuk.

*Kommentár:* Nem az a meglepő, hogy nem tudtuk megoldani a feladatot, hanem az, hogy egyszer és mindenkorra be is tudjuk látni a megoldási próbálkozások lehetetlenségét.

*Megjegyzés:* A konstrukciók megbeszélése során mindenképpen érdemes tisztázni, hogy ez a feladat nem megoldható. A bizonyítás megbeszélése opcionális, akkor érdemes ezt tenni, ha a diákok már láttak lehetetlenségi bizonyítást.

**b)** A feladat megoldható, bár kifejezetten nehéz a konstrukció megtalálása. A nehézséget az okozza, hogy a megszokottaktól eltérően 3 szintes épületet kell építenünk.[2] A 3. ábrán a könnyebb áttekinthetőség érdekében szintenként, felülnézetből ábrázoltuk a konstrukciót.



3. ábra. Alsó és középső (*balra*), illetve középső és felső szint (*jobbra*).

## Csatlakozó kérdések

**4. gyakorlat.** *Adott $n$ kocka, azt szeretnénk, hogy mindegyiknek páratlan sok szomszédja legyen. Milyen $n$ esetén tudjuk megoldani a feladatot?*

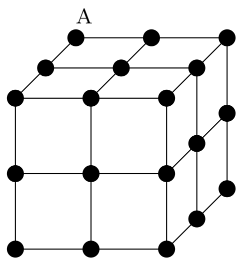
**5. kérdés.** *Adott $n$ kocka, azt szeretnénk, hogy mindegyiknek pontosan 4 szomszédja legyen. Milyen $n$ esetén tudjuk megoldani a feladatot?*

[2] Sejtésünk szerint nem létezik kétszintes konstrukció.

## Nehezebb problémák

Ha a diákok már otthonosan mozognak az egyszerűbb feladatok között, akkor érdemes nehezebb problémákkal is kísérletezni. Az alábbi problémáknál nem elég a mechanikus próbálgatás a megoldások megtalálásához. A fejezetben fontos szerepe van a csatlakozó kérdéseknek, segítenek elmélyíteni a megoldásokban használt gondolatmeneteket.

**6. feladat.** *A nem túl távoli jövőben járunk, az emberiség már meghódította a világűrt. Történetünk főszereplője egy űrhajós, aki egy* 27 *kabinból álló űrállomáson él. A kabinok* $2 \times 2 \times 2$*-es kocka csúcsaiban vannak, a szomszédos kabinokat között átjárók találhatóak (a megfelelő élek mentén), ezeken keresztül közlekedhet az űrhajós. Hősünk éppen az* $A$*-val jelölt csúcsból a vele szemköztibe szeretne eljutni. Hányféle különböző módon teheti ezt meg, ha közben nem szeretne távolodni a céljától?*




4. ábra. Az űrállomás.

**7. feladat.** *Az alábbiakban két kockát akkor tekintünk szomszédosnak, ha teljes lappal érintkeznek, és minden kockát tengelypárhuzamos állásban teszünk le. Továbbra is elvárjuk, hogy az épületek összefüggőek legyenek.*

*a) Helyezzünk el* 16 *kockát úgy, hogy mindegyiknek páratlan sok szomszédja legyen.*

*b) Az a) feladatot valósítsuk meg úgy, hogy minél több kocka legyen a második szinten.*

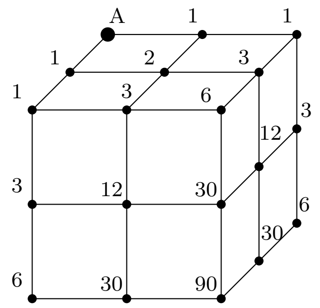
**8. feladat.** *Építsünk minél kevesebb kockából egy olyan építményt, amelynek mindhárom vetülete egy* $3 \times 3$*-as négyzet. (A kockáknak tengelypárhuzamosaknak kell lenniük.)*

*b) A Nemzetközi Űrállomás űrhajósainak is megtetszett ez a probléma. Nekik azonban könnyebb dolguk van, hiszen az ő kockáik lebeghetnek is. Vajon ők hány kockával tudják megoldani a feladatot?*

### Megoldások

**6. feladat.** Használjuk az 5. ábra jelöléseit.

Feltehetjük, hogy az űrhajós az $A$ csúcsból indul. Első észrevételünk, hogy csak előre, jobbra és lefelé mehet az éleken, különben távolodna a céljától. Ezután azt vizsgáljuk meg, hogy a közelebbi csúcsokhoz hányféle módon juthat el. Nyilván az $A$ csúcs szomszédaiba csak egyféleképpen. Ha egy olyan újabb csúcsot vizsgálunk, amelybe a lehetséges érkezési csúcsokba menő utak számát ismerjük, akkor itt is meghatározhatjuk a lehetőségeket, ez éppen az érkezési csúcsokba menő utak számának összege. Így az 5. ábra szerinti számolás adja a helyes választ, 90 különböző útvonal között választhat az űrhajós.




5. ábra. Az űrhajós útjai.

*Kommentár:* A megoldás döntő gondolata az, hogy nem az eredeti, nehéz problémát szeretnénk megoldani, hanem előbb a kisebb részfeladatokkat. Ezt a módszert hívjuk *rekurzív megközelítés*nek.

*Megjegyzés:* A feladatot csak akkor érdemes feladni, ha az analóg síkbeli példával már találkoztak a diákok.

**7. feladat. a)** A feladat számtalan módon megoldható, az alábbiakban mutatunk három lehetséges konstrukciót (6. ábra). Az építményeket felülnézetben ábrázoljuk, a táblázatokban szereplő számok jelölik az ott lévő kockák számát.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | | | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | | 2 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 1 | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | 1 | | 1 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | |

6. ábra. 3 különböző megoldás: a) rekurzív; b) szimmetrikus; c) egyszintes.

*Kommentár:* A legtöbb megoldás (általában) az a) ábrán látható konstrukcióra hasonlít. A megoldás megtalálása során szintén rekurzívan gondolkodunk (6. feladat). Először csak néhány kockát helyezünk el jól, majd a már meglévő építményt igyekszünk bővíteni.

*Megjegyzés:* A diákok megoldásait érdemes felírni a táblára az általunk is használt felülnézeti ábrázolásban. A megoldásokat közösen ellenőrizzük le, beszéljük meg, hogy egy-egy konstrukció miért hibás. Néhány típushibára mutat példát a 10. gyakorlat.

**b)** 8 kockánál több nem kerülhet a második szintre. Ez el is érhető, a 7. ábrán látható egy építmény a megszokott, felülnézeti ábrázolásban.

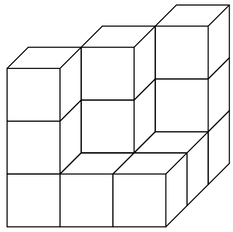
| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | | 2 |
| 2 | 2 | 2 |

7. ábra. 8 kocka a második szinten.

*Megjegyzés:* Bár 8 az elérhető maximum, a részeredmények is értékesek, ezeket is érdemes meghallgatni, értékelni.

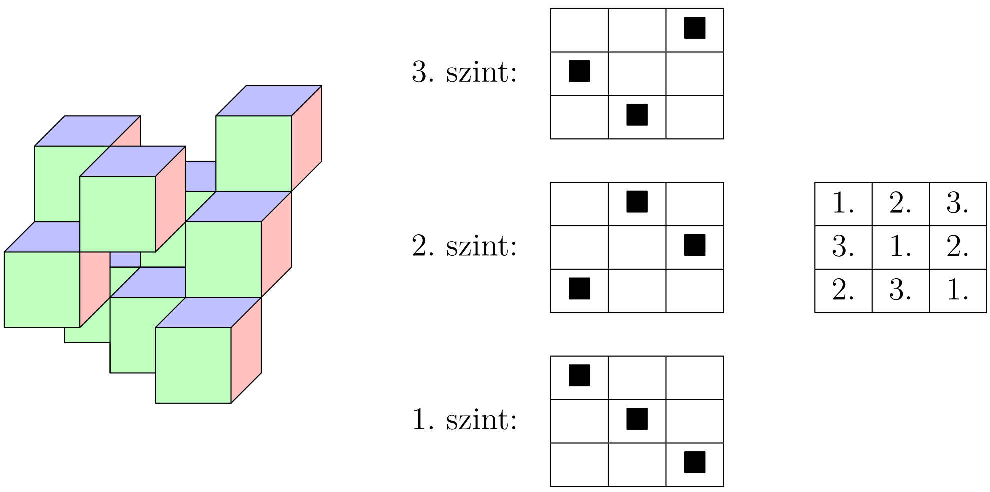
A feladat a 3. feladat b) részéhez hasonlóan lekötő feladat, nem baj, ha csak a legjobbaknak jut ideje gondolkozni rajta.

**8. feladat. a)** Mivel a felülnézet is teljes négyzet, ezért a teljes alsó szintet kénytelenek vagyunk kitölteni (9 kocka). Elölnézetben lefedetlen marad egy $2 \times 3$-as téglalap, ehhez szükség van még legalább 6 kockára. 15 kockával meg is oldható a feladat (8. ábra).



8. ábra. Mindhárom irányú vetület egy-egy teljes négyzet.

**b)** Az űrhajósoknak is szükségük van legalább 9 kockára. Ez elég is a feladat megoldásához (9. ábra).




9. ábra. Háromféle ábrázolás: a) térbeli; b) szintek szerinti; c) alaprajzi.

*Megjegyzés:* Ez az első feladat, ahol a diákok kénytelenek elképzelni a feladatot, hiszen a valóságban csak nehézkesen tudják kipróbálni az elgondolásaikat. Előfordulhat, hogy ez néhány diáknak nehézséget okoz, érdemes erre felkészülni. A gondolkozást segítheti az átlátszó, esetleg színes kockák alkalmazása. Hasznos, ha a diákok le is rajzolják a konstrukciójukat (akár az ábrán látható módok valamelyikén).

## Csatlakozó kérdések

**9. gyakorlat.** *Tudjuk, hogy az űrhajós* 90 *különböző útvonal közül választhat a 6. feladatban. Melyik ezek közül a legrövidebb út?*

**10. gyakorlat.** *Megadunk néhány felülnézeti megoldást a 7. feladathoz (10. ábra). A megoldások közül csak az egyik jó. Állapítsuk meg fejben, hogy melyek hibásak.*

**11. gyakorlat.** *A 8. feladat b) részében adott konstrukcióban, az egyik szinten átlóban raktuk le a kockákat. Van-e olyan kostrukció, amely ezt elkerüli (tehát egyik szintjén sem fordul elő átló)?*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 |
| | | 1 | 1 | 1 |
| | | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| | 1 | | | 1 |

a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | 1 | | 1 | |

b)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 1 | 2 |
| | | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | | | 1 |

c)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 |
| | 1 | 2 | 1 |
| | 2 | 1 | 2 |
| | 1 | | |

d)

10. ábra. Felülnézeti megoldások.

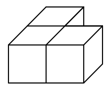
**12. gyakorlat.** *A 8. feladat űrhajósai most azt szeretnék elérni, hogy minden vetületet legalább kétszeresen lefedjenek a kockák. Hány kockára van szükségük?*

## A tér kitöltése

A fejezet feladatai a tér parkettázásáról szólnak, ez kitérőt jelent a többi feladathoz képest. Eltávolodunk a konkrét, kézzelfogható feladatoktól, fel kell készülnünk arra, hogy ez a legtöbb diáknak nehézséget okoz. Az alábbi feladatok jól illusztrálják, hogy a matematika nem lezárt tudomány, sok kérdés feltehető a témában, amelyekre ma sem ismerjük a választ.

Az alábbiakban a *kitöltés* fogalma alatt a tér hézagmentes, átfedés nélküli kitöltését értjük. Két kockát szomszédosnak nevezünk, hogyha van közös, érintkező laprészük (a csak élben érintkező kockákat nem tekintjük szomszédosaknak).

**13. feladat.** *Melyik az a legkisebb kocka, amely kitölthető L-betűk segítségével?*



11. ábra. Egy L-betű.

**14. feladat.** *A rácskockák felhasználásával kiparkettáztuk a teret. Szeretnénk elhagyni bizonyos kockákat úgy, hogy minden megmaradt kockának pontosan 3 szomszédja legyen. Megoldható-e ez a feladat, ha nem vehetünk el szomszédos kockákat?*

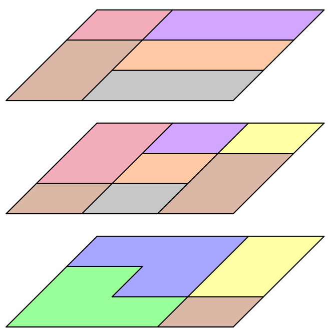
*b) Elérhető-e az, hogy minden megmaradt kockának 4 szomszédja legyen?*

**15. feladat.** *Az előző feladatban láttuk a tér egy olyan kitöltését, ahol minden kockának pontosan 6 szomszédja volt. Van-e más kitöltés? Elérhető-e az, hogy minden kockának pontosan 8 szomszédja legyen?*

*b) Meddig tudjuk növelni a 8-at? Próbáljunk meg minél jobb konstrukciót adni!*

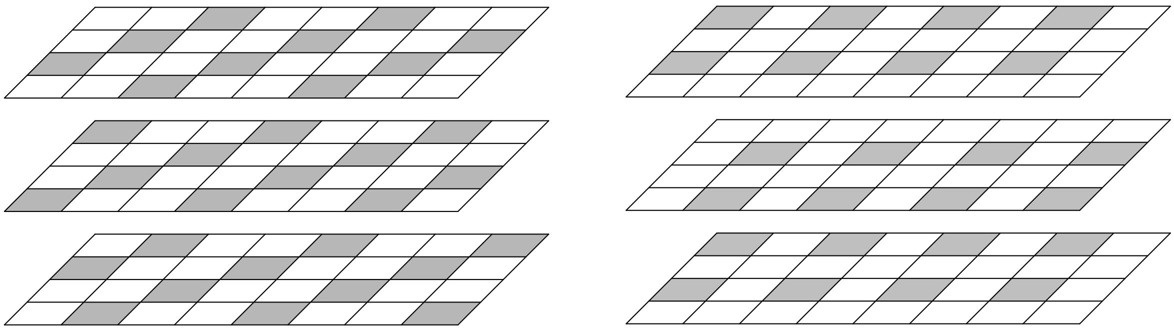
### Megoldások

**13. feladat.** Mivel egy L-betű 3 kiskockából áll, ezért egy $2 \times 2 \times 2$-es kocka biztosan nem tölthető ki velük, hiszen 8 nem osztható 3-mal. Egy $3 \times 3 \times 3$-as kockát ki tudunk tölteni. Az alábbiakban mutatunk egy lehetséges elrendezést. A 12. ábrán 3 szintre osztottuk a kockát, és a szintek alaprajzát rajzoltuk meg. Az azonos színű négyzetek alkotnak egy-egy L-betűt.



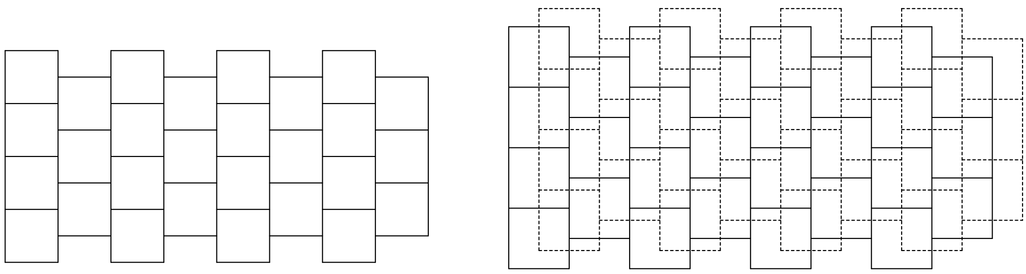
12. ábra. Kocka kitöltése L-betűkkel.

**14. feladat.** Mindkét feltétel megvalósítható, az alábbiakban mutatunk egy-egy megoldást (13. ábra). Az ábrán a rácsot szintenként, alaprajzi nézetben ábrázoljuk, a szürkével jelölt kockákat hagyjuk el.



13. ábra. Térbeli rács 3, illetve 4 szomszéddal.

**15. feladat.** Meglepő, de a feladat megoldható úgy is, hogy minden kockának pontosan 8 szomszédja legyen. A megoldás szintenként ugyanaz, egy szint alaprajza a 14. ábrán látható. A szomszédok száma növelhető, az is elérhető, hogy minden kockának 14 szomszédja legyen.[3] Ekkor minden második szintet elcsúsztatunk, tehát a konstrukció két különböző szint ismétlődéséből áll. Ezt a két szintet is a 14. ábrán láthatjuk.



14. ábra. Parkettázás 8, illetve 14 szomszéddal.

*Kommentár:* Bár a feladatnak nem része, de könnyen beláthatjuk, hogy nem tudjuk úgy kitölteni a teret, hogy minden kockának 5 szomszédja legyen (minden laphoz különböző szomszéd tartozik). Az is végiggondolható, hogy a szomszédok számát tetszőlegesen választhatjuk meg 6 és 14 között.

*Megjegyzés:* Az előző két feladat nem valósítható meg a gyakorlatban, hiszen nincsen végtelen sok kockánk. Ennek ellenére fontos, hogy a diákok kísérletezzenek, a szabályosságok felfedezésére elég néhány kockával próbálkozni.

Hasonló kérdésekkel ma is foglalkoznak matematikusok, sok kérdés közülük megoldatlan, bővebben erről a 17. kérdésnél írunk.

## Csatlakozó kérdések

**16. kérdés.** *Elérhető-e az, hogy bizonyos kockák elhagyása után a megmaradó kockák mindegyikének pontosan* 5 *szomszédja legyen?*

*b) Mit mondhatunk a többi esetben (*2, 1 *és* 0 *szomszéd esetén)?*

**17. kérdés.** *A 15. feladat példáin mindig voltak olyan kockák, amelyek teljes lappal találkoztak. Minden parkettázás esetén találhatunk ilyen kockákat?*

[3] Nem tudjuk, hogy elérhető-e az, hogy minden kockának 15 szomszédja legyen (*a szerző megjegyzése* ).

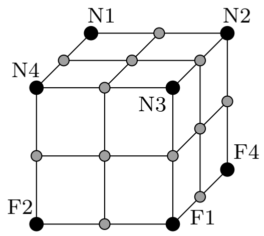
## Festők és űrhajósok

A fejezetben szereplő feladatok közös jellemzője a mesebeli környezet. Ezt több szempontból is hasznosnak tartjuk. Használható a mese egy-egy feladat érdekesebbé tételére (19. feladat), de segíthet abban is, hogy a problémák lényeges vonását emelje ki. Emellett arra is alkalmas, hogy összekössön feladatokat, amelyek a közös történet nélkül távol lennének egymástól a diákok fejében (6. és 20. feladat).

**18. feladat.** *Az altdorfi vidámparkban a Tell Vilmos Emlékverseny legnépszerűbb játéka egy speciális céllövölde.* 27 *darab,* $3 \times 3 \times 3$*-as kocka alakban elhelyezett alma közepét kell eltalálni minél kevesebb nyíllövéssel. Többen is sikerrel jártak, az eddigi csúcs* 15 *nyíllövés. A világ legjobb íjásza is hallott a kihívásról, ezért Altdorfba utazik, hogy megdöntse a csúcsot. Hozzánk fordul segítségért, azt szeretné, ha mutatnánk neki egy tervet, amely megvalósításához a lehető legkevesebb lövésre van szükség. (Minden lövés pályája egyenes.)*

**19. feladat.** *Egy kortárs festőt anyagi gondok gyötörnek, már* 10 *hitelezője is börtönnel fenyegeti. Kétségbeesésében elhatározza, hogy élete főművét, az* 5 *méter magas és* 9 *méter széles „Nagy fekete téglalap” c. festményét szétosztja közöttük. A képet egész oldalú téglalapokra darabolja fel.*[4] *Csupán azt szeretné, hogy a keletkező képek egyediek legyenek, tehát ne legyen két azonos alakú köztük. El tudja-e érni a célját?*

**20. feladat.** *Újra a világűrben járunk, a 6. feladatban szereplő űrállomás legénysége* 7 *fővel bővült, így most* 4 *férfi és* 4 *nő lakik a bázison. Az űrhajósok a 15. ábrán jelölt kabinokban laknak, ám a kabinok közötti átjárókat biztonsági okokból lezárták. Az űrséták során szerelem szövődik, két (átellenes csúcsban lakó) űrhajós egymásba szeret. A NASA engedélyezi, hogy néhány átjáró megnyitásával folyosót hozzanak létre a két kabin között. Eltelik egy-két hónap, és még két, átellenes csúcsban lakó űrhajós is egymásba szeret. Majd ugyanez újra megismétlődik. Megoldható-e az újabb folyosók kialakítása, ha két folyosó nem érintheti ugyanazt a kabint?*

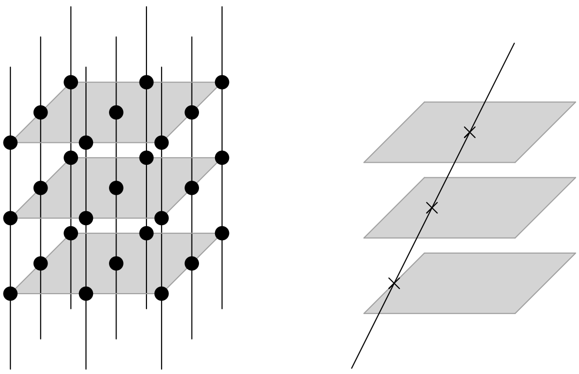



15. ábra. Űrhajósok és kabinjaik.

### Megoldások

**18. feladat.** Fogalmazzuk át a feladatot. Mese nélkül az a kérdés, hogy legkevesebb hány egyenessel fogható le a feladatban szereplő 27 pont. 9-cel könnyen megoldható (16. ábra). Bármilyen ügyes is a világ legjobb íjásza, ennél kevesebbel ő sem tudja megoldani. Megmutatjuk, hogy egy egyenes legfeljebb 3 ponton mehet át, ez elég is lenne az állítás bizonyításához. Elforgathatjuk úgy az ábrát, hogy az egyenes ne legyen vízszintes. Ekkor a pontokat – a 16. ábrán látható módon – három vízszintes szintre bonthatjuk. Az egyenes minden szintet legfeljebb egyszer érinthet, ezért legfeljebb 3 ponton mehet át. Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

[4] Így keletkezik a „Kis fekete téglalapok” c. sorozat.



16. ábra. a) 9 lövés elég; b) Egy lövés legfeljebb 3 almát találhat el.

*Kommentár:* Már a 9. gyakorlat megoldása során szembesülhettünk a *szintekre bontás* előnyeivel, ennél a feladatnál ez még élesebben mutatkozik meg.

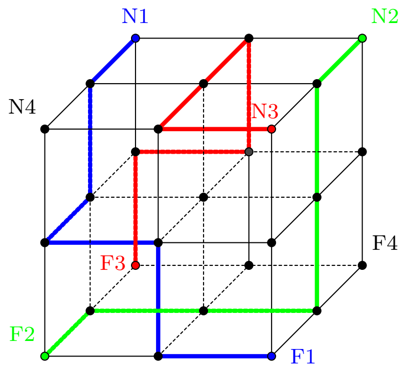
**19. feladat.** A festő nem tudja teljesíteni a feladatát. A 10 legkisebb területű téglalap a következő:

$$1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, 1 \times 4, 2 \times 2, 1 \times 5, 1 \times 6, 2 \times 3, 1 \times 7, 1 \times 8 \text{ vagy } 2 \times 4.$$

Ezek területeinek összege: $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 = 46$. Ez azonban több, mint az eredeti téglalap területe, tehát a feladat megoldhatatlan.

*Kommentár:* A feladatsorban ez a második példa lehetetlenségi bizonyításra. Ez az első alkalom, ahol a *becslést*, mint megoldási módszert használjuk.

**20. feladat.** Két párra a megoldás egyszerű, három párra lényegesen bonyolultabb, de megvalósítható. Erre az alábbiakban mutatunk egy példát (17. ábra).




17. ábra. Három pár közti útvonalak.

Négy párra a feladat megoldhatatlan. Indirekten tegyük fel, hogy mégis megvalósítható a tervünk. Felhasználjuk, a 9. feladat eredményét. Ezek szerint egy tetszőleges útvonal legalább 7 kabinon megy keresztül. Mivel két útvonal nem mehet át ugyanazon a kabinon, ezért a négy útvonalhoz összesen $4 \cdot 7 = 28$ kabinra lenne szükség. Ez lehetlen, hiszen összesen csak 27 kabin van a állomáson.

*Kommentár:* A megoldás lényeges ötlete ismét a *becslés*. A gondolatot a 19. feladat készítette elő.

*Megjegyzés:* Két párra fejben is megtalálható a megoldás. Három pár esetén azonban lényegében reménytelen a diákok számára az, hogy fejben eljussanak a megoldásig. Ezért ennél a feladatnál újra fontos szerepet játszanak az eszközök.[5]

A feladat nehezebb a 9. gyakorlat megoldásának ismerete nélkül. Emiatt javasoljuk, hogy a feladat mindenképpen a gyakorlat megbeszélése után következzen (de ne közvetlenül). A két probléma közti kapcsolat felfedezését segíti a közös történeti háttér is.

### Csatlakozó kérdések

**21. gyakorlat.** *Melyik az a legkisebb területű téglalap, amelyet* 10*, páronként különböző alakú téglalapra lehet osztani?*

**22. gyakorlat.** *A világ legjobb íjásza először a testátló almáit lőtte át (18. feladat). Teljesítheti-e a célját további* 8 *lövéssel?*

[5] Olyan építőjáték használatát javasoljuk, amelyben meg lehet építeni egy-egy test élvázát.

## Dobókockák

*Szabályos dobókockának* nevezzük azokat a kockákat, ahol a szemközti lapokon lévő számok összege 7. Ha egy dobókocka számozását várjuk el a diákoktól, akkor szeretnénk, hogy minden szám pontosan egyszer szerepeljen, de nem várjuk el, hogy a szemközti lapokon 7 legyen az összeg.

**23. feladat.** *8 szabályos dobókockából összeállítunk egy $2 \times 2 \times 2$-es kockát. Milyen határok között változhat a felszínen látható pöttyök száma?*

**24. feladat.** *Megszámoztunk 8 dobókockát tetszőlegesen (minden számot pontosan egyszer használtunk 1-től 6-ig). A belőlük összeállítható $2 \times 2 \times 2$-es kockán látható pöttyök maximális száma 99. Mennyi az elérhető legkisebb érték?*

**25. feladat.** *Szabályos dobókockákból összeragasztunk egy $3 \times 3 \times 3$-as kockát. Azonban csak az azonos számozású lapjaik ragadnak össze. Mekkora lehet a felületen lévő pöttyök összege?*

### Megoldások

**23. feladat.** Egy kiskockán egy csúcs körüli lapok láthatóak. A látható számok összege a következő lehet:[6] $6\,(1+2+3), 7\,(1+2+4), 9\,(2+3+4), 10\,(1+4+5), 11\,(2+3+6), 12\,(2+4+6), 13\,(2+5+6), 15\,(4+5+6)$). Tehát a pöttyök összege $6 \cdot 8 = 48$ és $15 \cdot 8 = 120$ között változhat. Könnyen látható, hogy az előző számokból bármely 48 és 120 közötti szám előállítható.

**24. feladat.** Az egy kockán lévő számok összege $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. A 8 kockán lévő összeg 168. Legyen a $2 \times 2 \times 2$-es kockán látható számok összege $A$. Fordítsunk meg minden kockát úgy, hogy az eddig nem látható lapjaik felszínre kerüljenek. Legyen az így kapott összeg $B$. $A + B = 168$, hiszen minden kiskocka lap pontosan egyszer szerepelt a külső felszínen. A minimális értéket akkor kapjuk meg, amikor a maximális értéket adó helyzetben fordítjuk meg a kockákat, tehát a lehetséges minimum értéke $168 - 99 = 69$.

*Megjegyzés:* Nem triviális kérdés, hogy valóban elérhető-e az, hogy a maximális összeg 99 legyen, erről szól a 26. gyakorlat.

**25. feladat.** Az összeg állandó lesz. Tekintsük egy tetszőleges kiskocka egy külső lapját. Legyen az ezen lévő szám $x$, az ezzel szemközti szám $7 - x$, tehát az odaragasztott kockán is ez áll. A ragasztott kocka másik oldalán újra $x$ áll, míg a hozzá ragasztott kiskocka külső lapján $7 - x$. Tehát egy tetszőleges lappal szemközti lapon a számok összege 7. Így az összes szám összege $7 \cdot 27 = 189$.

### Csatlakozó kérdések

**26. gyakorlat.** *Hogyan kell a kockákat megszámozni 1-től 6-ig úgy, hogy minimális legyen egy $2 \times 2 \times 2$-es kocka felületén lévő pontok számának maximuma?*

**27. gyakorlat.** *Hányféleképpen lehet megszámozni egy dobókockát?*

**28. gyakorlat.** *Át tudjuk-e számozni úgy a dobókockát, hogy az egy csúcsnál lévő lapokon lévő számok összege az összes lehetséges értéket felvegye?*

[6] Megfigyelhetjük, hogy az összegek közül hiányzik a 8 és a 14. Felmerül bennünk a kérdés, hogy van-e olyan számozás, amelynél nincsen hiányzó szám. Erre a kérdésre a 28. gyakorlat ad választ.

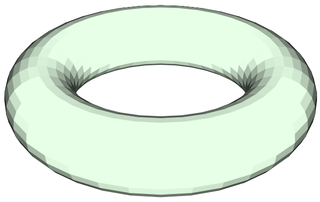
## Színes kockák

A továbbiakban kockák lapjainak színezésével fogunk foglalkozni. Először könnyebb feladatok segítségével vezetjük be a tipikus problémákat. Új fogalmakat is bevezetünk. Egy $n \times n \times n$-es kocka egy *réteg*ének nevezünk $n \times n$ kiskockát, ha a nagy kocka valamely lapjával párhuzamos „síkot” alkotnak.

**29. feladat.** *Meg tudunk-e színezni egy kockát három színnel úgy, hogy bármely nézetében látszódjon mind a három szín? (Egy nézetben a kockának egy csúcsához tartozó három lapja látszik.)*

**30. feladat.** *Igaz-e, hogy meg tudunk színezni* 8 *kiskockát két színnel úgy, hogy két különböző színű* $2 \times 2 \times 2$*-es kockát is össze tudjunk belőle állítani?*

**31. feladat.** *A 18. ábrán látható úszógumin lehet-e két kör alakú vágást végrehajtani úgy, hogy a vágások után az úszógumi egy darabban marad?*



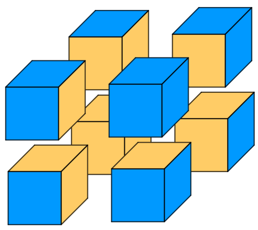
18. ábra. Egy úszógumi.

**32. feladat.** *Adott kilenc különböző színből* 3-3 *darab kocka. El tudjuk-e őket helyezni egy* $3 \times 3 \times 3$*-as kockában úgy, hogy minden rétegben csupa különböző színű kocka szerepeljen?*

### Megoldások

**29. feladat.** Létezik ilyen színezés. A kocka átellenes lapjait kell azonos színűre színeznünk. Ez a színezés megfelelő, hiszen egy szemközti lappár tartalmazza az összes csúcsot.

*Kommentár:* Könnyen meggondolható, hogy csak ez a színezés elégíti ki a feladat feltételeit.



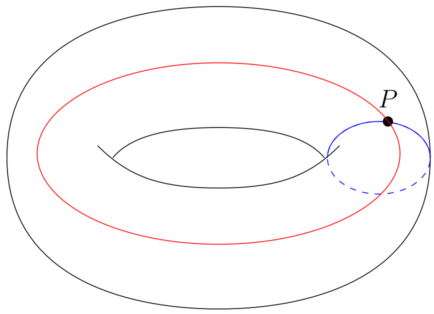
19. ábra. 8 kiskocka színezése.

**30 feladat.** Egy $2 \times 2 \times 2$-es kockának $6 \cdot 4 = 24$ külső lapja van, és ugyanennyi belső. Emiatt csak a 19. ábrán látható színezés lehet jó. Ez megfelelő is, hiszen a sárga színű kockát a csúcsoknál lévő kiskockák kifordításával könnyen megkaphatjuk.

*Kommentár:* Vegyük észre, hogy ez a gondolat már szerepelt a 24. feladat megoldásában.

**31 feladat.** A síkon lehetetlen lenne a kért feltétel megvalósítása. Az úszógumi felületén az a 20. ábrán látható módon megvalósítható. A piros és a kék vágások mindössze a $P$ pontban metszik egymást, és egymásra merőlegesen helyezkednek el. A vágás után kapott alakzat téglalap[7] lesz.

*Kommentár:* Az úszógumi felületét a matematikában *tórusz*nak nevezzük. A továbbiakban mi is ezt a kifejezést fogjuk rá használni.




20. ábra. Az úszógumi egy megfelelő szétvágása.

**32. feladat.** A feltételek kielégíthetőek. A megoldást a szintek alaprajzainak megadásával ábrázoljuk, egy-egy szám, egy-egy színnek felel meg (21. ábra).

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 7 | 8 |
| 3 | 1 | 2 |
| 6 | 4 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 2 | 4 |
| 8 | 9 | 7 |
| 2 | 3 | 1 |

21. ábra. Minden rétegben egy-egy azonos színű kocka van.

*Kommentár:* Első ránézésre a konstrukció nem tűnik olyannak, ami különösen szabályos mintázatot követne, azonban érdemes alaposabban szemügyre venni. Az első szint 1-es mezője a második szinten eggyel jobbra és eggyel lejjebb kerül. Ugyanez történik a 2-es, 4-es és 5-ös mezőkkel is. Vajon hogyan viselkedik a többi mező? A meglepő válasz az, hogy tulajdonképpen ugyanígy. Képzeljük el, hogy a négyzet szemközti oldalait összeragasztva egy tóruszt kapunk (31. feladat). A tóruszon a mezők mozgása szép és szabályos: mindegyik a jobb alsó szomszédjába kerül.

*Megjegyzés:* Néhány további konstrukcióban is segít ez a szemlélet. A tórusz szerkezetét a 36. gyakorlat segítségével ismerhetjük meg jobban.

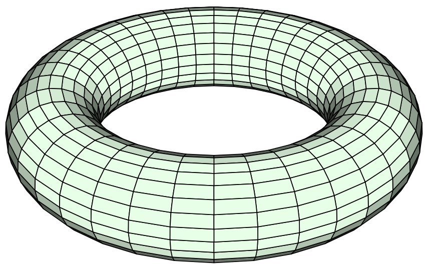
## Csatlakozó kérdések

**33. gyakorlat.** *Meg tudunk-e színezni egy kockát három színnel úgy, hogy bármely nézetében csak kettő látszódjon?*

**34. gyakorlat.** *Néhány kiskockából szeretnénk előállítni piros, sárga, illetve zöld színű* $2 \times 2 \times 2$*-es kockát (nem feltétlenül egyszerre). Legkevesebb hány kiskockát kell megszíneznünk, hogy megvalósíthassuk ezt?*

**35. gyakorlat.** *A 22. ábrán* 30-30 *rácsvonal látható. Az azonos helyzetű rácsvonalakat* 30 *különböző színnel színeztük meg. Ha szétvágjuk a felület két merőleges rácsvonal mentén, akkor hányféleképpen nézhet ki a kapott téglalap kerülete?*

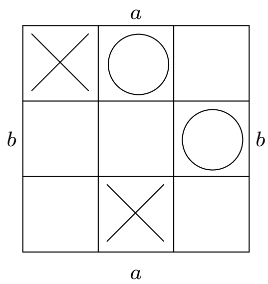
[7] Ez az állítás nem igaz, a szétvágott lapot nem lehet síkba teríteni. Azonban a kapott felület közel lesz a téglalaphoz, ezért a továbbiakban így hivatkozunk rá.



22. ábra. A rácsvonalak mentén szeretnénk szétvágni a felületet.

**36. gyakorlat.** *A megszokott* $3 \times 3$*-as amőbát játszunk egy tóruszon.*[8] *A játék egy állását a 23. ábrán láthatjuk. A tóruszt téglalapként ábrázoljuk, a szétvágott oldalakat azonos betűvel jelöltük. A körrel lévő játékos lépése következik. Van olyan lépése, amellyel azonnal nyer?*

*b) Ha ebben az állásban a második játékos lenne soron, akkor ő is tudna nyerni?*




23. ábra. A tóruszon játszott amőba egy állása.

[8] A két játékos hagyományosan $X$ és $O$ alakú jelekkel játszik. A $3 \times 3$-as táblára felváltva teszik le a jeleiket, bármelyik (még szabad) mezőre. Az nyer, akinek sikerül egy vonalban 3 jelet elhelyeznie, vízszintes, függőleges vagy átlós irányban.

## A gonosz manó

A *gonosz manó* a matematika feladatok egyik gyakori és kedvelt szereplője, ő személyesíti meg a balszerencsénket. Olyan feladatokban fordul elő, ahol arra vagyunk kíváncsiak, hogy a számunkra legkedvezőtlenebb esetekben is sikerrel járhatunk-e. A gonosz manó küldetése, hogy megakadályozza a céljaink elérését.

**37. feladat.** *Igaz-e, ha egy gonosz manó megszínezi két színnel 27 kiskocka lapjait, akkor biztosan össze tudunk rakni egy egyszínű $3 \times 3 \times 3$-as kockát?*

*b) Előírjuk a manónak, hogy minden kiskockán egyenlő arányban színezze meg a lapokat. Ebben az esetben teljesíthetjük a célunkat?*

**38. feladat.** *Van 27 fehér kiskockánk. Egy gonosz manó szeretne minél több lapot pirosra színezni, hogy mi ne tudjunk összerakni egy piros $3 \times 3 \times 3$-as kockát. Legfeljebb hány lap színezhető pirosra?*

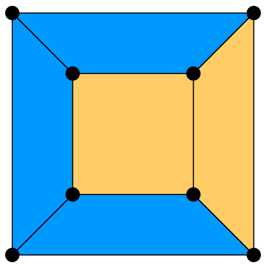
**39. feladat.** *Adott egy $3 \times 3 \times 3$-as kocka, amelynek az A csúcsánál lévő kocka piros. Egy tündér egy lépésben a kocka piros kockát tartalmazó rétegét megcserélheti egy vele szomszédos réteggel. A gonosz manó viszont előírhatja a tündérnek, hogy pontosan hány cserét hajtson végre (legalább 5-öt, de legfeljebb 10-et). A tündér célja, hogy a piros kockát az átellenes csúcsba juttassa, míg a manóé az, hogy ezt megakadályozza. Melyikük tudja elérni a célját?*

*b) Mit mondhatunk akkor, ha az a cél, hogy a piros kocka egy vele szomszédos helyre kerüljön?*

### Megoldások

**37. feladat.** A manó 13 kockát pirosra, a többit kékre színez. Ekkor nem tudunk egyszínű kockát kirakni, hiszen mindkét színű kocka látható lesz a nagy kocka felszínén.

**b)** Ebben az esetben sem érhetjük el a célkitűzésünket. Ha a manó a 24. ábrán látható módon színezi meg a kockákat, akkor nem tudjuk teljesíteni a célunkat (a kockát kiterítve ábrázoltuk, a nem látható lap sárga színű).



24. ábra. A manó által színezett kocka.

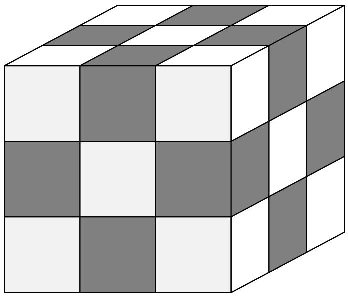
A kiskockáknak nincsen olyan csúcsa, amelyet 3 azonos színű lap venne körbe. Ez azt jelenti, hogy a $3 \times 3 \times 3$-as kocka csúcsaiba nem tudunk odaillő kockákat tenni.

**38. feladat.** A manó beszínezhet 25 kiskockát teljesen pirosra, ha a maradék két kockát üresen hagyja. Ekkor nem lehet piros kockát összerakni, hiszen az egyik üresen maradt kocka a $3 \times 3 \times 3$-as kocka felületén lesz, azaz biztosan lesz olyan lapja, amely látszódni fog.

Indokolni kell, hogy több lapot nem lehet pirosra színezni, vagyis kevesebb lapot nem lehet fehéren hagyni. Tegyük fel, hogy elég 11 lap. Ekkor a legtöbb fehér lappal rendelkező kockát tesszük középre. Majd a fehér lapok száma szerint csökkenő sorrendben betesszük a kockákat a lapok közepébe (ezt megtehetjük, hiszen ezeknek a kockáknak legfeljebb 5 fehér lapja lehet). A maradék fehér lapok száma legfeljebb 4, hiszen 7 fehér lappal rendelkező kockát már elhelyeztünk. Sőt, a maradék kockákon legfeljebb 1 fehér lap lehet (hiszen csökkenő sorrendben helyeztük el őket). A maradék (legfeljebb 4) kockát bárhova el tudjuk helyezni úgy, hogy csak a piros lapjaik látszódjanak.

**39 feladat. a)** A gonosz manó tud nyerni. Két réteg cseréjénél a piros kocka egy lapszomszédos kockába kerül. A 9. gyakorlat megoldása közben megbeszéltük, hogy a legrövidebb útvonal legalább 6 lépés hosszú. Tehát a tündér nem tud 5 cserével eljutni a céljához.

**b)** Ebben a játékban is a manó nyer. Ha bármilyen páros számú cserét ír elő, akkor a tündér nem tudja teljesíteni a célját. Ennek belátásához a 25. ábrán látható színezést használjuk. Minden egyes cserénél a fehér kockák feketébe mennek át, és fordítva. Egy fehér kocka minden második cserénél fehér színű kocka helyére kerül, emiatt páros sok cserével nem tudja a tündér a szomszédos helyre juttatni a piros kockát.



25. ábra. A kocka sakktábla színezése.

### Csatlakozó kérdések

**40. gyakorlat.** *Adott egy* $3 \times 3 \times 3$*-as kocka. Egyik élének két végén van egy-egy piros kocka. A szomszédos rétegek cseréjével elérhető-e az, hogy a két piros kocka egy testátló két végére kerüljön?*

# Lapok színezése

Ez a fejezet tartalmazza a legnehezebb és egyben a legszebb feladatokat. Ha válogatunk a kiadvány anyagából, akkor természetes döntés ezeknek a feladatoknak a kiválasztása. Ebben az esetben figyeljünk arra, hogy a fejezetbeli feladatok legfontosabb előzményeit ismerjék a diákjaink, mielőtt az alábbi feladatokon gondolkodnak. Előzmények nélkül a legtöbb diák számára elérhetetlenek az alábbi megoldások.

**41. feladat.** *Igaz-e, hogy meg tudsz színezni* 27 *kiskockát három színnel úgy, hogy* 3 *különböző színű* $3 \times 3 \times 3$*-as kockát is össze tudj belőle állítani?*

**42. feladat.** *Hogyan szól a 41. feladat általánosítása? Ha megfogalmaztad a sejtést, akkor próbáld meg bizonyítani vagy cáfolni.*

**43. feladat.** *Adott* 27 *kiskocka, ezek lapjait szeretnénk pirosra festeni. A kiskockákból összeállíthatunk egy* $3 \times 3 \times 3$*-as kockát, amit beletehetünk egy vödör festékbe. Majd átrendezhetjük, és újra megismételhetjük ezt a műveletet. Legkevesebb hány lépésben festhetjük be teljesen az összes lapot?*

## Megoldások

**41. feladat.** Legyen a három szín a piros, a sárga és a zöld. A nagy kockákhoz $6 \cdot 9 = 54$ piros lapra van szükség, a másik két színhez szintén. Összesen 162 lapot kell megszíneznünk. Ez megegyezik a 27 kiskocka lapszámával ($6 \cdot 27$). Így van esélyünk a feladat megoldására, ehhez minden lapot meg kell színeznünk.

Vizsgájuk meg a piros lapokat. Kell 8 (csúcs) kocka, amelynek 3 lapja piros, kell továbbá 12 (élközép) kocka, amelynek 2 lapja piros, illetve 6 (lapközép) kocka amelynek 1 lapja piros. Jelöljük ezeket $P^3, P^2, P^1$-gyel. A másik két színből is szükség van ugyanezekre, jelöljük ezeket a megfelelő betűkkel.

Összefoglalva az igényeinket: 8 db $P^3, S^3, Z^3$; 12 db $P^2, S^2, Z^2$; 6 db $P^1, S^1, Z^1$.

Ez megvalósítható a következő módon:

1 db $P^3, S^3$,

1 db $S^3, Z^3$,

1 db $Z^3, P^3$,

6 db $P^2, S^2, Z^2$,

6 db $P^3, S^2, Z^1$,

6 db $S^3, Z^2, P^1$,

6 db $Z^3, P^2, S^1$.

Meg kell még gondolnunk, hogy ezek a kockák jól színezhetők és a megfelelő állásba forgathatók, ennek végiggondolását az Olvasóra bízzuk.

**42. feladat.** Az előző feladat továbbgondolása, általánosítása nem egyszerű és nem is egyértelmű. Természetes gondolat, hogy a $4 \times 4 \times 4$-es kockáról mondjunk valamit. De az már kérdés, hogy 3 színnel színezzünk-e, vagy inkább 4-gyel. Segít a természetes folytatás megtalálásában, ha észrevesszük, hogy valójában már a 41. feladat is folytatás. Ha felidézzük a 30. feladatot, akkor látható, hogy ezek közeli kapcsolatban állnak egymással. Ebből adódik is, hogy érdemes a sejtésünket 4 színnel megfogalmazni. Sőt, merészen $n$-re is megfogalmazzuk a sejtést:

*Igaz-e, hogy meg tudunk színezni $64\,(n^3)$ kiskockát $4\,(n)$ színnel úgy, hogy $4\,(n)$ különböző színű $4 \times 4 \times 4$-es ($n \times n \times n$-es) kockát is össze tudjunk belőle állítani?*

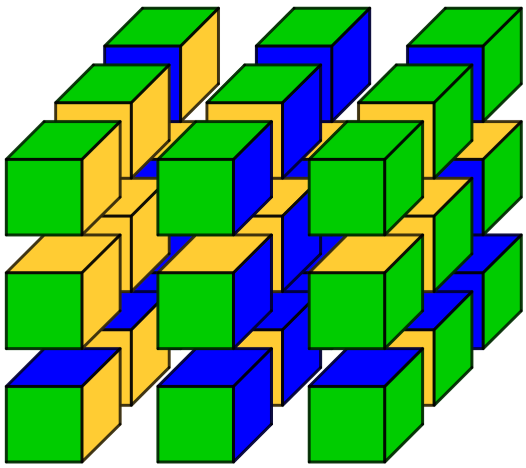
*Megjegyzés:* Ezen a ponton érdemes megállni, és megkérdezni a diákokat arról, hogy mit gondolnak a sejtés helyességéről.

Ha megszámoljuk a szükséges színezett lapokat, akkor az előző két esethez hasonlóan pontosan megegyezik a szükséges és a rendelkezésre álló lapok száma. Ez a tény biztató a sejtés helyességére nézve, de az előző számolgatás nagyon körülményesnek tűnik már $n = 4$ esetén is.

Érdemes ezért más utat keresnünk. Ehhez egy szemléletbeli váltásra van szükségünk. Ne $n^3$ különálló kiskockát képzeljünk el, hanem ehelyett egy, már összerakott nagyot.

Az alábbi konstrukciót $n = 3$-ra mutatjuk meg, teljesen hasonlóan működik más $n$-ekre is.

Bontsuk a kockát 3 rétegre. A két szélső réteg külső lapjait színezzük zöldre. A szomszédos rétegek közti lapok az egyik vágásnál legyenek sárgák, a másiknál pedig kékek. Végezzük el ezt a színezést a másik két merőleges irányban szétbontott kockával is. Az így kapott színezés a 26. ábrán látható.



26. ábra. Három színnel színezett kocka.

Meg kell még gondolnunk, hogy ez a színezés jó. Legyen a kocka az ábrán látható állásban. Ekkor a felső réteget a kocka aljára tesszük, a baloldali réteget a kocka jobb oldalára tesszük, végül az elöl lévő réteget a kocka hátuljára tesszük. Ekkor minden cserénél a megfelelő lappár sárga lesz, tehát a három csere után egy sárga kockát kapunk (Ezen a ponton felhasználjuk, hogy két azonos rétegben lévő kocka a cserék során azonos rétegben és állásban marad, lásd a 40. gyakorlatot.). Ha megismételjük a procedúrát, akkor egy kék kockát kapunk. Tetszőleges $n$-re ugyanígy működik a megoldás, ennek végiggondolását az Olvasóra bízzuk.

*Kommentár:* Lényeges gondolat a rétegekre bontás mellett az, hogy a 27 különálló kockát együtt, közös szerkezetben vizsgáltuk. Ez a lépés megkerülhetetlen ahhoz, hogy eljussunk a feladat „elegáns” megoldásáig.

*Megjegyzés:* Ez a feladatsor legnehezebb feladata. Érdemes a megoldást több lépésben megbeszélni, segítséget adni. Például: „Nézd egyben a kockákat!”, „Bontsd szintekre!”.

Annak ellenére, hogy a feladat nehéz, célunk az, hogy minél többen rájöjjenek a megoldásra. Véleményünk szerint ebben segít az, hogyha csak lépésenként jutunk el az általános állításig, azaz először $n = 2$, majd az $n = 3$ esetet vizsgáljuk meg. Fontos segítő feladatnak gondoljuk a 40. gyakorlatot, és az ezt felvezető feladatokat is. Egyrészt az ottani eredményeket felhasználjuk a megoldásban, másrészt meg is ismerkednek a diákok a megoldás lényeges mozzanatával.

**43. feladat.** Vegyük észre, hogy használhatjuk a 41. feladat megoldását. Egyrészt legalább 3 lépés kell, hiszen egy lépésben 54 lapot színezünk be, és összesen 162 van. Másrészt, ha minden lépésben összeállítunk egy piros, sárga és zöld kockát, akkor ezeket a festékbe mártva készen is vagyunk a színezéssel.

*Megjegyzés:* Ez egy gyakorló feladat. Annak ellenőrzésére szolgál, hogy a diákok megértették-e az eddigieket. Előzmények nélkül a megoldás meglehetősen nehéz lenne.

## Csatlakozó kérdések

**44. gyakorlat.** *A 42. feladat megoldásában szereplő, színes kiskockákat különbözőnek tekintjük, ha eltolással nem vihetjük egymásba. Hány különböző kiskocka keletkezett?*

## Lehetséges folytatások

**45. feladat.** *A 42. feladat kapcsán milyen analóg állítást lehet megfogalmazni síkban?*

**46. feladat.** *Adott egy szabályos háromszög, amelyet szabályos háromszögrácsra bontunk az $n$-edelő pontjai segítségével. Meg lehet-e színezni a kis háromszögek oldalait $n$-színnel úgy, hogy mind az $n$ különböző színű nagy háromszöget összeállíthassuk belőle?*

**47. feladat.** *Adott egy szabályos tetraéder, amelyet szabályos tetraéderrácsra bontunk az $n$-edelő pontjai segítségével. Meg lehet-e színezni a kis tetraéderek lapjait $n$ színnel úgy, hogy mind az $n$ különböző színű nagy tetraédert összeállíthassuk belőle?*

### Megoldások

**45. feladat.** A síkbeli analóg feladat a következőképpen hangzik:

*Igaz-e, hogy $n^2$ négyzet oldalait meg tudjuk színezni $n$ színnel úgy, hogy $n$ különböző színű $n \times n$-es négyzetet is össze tudjunk belőle állítani?*

Az állítás igaz, és a bizonyítás a 42. feladathoz teljesen hasonlóan működik. Az apró különbség, hogy a rétegek szerepét a sorok/oszlopok veszik át. Minden másban ugyanúgy működik a gondolatmenet.

Vegyük észre, hogy ez a színezés lényegében megegyezik a 35. gyakorlatban szereplő (szétvágott) úszógumi színezésével.

*Kommentár:* Ez a feladat segíti a 42. feladat konstrukciójának mélyebb megértését. Hasonló állítás akár egy dimenzióban is megfogalmazható és belátható. A konstrukció különböző dimenziókban is működik, sőt nincs is lényeges különbség köztük. Érdemes végiggondolni, hogy ez a tény nem is olyan meglepő, hiszen a kockás konstrukcióban az egymásra merőleges lapok színezése egymástól teljesen függetlenül történt.

*Megjegyzés:* Bár jóval meghaladja az általános iskolás anyagot, érdemes megemlíteni, hogy hasonló állítások megfogalmazhatóak magasabb dimenziókban is, sőt, a konstrukció is erőlködés nélkül átvihető.

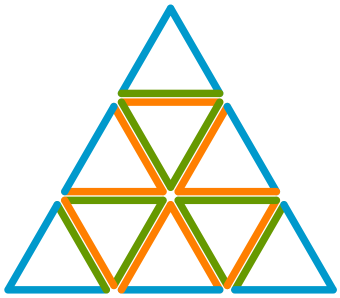
**46. feladat.** Számoljuk meg a szükséges és a rendelkezésre álló oldalakat. Egy nagy háromszög kerülete $3n$, ha $n$ színt használunk, akkor $3n^2$ oldalra mindenképpen szükségünk van. Egy háromszöget az $n$-edelő pontjai segítségével $n^2$ háromszögre bonthatunk (48. gyakorlat). Tehát a rendelkezésre álló oldalak szám is éppen $3n^2$.

$n = 2$-re ennek ellenére nincsen megoldás. A háromszögfelbontásban keletkezett középső háromszög három oldalának azonos színűnek kellene lennie. Azonban a kis háromszög három oldala nem látszódhat egyszerre, emiatt nincsen elegendő oldalunk a színezés megvalósítására.

$n = 3$ esetén a 27. ábrán látható színezés megfelel a feltételeknek.

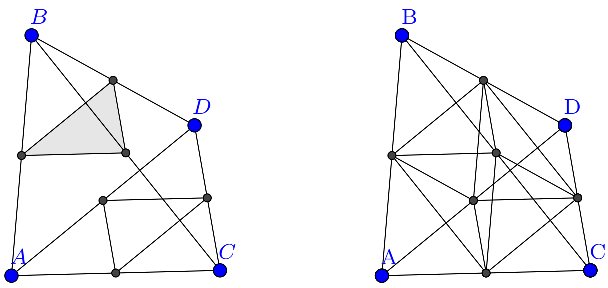
Ha $n > 3$, akkor is megoldható a feladat. Minden különböző színű nagy háromszöghöz, három olyan kis háromszögre van szükségünk, amelynek van két azonos színű oldala. Tehát $3n$ kis háromszöget meg kell színeznünk úgy, hogy két oldala azonos színű legyen. A többi háromszög színezésénél csupán arra kell figyelnünk, hogy mindhárom oldal különböző színű legyen. A feltételeket könnyen kielégíthetjük, a részletek végiggondolását az Olvasóra bízzuk.

**47. feladat.** Számoljuk meg a szükséges lapokat az $n = 2$ esetén. Egy középsík a 28. ábra a) részén látható módon metszi a tetraédert. Ez a sík két új lapot hoz létre, továbbá a vágással



27. ábra. 9 háromszög színezése.

párhuzamos $ACD$ lapon található 4 további lap. Azaz a nagy tetraéder egy lapjához 6 kis lap tartozik, így összesen 24 lapot színezhetünk meg. A tetraéder felszíne 16 lapból áll, tehát mindkét szín előállításához 32 lapra lenne szükségünk. Ezért a feladat nem oldható meg. Hasonló számolás mutatja, hogy tetszőleges $n$-re sem létezhet jó színezés.




28. ábra. a) Egy tetraéder középsíkja; b) egy tetraéder felbontása.

*Kommentár:* Vegyük észre, hogy az eddig jól működő analógia (kocka, négyzet, háromszög) csődöt mondott. Ez jól mutatja az *analógiás gondolkodás* korlátait. A valóság még az eddig írtaknál is rosszabb. Ugyanis a 28. ábra b) részén látható, hogy a középsíkok által meghagyott középső test nem is tetraéder, hiszen 6 csúcsa van.

Felmerülhet bennünk, hogy esetleg a középsík fogalmát választottuk meg rosszul. A középvonal esetleges más általánosításai sem segíthetnek rajtunk, ugyanis igaz az a tétel, hogy szabályos tetraéderekkel nem parkettázhatjuk ki a síkot (sem egy másik tetraáédert). A tétel bizonyítása messze meghaladja az általános iskolai eszközöket, azonban mindenképpen érdekes tény. A tételről először Arisztotelész írt, ő tévesen azt gondolta, hogy a tér kitölthető szabályos tetraéderekkel.

*Megjegyzés:* Mindenképpen érdemes a témakört a háromszögekre vonatkozó feladatokkal zárni. Több, fontos dolog is előkerül a feladat kapcsán. Nagyon meglepő az, hogy a várakozásaink nem teljesülnek, ez a tévedésünk felértékeli a bizonyítás szerepét. Arisztotelész hibás gondolata mutatja, hogy a legnagyobbak is hibázhatnak. Fontos ezt tudatosítanunk a diákjainkban, hiszen az önálló felfedezés, gondolkodás során ők maguk is óhatatlanul kerülnek ilyen helyzetekbe.

### Csatlakozó kérdések

**48. gyakorlat.** *Egy szabályos háromszöget az $n$-edelő pontjai segítségével kis háromszögekre bontjuk. Hány kis háromszöget kaptunk?*

## Gyakorlatok megoldásai

**4. gyakorlat.** A 3. feladat a) részéhez hasonló módon könnyen láthatjuk, hogy pártlan $n$-ekre nem oldható meg a feladat. Páros $n$-re viszont mindig találunk megoldást, az alábbiakban mutatunk egyet (29. ábra).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | | | | 1 | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

29. ábra. $2k$ kocka páratlan sok szomszéddal.

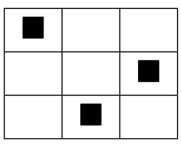
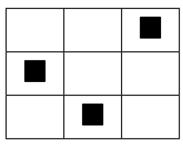
*Megjegyzés:* Ez a konstrukció akkor működik, ha legalább 8 kockánk van. Az $n = 4, 6$ esetek meggondolását az Olvasóra bízzuk.

**5. kérdés.** A 3. feladatban mutatott konstrukció általánosítható. Az ottani konstrukcióban lévő kockák száma könnyen növelhető hárommal, hiszen elég a közbülső szintet tükrözni, és beszúrni az építménybe. Tetszőleges számú kockára a feladat nehezebb, szükségünk van három szintes konstrukcióra 7, illetve 8 kockával is. Ha ezek a rendelkezésünkre állnak, akkor a fenti módon ezek is növelhetők hárommal. Így minden $n$-re tudunk mutatni megfelelő építményt. 7, illetve 8 kockával a konstrukció nehézkes, de létezik.

**9. gyakorlat.** Az űrhajósnak összesen két egységet kell lefelé, jobbra és előre mennie. Minden egyes lépésben ezekből pontosan egyet teljesít. Tehát az útvonal választásától függetlenül 6 lépés alatt ér el a céljához.

**10. gyakorlat.** A c) jelű konstrukció a helyes. A többi konstrukción egy-egy típushiba látható: a) nem lehetnek a konstrukcióban különálló 2-es párok; b) nem lehet egy 1-es mező mind a négy oldalán kocka; d) egy 2-es mező körül nem lehet páratlan sok 1-es.

**11. gyakorlat.** Megmutatjuk, hogy az alsó, középső és felső szintek valamelyikén biztosan lesz átló. Vizsgáljuk a szintenkénti elrendezést (30. ábra). Vegyük azt a két szintet, ahol szerepel a bal felső, illetve a jobb felső sarokban egy-egy kocka. Ekkor a két szint további kitöltése már egyértelműen meghatározott, ha nem engedjük meg egyik helyen sem az átlós elrendezést.

bel felső  jobb felső 

30. ábra. Nem sikerül elrendeznünk átlók nélkül a kockákat.

A harmadik sor közepére mindkétszer kerül kocka, ez ellentmond annak, hogy 9 kocka elég mindhárom irányú vetület lefedésére.

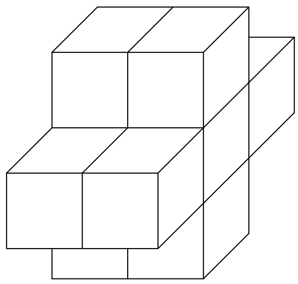
*Másik megoldás:* Most is az alsó, középső, felső szintekre koncentrálunk. 4 csúcsbeli kockánk van (bal felső, bal alsó, jobb felső, jobb alsó). Ezek összesen 3 szinten vannak, tehát lesz olyan szint, ahol kettő is van. A két csúcs csak átlósan helyezkedhet el egymáshoz képest, emiatt a harmadik kockának is az átlón kell lennie, ezzel találtunk is egy megfelelő szintet.

*Megjegyzés:* Vegyük észre, hogy a kért állításnál egy erősebb állítás láttunk be (nem az összes szint között kerestünk átlósat, hanem csak három párhuzamos között). Azonban éppen ez volt a döntő gondolat, ezzel a módosítással könyebbé vált a megoldás. Járulékos nyereségként három (szintbeli) átló létezését is beláttuk.

**12. gyakorlat.** A 27 kockából hagyjunk el kilencet úgy, hogy az elhagyott kockák vetületei egyszeresen fedjék a négyzeteket. Ekkor a megmaradt 18 kocka megfelelő lesz. 18-nál kevesebb kockával a feladat nyilvánvalóan nem oldható meg.

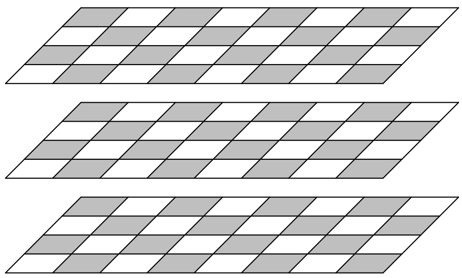
**16 kérdés. a)** Megoldható a feladat. A konstrukció részletei meghaladják az általános iskolás anyagot, így ezt nem közöljük.

**b)** Az eddig még nem tisztázott esetek: $0, 1, 2$ szomszéd. Megmutatjuk, hogy 1 és 2 szomszédra nem oldható meg a feladat. Nézzünk egy megmaradt kockákból álló párt. A hasáb hosszabb 4 lapján 2-2 üres hely van (31. ábra). Ezek nem maradhatnak így, hiszen akkor lennének szomszédos elhagyott kockák. Azonban a kockapárnak összesen is csak két szomszédos kockája lehet. Tehát semmiképpen sem jut mindegyik üres helyre. Ezzel a bizonyítást befejeztük.



31. ábra. Egy szomszédos kockapár és a szomszédos párok.

Meglepő, de elérhető, hogy egyik megmaradt kockának se legyen szomszédja. Ehhez a kockák közül a sakktábla színezés fekete kockáit kell elhagynunk (32. ábra).



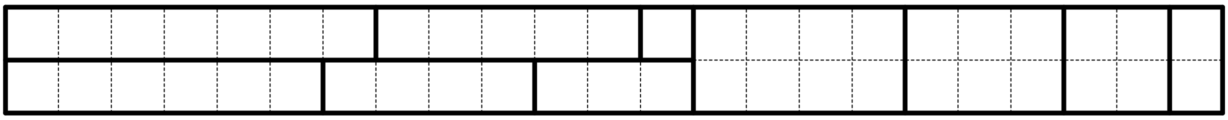
32. ábra. Egyik megmaradt kockának sincs szomszédja.

**17. kérdés.** Bár ez a kérdés ártatlannak tűnik, mégis csak a XX. században született rá megoldás. Az egész kérdéskör érdekes, az érintkező kockákat ikerkockáknak nevezik. Minkowski[9] kezdett el foglalkozni az ilyen típusú problémákkal. A feladatban feltett kérdést Keller[10] fogalmazta meg az 1930-as években. Ezt három dimenzióban hamar belátták, azonban a magasabb dimenziós állítások ellenálltak a megoldási kísérleteknek. Mindenki meglepetésére 1992-ben megmutatták, hogy tizedik dimenzióban van ikerkockákat nem tartalmazó parkettázás. 2002-re a hetedik dimezió kivételével tisztázták a kérdést (alatta igaz az állítás, felette van ellenpélda), 7 dimezióra a kérdés máig megoldatlan.

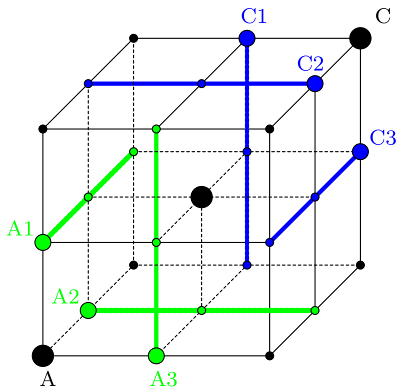
[9] Hermann Minkowski (1864–1909)
[10] Ott-Heinrich Keller (1906-1990)

A kérdéskörnek magyar vonatkozása is van. Speciális parkettázás esetén Hajós György[11] látta be az ikerkockák létezését.

**21. gyakorlat.** Láttuk a 19. feladatban, hogy egy 45 területű téglalapot nem tudunk 10 különböző alakú téglalapra bontani. Egy 46 területű téglalappal viszont ezt már meg tudjuk valósítani. A felbontást a 33. ábrán láthatjuk.



33. ábra. Egy $2 \times 23$-as téglalap felbontása 10 különböző alakú téglalapra.




34. ábra. Egy testátló és a lehetséges lefedések.

**22. gyakorlat.** Használjuk a 34. ábrán látható jelöléseket. Az $ABC$ testátlót adottnak tekintjük. Megvizsgáljuk az $A$-val, illetve $C$-vel szomszédos pontokat. Ezeket olyan egyenesekkel szeretnénk lefedni, amelyeken még másik két (eddig nem lefogott) pont is rajta van. Pontonként kétféleképpen tehetjük ezt meg (az őket tartalmazó lapok középvonalai lehetnek az egyenesek). $A_1$-nél tetszőlegesen dönthetünk, hogy melyik egyenest választjuk. Szimmetria okok miatt feltehetjük, hogy az ábrán látható módon döntöttünk. Ezután már minden választásunk kötött. A megfelelő egyeneseket az ábrán jelöltük. 6 pont maradt szabadon, közülük semelyik három sincsen egy egyenesen. Tehát nem létezik olyan lefogás, amelyben szerepelne testátló.

**26. gyakorlat.** Vegyük észre, hogy egy tetszőleges kockán a szemközti lappárjaiból pontosan egy lap fog látszani. Vegyünk egy olyan kockát, ahol a szemközti lappárok a következők: $6-5; 4-3; 2-1$. Ekkor az elérhető maximum a párok nagyobbik tagjainak összege, azaz $6+4+2=12$.

Megmutatjuk, hogy mindig elérhető az, hogy a látható lapok összege legalább 12 legyen. Ha a 6-os és az 5-ös lapok szomszédosak, akkor egy tetszőleges lap hozzávételével elérhetjük a célunkat. Ha a 6-os és az 5-ös lapok szemköztiek, akkor a 6-os és 4-es lapok szomszédosak. Nekik két közös szomszédjuk van, és ezek egyike legalább 2. Ekkor ezt a három lapot választva, a rajtuk lévő összeg legalább 12 lesz.

**27. gyakorlat.** Feltehetjük, hogy az 1-es lap van alul (hiszen elforgathatjuk a kockát). A felső lap 5 féle lehet. Hasonlóan feltehetjük, hogy a megmaradt 4 szám közül a legkisebb szerepel az elülső lapon (ezzel már egyértelműen meghatároztuk a kocka állását). A hátulsó lapon 3

[11] Hajós György (1912–1972)

féle szám állhat. A maradék két számot pedig kétféleképpen helyezhetjük el. Összesen tehát $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ féleképpen számozhatunk meg egy kockát.

**28. gyakorlat.** Megmutatjuk, hogy nem lehet a kívánt módon megszámozni egy dobókockát. Elő kell állítanunk a $6, 7$ és $8$ összegeket is. Ezek az alábbi módon állhatnak elő:

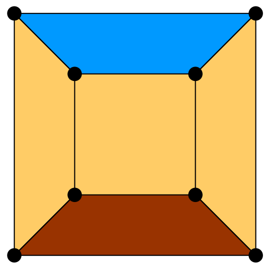
$6 = 1 + 2 + 3$,

$7 = 1 + 2 + 4$,

$8 = 1 + 2 + 5$, vagy $8 = 1 + 3 + 4$.

Az első két összegnek elő kell fordulnia valamely csúcsnál, emiatt az 1-es és 2-es lapok szomszédosak. Illetve mindkettejükkel szomszédos a 3-as és 4-es lap. Ez csak úgy lehetséges, ha a 3-as és 4-es lap egymással szemben van. Tehát az $1 + 3 + 4$ összeg nem fordulhat elő. Azonban az $1+2+5$ összeg sem jöhet létre, hiszen elfogytak azok a lapok, amelyek egyaránt szomszédosak az 1-es és 2-es lapokkal is.

**33. gyakorlat.** Ez a feladat a 29. feladat párja. Éppen ellentétes a célunk, azt szeretnénk, ha kevés szín látszódna. Ez is megvalósítható (35. ábra). Az ábrán a kockát kiterítve látjuk, a nem látható lap sárga színű.



35. ábra. Minden csúcsnál csak kétféle színű lap szerepel.

**34. gyakorlat.** Egy $2 \times 2 \times 2$-es kocka felületén összesen $6 \cdot 4 = 24$ lap található, míg egy kiskockának hat lapja van. Emiatt legalább $\frac{3 \cdot 24}{6} = 12$ kockára van szükségünk.

Ez elég is a célunk megvalósításához. Egy kiskockát két színnel színezünk, méghozzá úgy, hogy az azonos színű lapok egy-egy csúcs körül legyenek. 4-4 kocka lesz a következő típusokból: piros-sárga, sárga-zöld, zöld-piros. Ebből könnyen kirakhatóak a kívánt kockák.

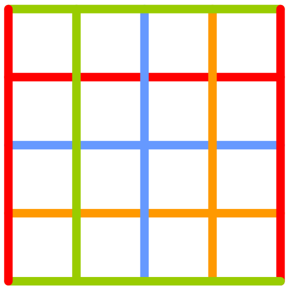
**35. gyakorlat.** Ábrázoljunk egy szétvágott tóruszt a 36. ábrán. Bár az ábránkon csak $4 - 4$ rácsvonal szerepel, mégis jól mutatja a kapott téglalap szerkezetét. A szemközti oldalaknak azonos színűeknek kell lenni, és egymástól függetlenül határozhatjuk meg a színeiket. Emiatt összesen $30 \cdot 30 = 900$ féleképpen nézhet ki a kapott téglalap kerülete.

**36. gyakorlat. a)** A körrel lévő játékos azonnal nyerhet. A 37. ábrán látható helyre lépve olyan hármast hoz létre, amely átlósan egymás után helyezkedik el a tóruszon (Gondolatban ragasszuk össze a téglalap oldalait.)

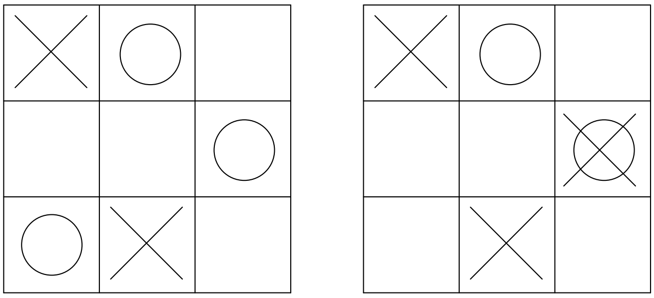
**b)** A kereszttel lévő játékos nem tud azonnal nyerni. Egy lehetősége van a megfelelő elrendezés létrehozására, de arra a helyre már egy kör került.

*Megjegyzés:* Ez egy rövid ízelítő volt a különböző felületek világából. Az eredeti feladat mellett sok más érdekesség is megtalálható Jeffrey R. Weeks: A tér alakja c. könyvében.

**40. gyakorlat.** Nem lehetséges elmozgatni a kockákat. A bizonyítás kulcsa a következő egyszerű megfigyelés: ha két kocka egy rétegben van, akkor sosem kerülhetnek két különbözőbe.



36. ábra. Egy téglalap négy rácsvonal esetén.



37. ábra. a) Nyerhet a körrel lévő játékos; b) a kereszttel lévő játékos helye foglalt.

Ellenőrizzük ezt az állítást. Ha olyan réteget cserélünk, amelyben ők is benne vannak, akkor nyilván együtt maradnak. Ha olyan réteget cserélünk, amelyekben csak az egyik van benne, akkor a cserélt rétegek merőlegesek a közös rétegükre. Bár ekkor az egymáshoz viszonyított helyzetük megváltozik, a közös rétegükben benne maradnak. Ezzel a megfigyelésünket igazoltuk. Elfogadva ezt az állítást viszont nyilvánvaló, hogy nem kerülhetnek egy testátló két végébe (hiszen akkor nem lennének közös rétegben).

**44. gyakorlat.** Nézzük meg a 26. ábrát. Ekkor láthatjuk, hogy bármelyik irányú réteget is nézzük, a benne szereplő kiskockák megfelelő lapjai azonos színűek egy rétegen belül, és különbözőek két különböző rétegben. Tehát akkor lehet két kocka ugyanolyan, ha mindhárom irányban ugyanabban a rétegben szerepel. Ez azonban csak akkor fordul elő, ha ugyanarról a kockáról beszélünk. Így a kockák páronként különbözőek.

**48. gyakorlat.** $n = 1, 2$-re 1, illetve 4 háromszögre bontjuk a háromszöget. Az osztópontok számának növelése megfeleltethető annak, hogy a meglévő felbontáunkat növeljük egy sorral. Egy sor növelése $(n+1)+n = 2n+1$-gyel növeli a háromszögek számát. $n^2+2n+1 = (n+1)^2$, tehát a háromszögek száma valóban a következő négyzetszám lesz.